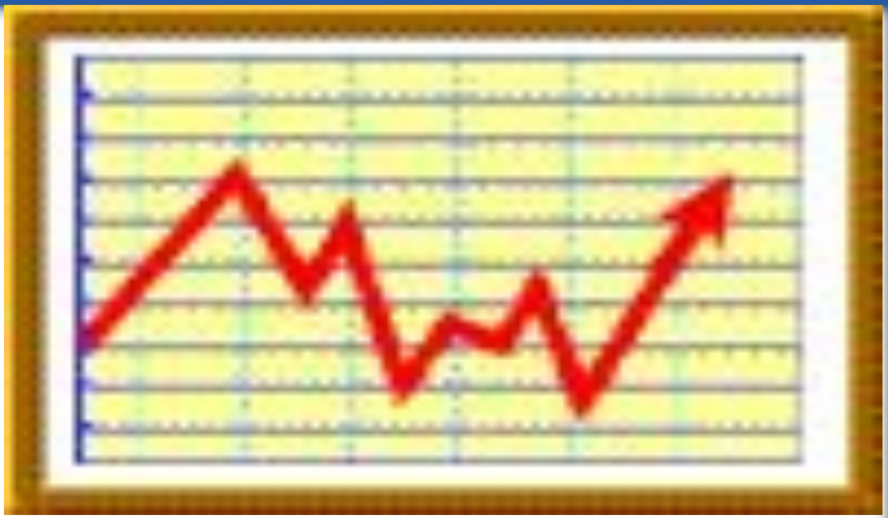


Исследование функций с помощью производной

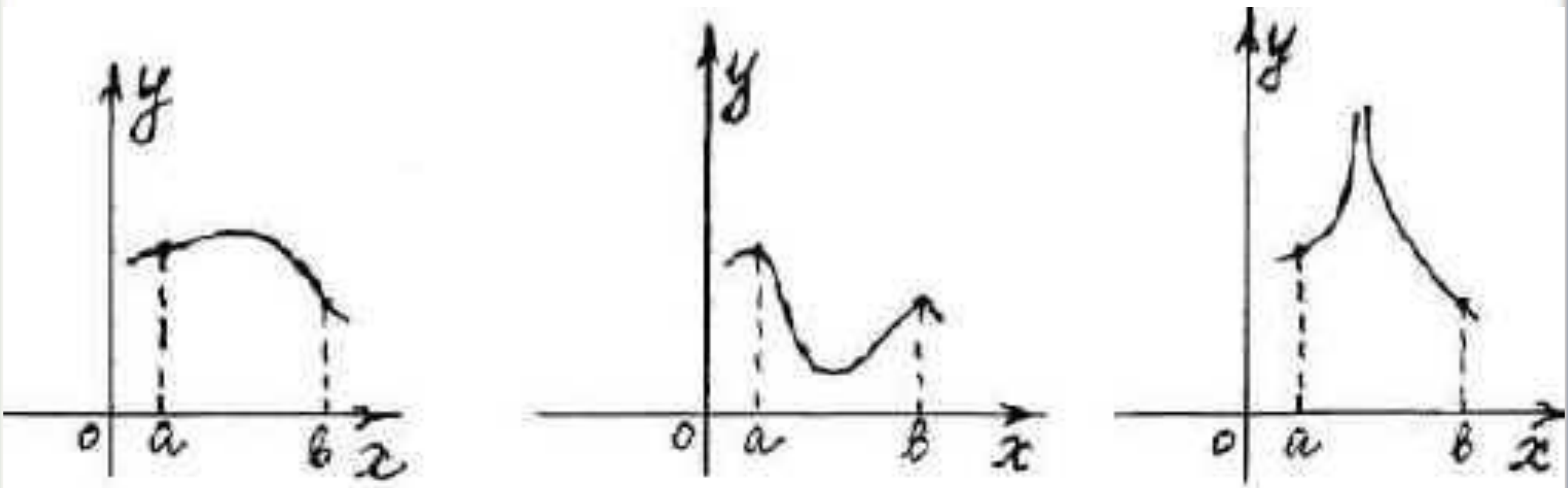
Основные вопросы:

- **Признак возрастания (убывания) функции. Критические точки функции – максимумы и минимумы.**

- **Правило нахождения интервалов монотонности и экстремумы. Исследование функции на монотонность и экстремум.**

- **Отыскание наибольших и наименьших значений функций. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин.**

Одна из основных задач исследования функции- это нахождение промежутков ее возрастания и убывания.

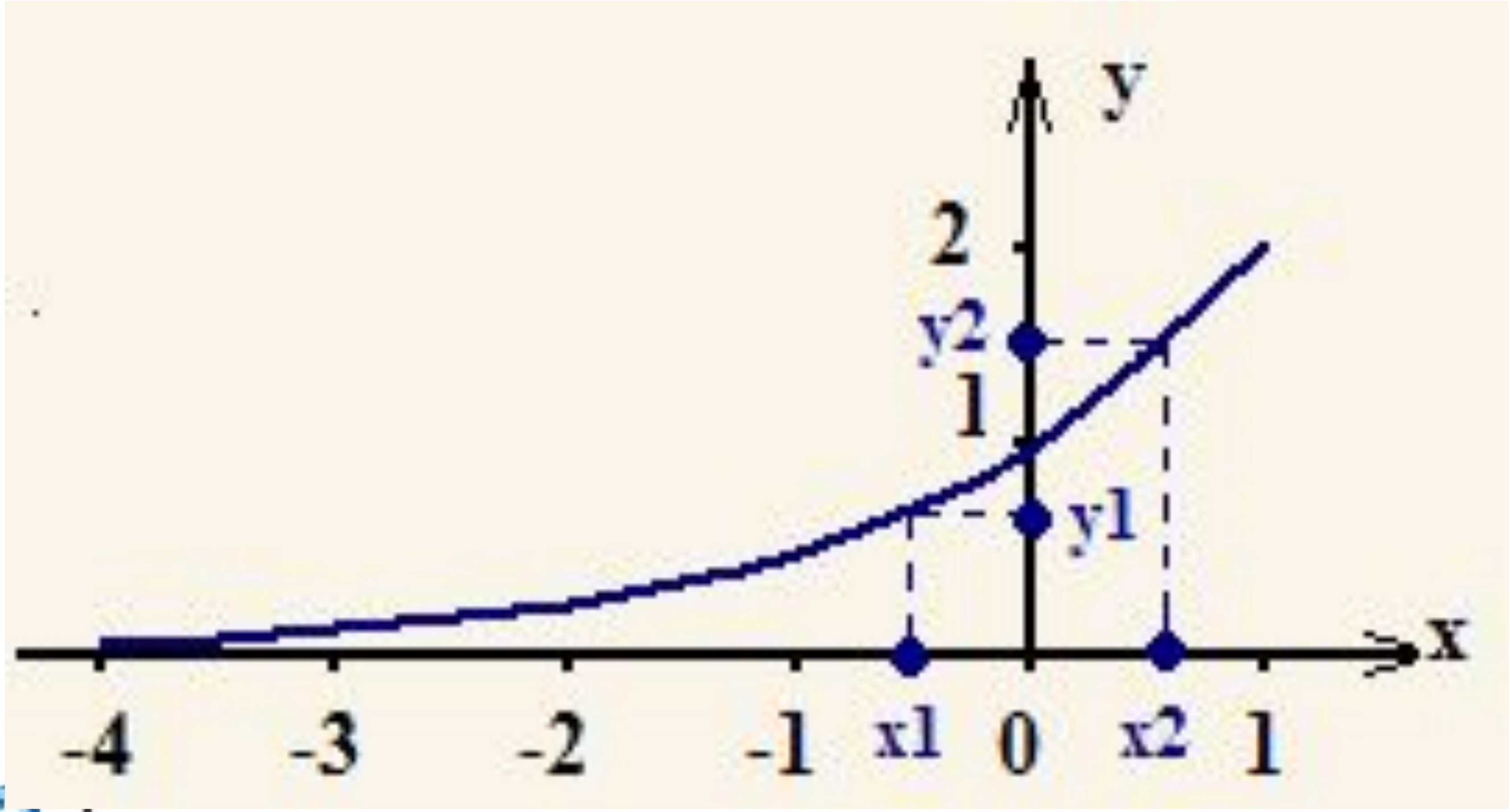


ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1:

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$.

Другими словами, *функция называется **возрастающей** в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из данного интервала,* **большему соответствует большее значение функции.**

Возрастание функции

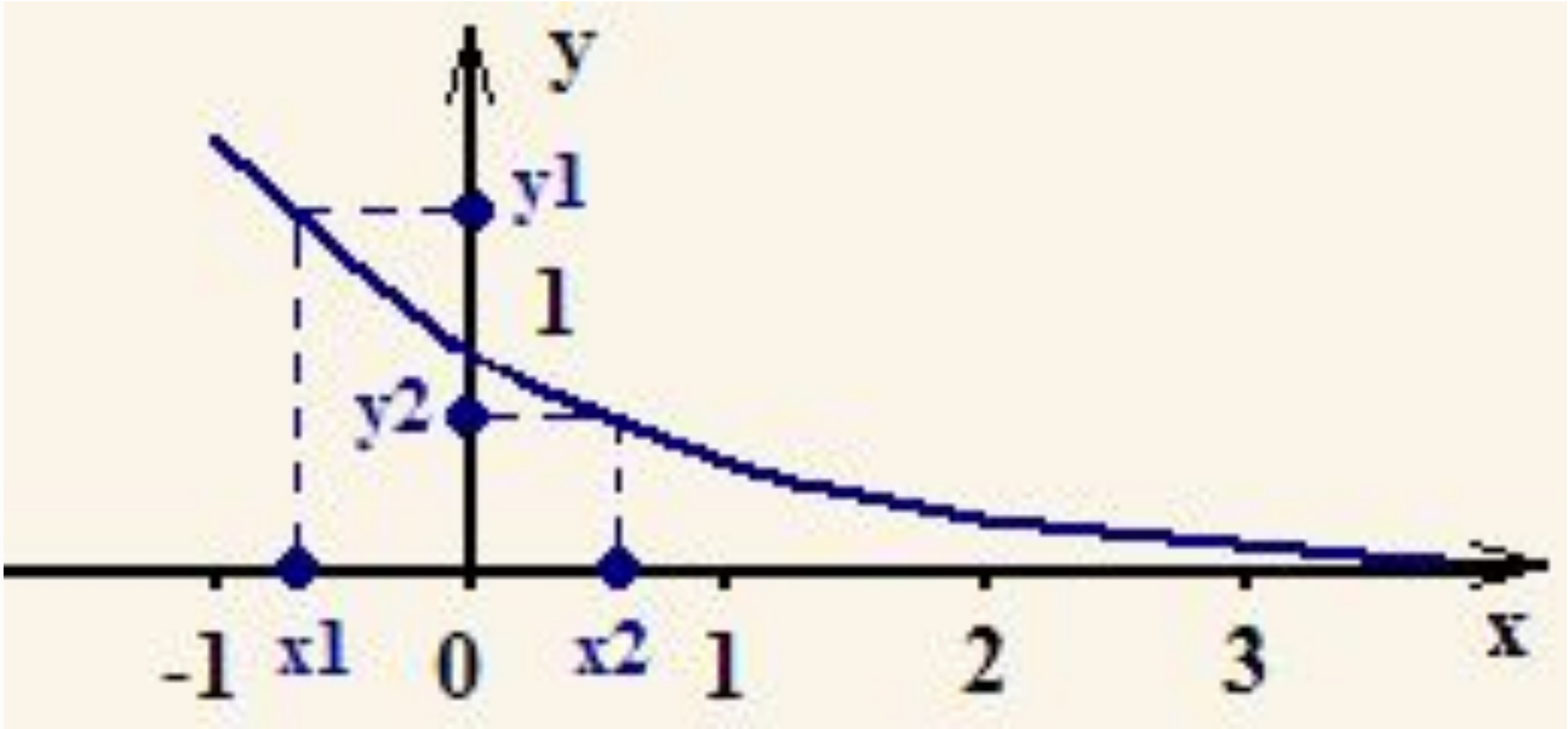


ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2:

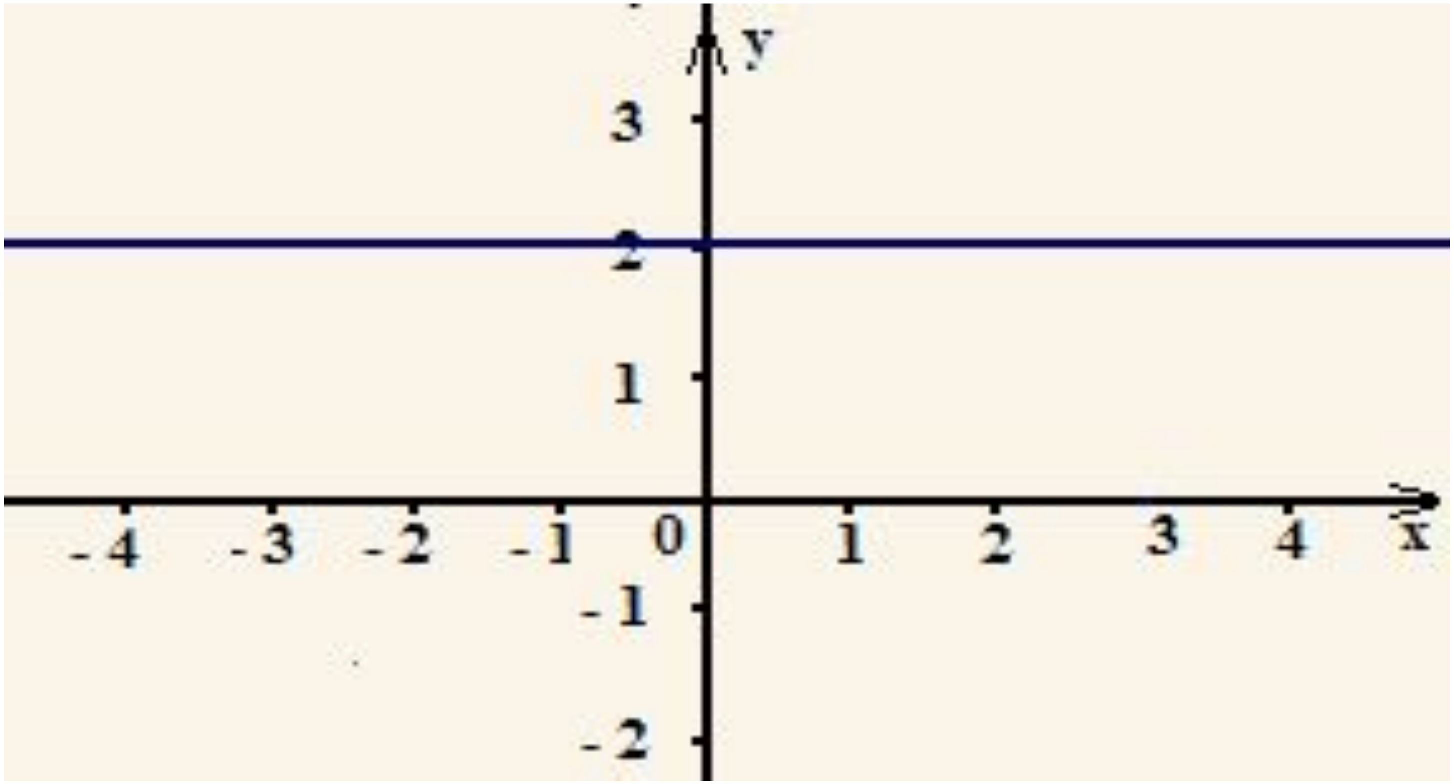
Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$.

Другими словами, *функция называется* ***убывающей*** *в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из данного интервала,* ***большему соответствует меньшее значение функции***.

Убывание функции



Определение постоянной функции



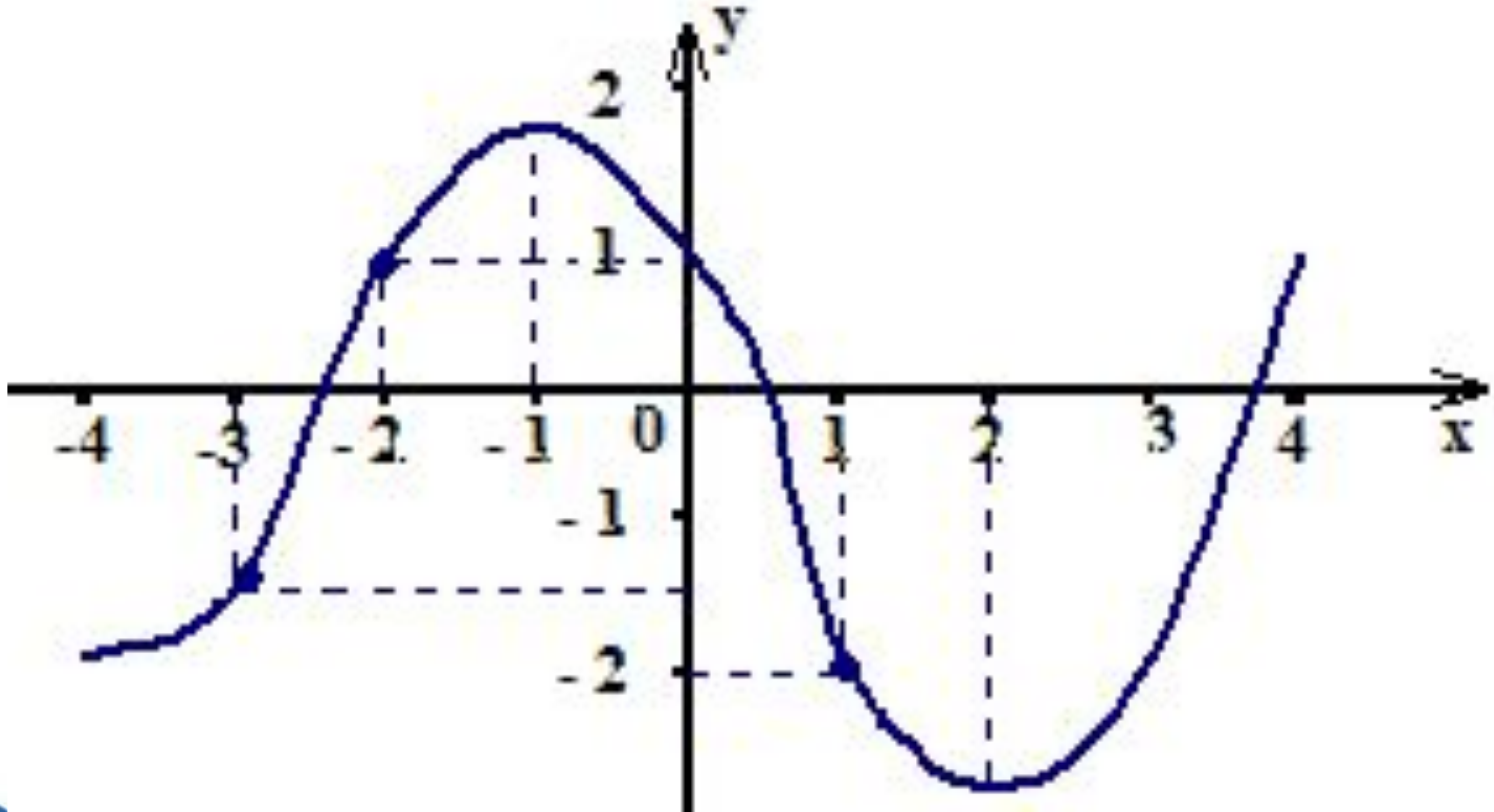
Функция, не возрастающая и не убывающая на всей области определения называется **постоянной**.

Промежутки монотонности

Если функция *возрастает* или *убывает* на некотором промежутке, то она называется <u>монотонной</u> на этом промежутке.

Промежутки возрастания и убывания называются <u>промежутками монотонности</u> функции.

ПРИМЕР1: НАЙТИ ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ, ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ГРАФИЧЕСКИ



Ответ:

Промежутки возрастания
(- ∞; -1) и (2; +∞),
промежуток убывания: (-1; 2).

ТЕОРЕМА 1.(необходимые условия возрастания и убывания функции).

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$

- возрастает на интервале (a, b), то $f'(x) \geq 0$ для любого $x0 \in (a,b)$;

- убывает на интервале (a, b), то $f'(x) \leq 0$ для любого $x0 \in (a,b)$.

ТЕОРЕМА 2.(достаточный признак возрастания и убывания функций).

- Если $f'(x)>0$, в каждой точке интервала (a,b), то функция **возрастает** на этом интервале.

- Если $f'(x)<0$, в каждой точке интервала (a,b), то функция **убывает** на этом интервале.

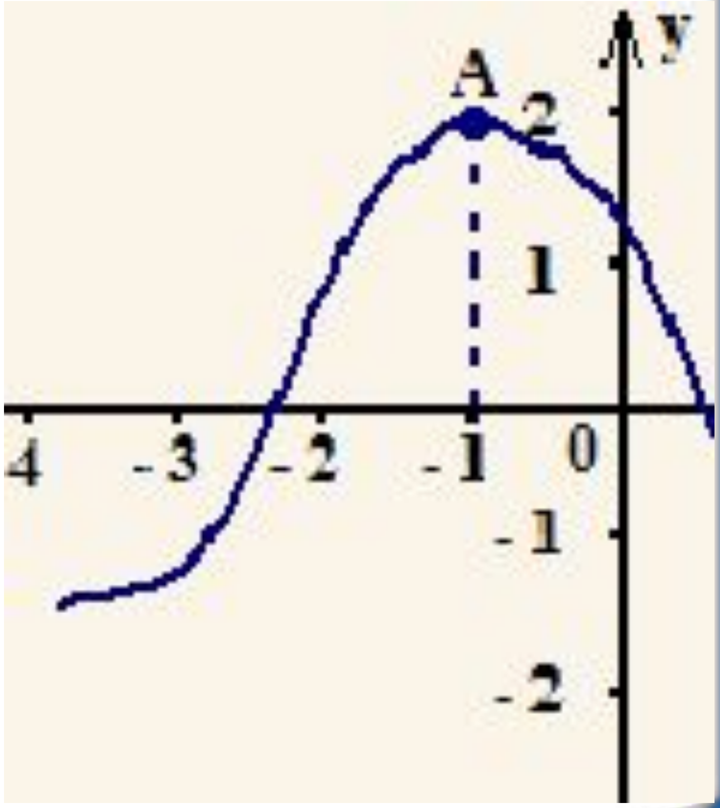
Точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются

КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ.

Точка максимума

- Точка $x0$ называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности $x0$ выполнено неравенство

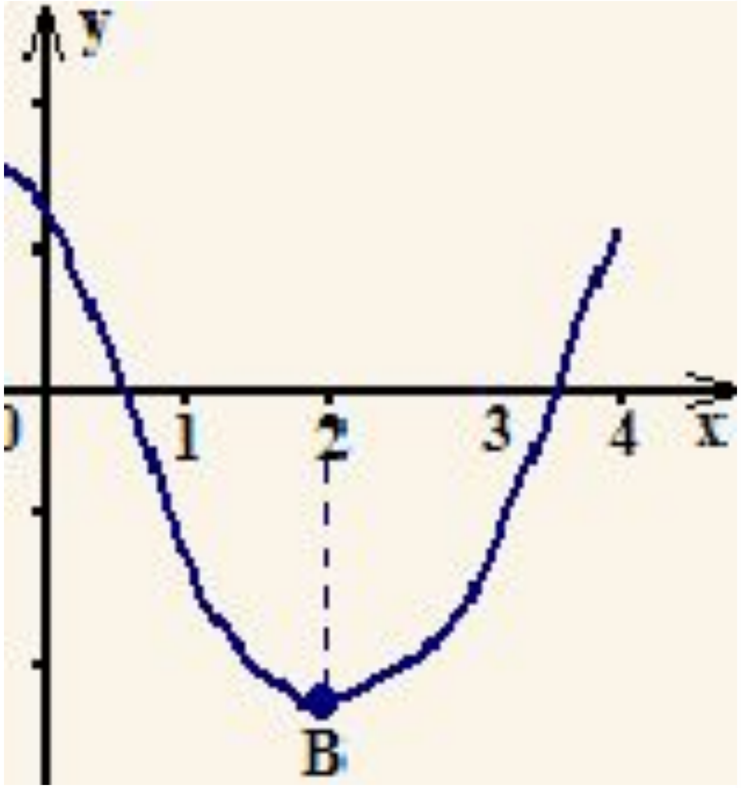
$$f (x) < f (x0).$$



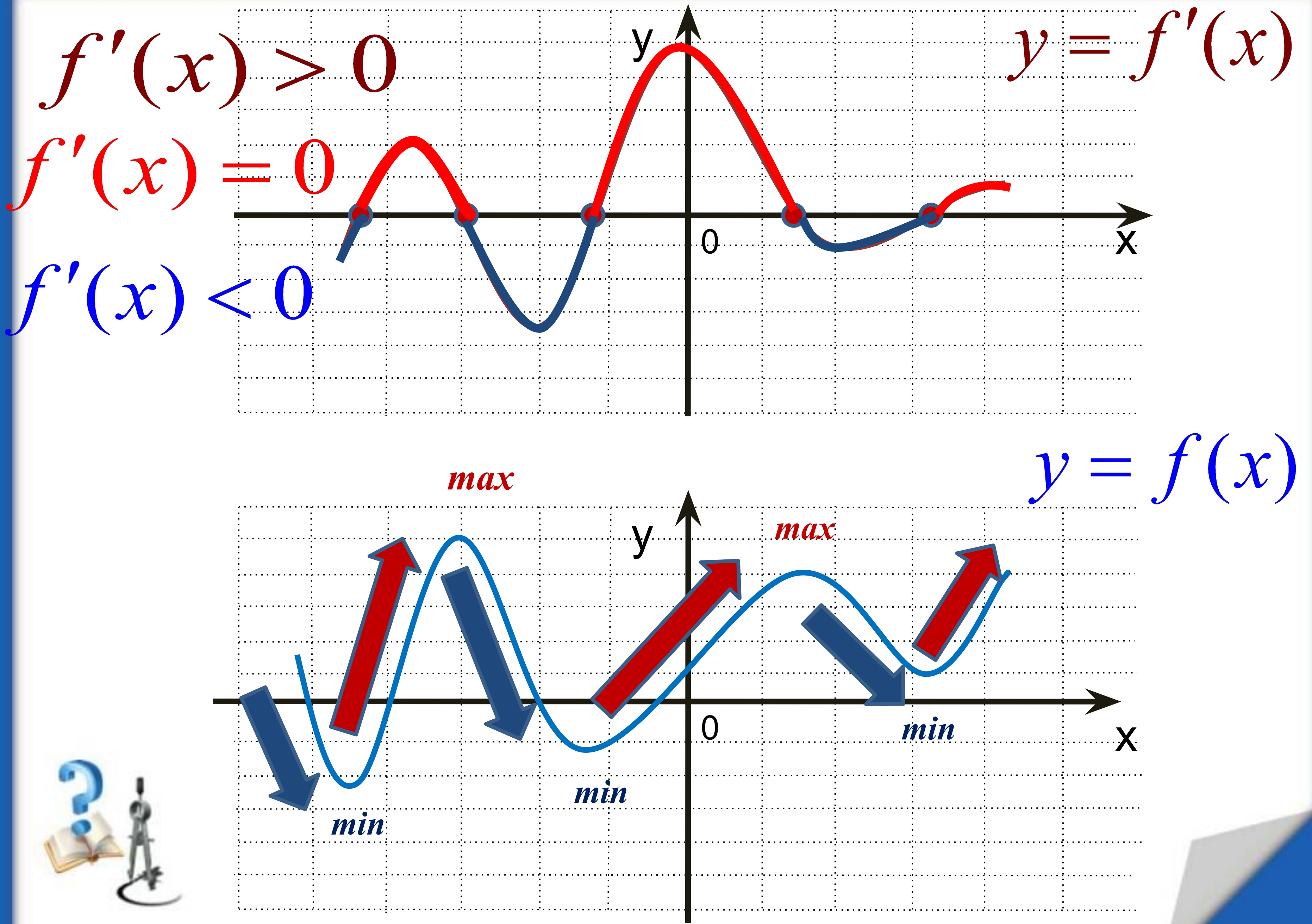
Точка минимума

- Точка x0 называется **точкой минимума** функции f(x) , если для всех *x* из некоторой окрестности x0 выполнено неравенство

$f(x) > f(x_0)$.



Точки максимума и минимума функции f(x) называются ***точками экстремума*** этой функции, а значения функции в точках максимума и минимума называются **максимумами** и **минимумами функции** или ***экстремумами функции***.


$f'(x) > 0$
$f'(x) = 0$
$f'(x) < 0$
$y = f'(x)$
y
0
x
$y = f(x)$
max
max
y
0
x
min
min
min

Экстремум функции, если он существует, <u>может быть только в критических точках.</u>

Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум

ТЕОРЕМА 3.(необходимое условие экстремума).

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то либо $f'(a) = 0$, либо $f'(a)$ не существует

Геометрический смысл

Касательная в таких точках графика параллельна оси OX

Экстремумы функции

Если производная функции

равна нулю

не существует

Стационарные точки

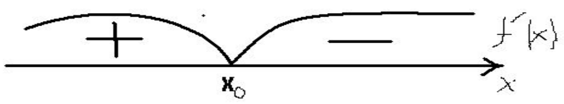
Критические точки

Касательная в таких точках графика параллельна оси ОХ

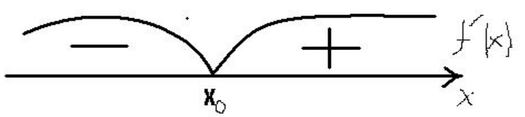
Касательная в таких точках графика не существует

ТЕОРЕМА 4.(достаточное условие существования экстремума).

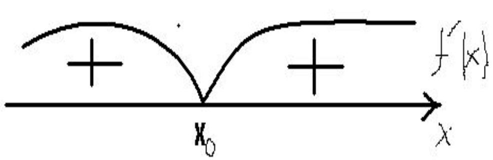
- Если производная f ' (x) при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 является точкой максимума;

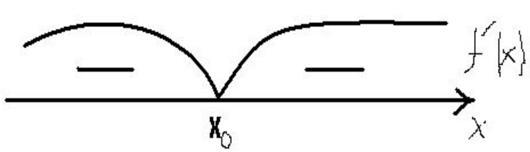


- Если f ' (x) при переходе через точку x_0 меняет знак с «-» на «+», то x_0 является точкой минимума;



- Если f ' (x) при переходе через точку x_0 не именяет знак, то в точке x_0 функция f (x) не имеет экстремума.





Правило исследования функции y=f(x) на экстремум.

- 1).Найти область определения функции: D(f).
- 2). Найти f'(x).
- 3).Найти точки, в которых выполняется равенство f'(x)=0

Правило исследования функции y=f(x) на экстремум.

- 4). Найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x)$ не существует.
- 5).Отметить на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y=f(x)$; получаются промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y=f(x)$ сохраняет постоянный знак.
- 6). Определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п.5

Правило исследования функции y=f(x) на экстремум.

- 7). Сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек:
- если знак производной меняется с «+» на «-», то при данном значении аргумента функция имеет максимум.
- если с «-» на «+», то минимум.
- Если смены знака в окрестности критической точки нет, то экстремума в этой точке нет.
- 8). Вычислить экстремальное значение функции.

ПРИМЕР . ИССЛЕДОВАТЬ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЮ

$$У = 2Х^3 – 15Х^2 + 36Х + 1$$

1. Функция определена при всех х : Д (у) : R
2. $y' = 6x^2 – 30x + 36$
3. $y' = 0$, $6x^2 – 30x + 36 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
4. y' существует при всех х.

+ - +

5. х

2 3

6. $y' = 6(x – 2)\cdot(x – 3)$. Знаки производной отмечены на координатной прямой.

7.

x	(- ∞ ; 2)	2	(2;3)	3	(3; + ∞)
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$\nearrow$	29	$\searrow$	28	$\nearrow$
		max		min	

Исследование функции с помощью второй производной

Теорема . Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0) > 0$

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второй производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.

III. Найти вторую производную $f''(x)$.

IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то исследование функции нужно произвести с помощью первой производной.

V. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

Пример. Исследовать функцию на экстремум с помощью 2-ой производной:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

1) $D(y) = R$

2) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3);$

3) $y' = 0;\ x^2 - 4x + 3 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 3.$

4) $y'' = 6x - 12$

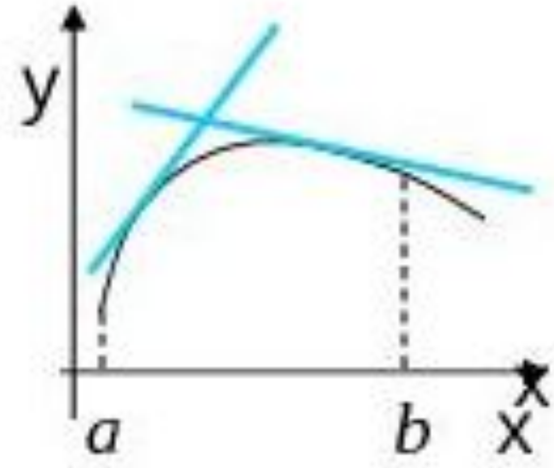
$$y''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \begin{cases} y(1) - \text{максимум} \\ y(1) = 9; \end{cases}$$

5)

$$y''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \begin{cases} y(3) - \text{минимум} \\ y(3) = 5 \end{cases}$$

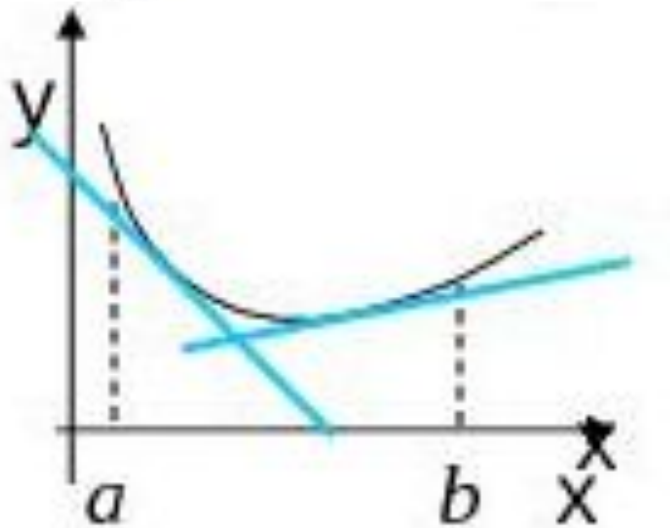
ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

Опр . Кривая обращена выпуклостью вверх на (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на (a,b). Кривая называется *выпуклой*.



ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ

Опр . Кривая обращена выпуклостью вниз на (a,b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.
Кривая называется *вогнутой*.



Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются ***промежутками выпуклости графика функции***.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции y=f(x), характеризуется ***знаком ее второй производной***.

Теорема (*Достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой*)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, и имеет в (a, b) производную до второго порядка включительно, тогда

a) если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна $f''(x) < 0$, то кривая на (a, b) выпукла;

b) если во всех точках интервала вторая производная положительна $f''(x) > 0$, то кривая на (a, b) вогнута.

Пример

♦ ПРИМЕР 1

Исследовать на выпуклость кривую $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Находим первую и вторую производные $f(x)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Подставляя значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$, получим $f''(-2) = 2 \cdot \frac{1}{(-2)^3}$, $f''(-2) < 0$; $f''(1) = \frac{2}{1}$, $f''(1) > 0$. Следовательно, в точке $x = -2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x = 1$ — выпукла вниз.

Пример

Пример 2. Найти промежутки выпуклости кривых:
$f(x)=x^4 - 2x^3 + 6x - 4$

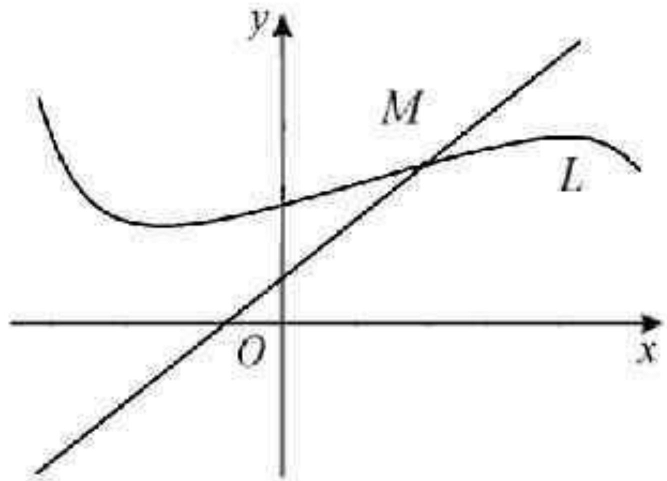
Находим:

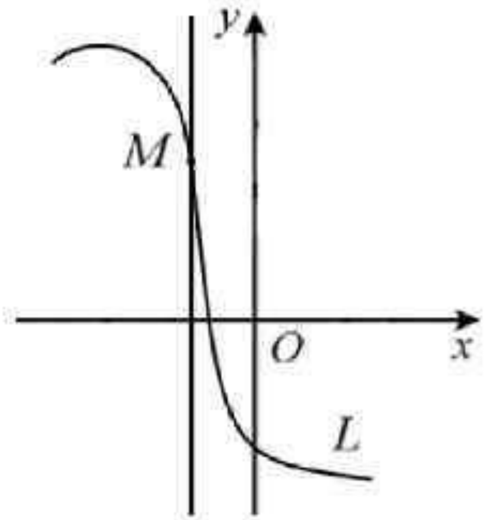
1) $f'(x)= 4x^3 - 6x^2 + 6$
2) $f''(x)= 12x^2 - 12x = 12x\,(x - 1)$
3) В промежутках $-\infty<x<0$ и $1<x<+\infty$ имеем $\mathbf{f''(x)>0}$, т.е. в этом промежутке кривая **вогнута**.
4) В промежутке $0<x<1$ имеем $\mathbf{f''(x)<0}$, т.е. в этом промежутке кривая **выпукла**.

Точка графика функции $y=f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется ***точкой перегиба***.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)=0$ или терпит разрыв.
Если при переходе через критическую точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0;f(x_0))$.

Точки перегиба





Точка *M* данной кривой *L* называется точкой перегиба этой кривой, если она отделяет выпуклый и вогнутый участки этой кривой. В точке перегиба кривая переходит с одной стороны касательной на другую.

94

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема (**достаточное условие существования точек перегиба**). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

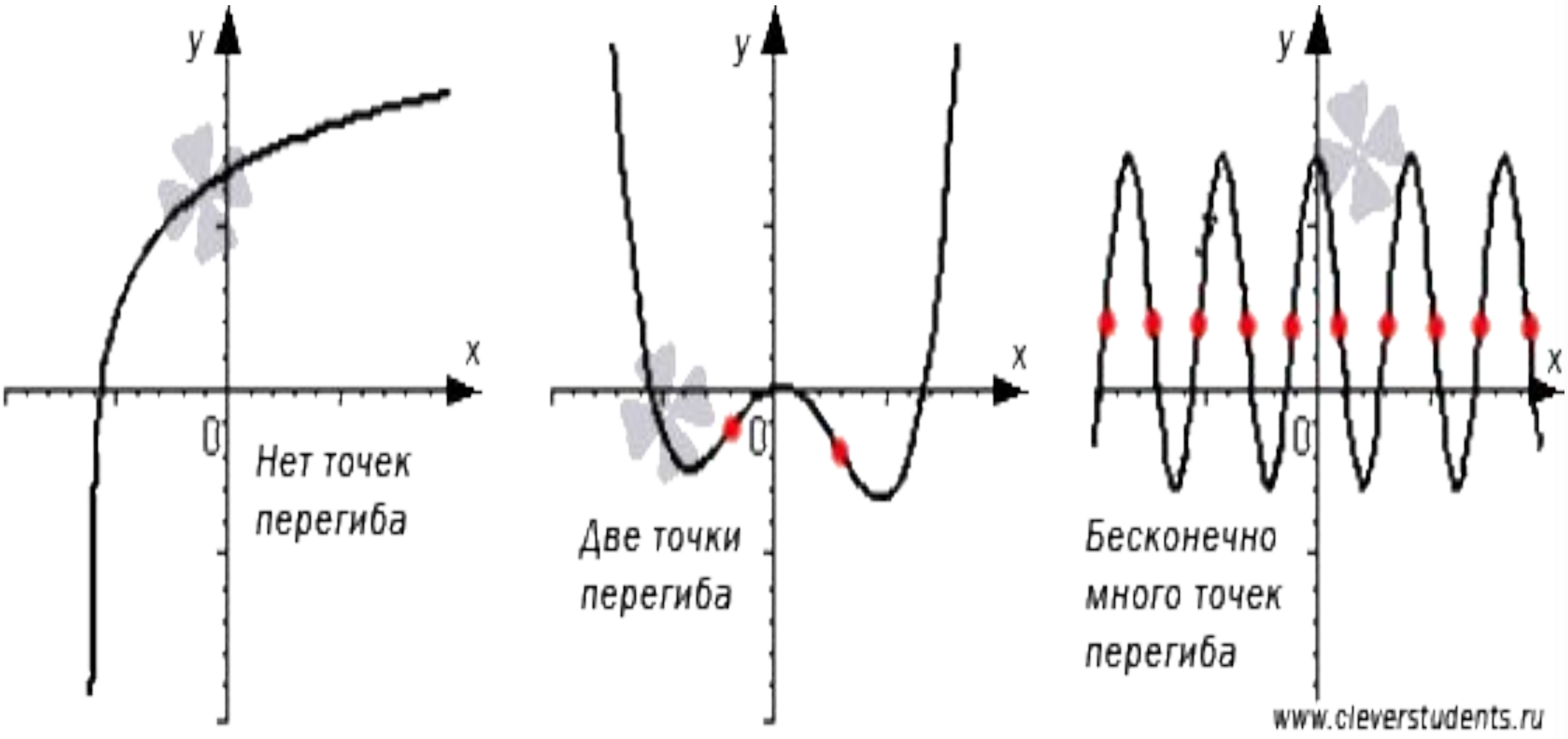
Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка $x = x_0$ разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то $x = x_0$ является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.


y
x
0
Нет точек
перегиба
y
x
0
Две точки
перегиба
y
x
0
Бесконечно
много точек
перегиба
www.cleverstudents.ru

Пример

Пример 3. Найти точки перегиба кривых:

а) $f(x)=6x^2-x^3$

Находим:

1) $f'(x)=12x-3x^2$
2) $f''(x)=12-6x$
3) $f''(x)=0$ $\quad x=2$ – *критическая точка*
4) *В промежутке* $-\infty<x<2$ $f''(x)>0$, *а в промежутке* $2<x<+\infty$ *имеем* $f''(x)<0$, *тогда при* $x=2$ *кривая имеет точку перегиба.*
5) *Найдем ординату этой точки:*
6) $f(2)=16$
7) *Следовательно,* $(2;16)$ – *точка перегиба.*

Пример

<u>Пример 3</u>. Найти точки перегиба кривых:

б) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^5} - 2$

1) *Находим:*

$$f'(x) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} \qquad f''(x) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

2) *f''(x)=0 x=0 – критическая точка, в которой вторая производная терпит разрыв.*
3) *В промежутке -∞<x<0 f''(x)<0, а в промежутке 0<x<+∞ имеем f''(x)>0, тогда при x=0 кривая имеет точку перегиба (0;-2).*

Домашнее задание: