

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Преподаватель:
доцент кафедры ИСУ, к.т.н.
Бушуева Марина Евгеньевна

РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР $m \times n$

Все элементы матрицы должны быть больше 0. Если это не так, то ко всем элементам можно прибавить такое число $L > 0$

$$L = r \cdot \max_{ij} |a_{ij}|, \quad r > 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

При этом цена игры возрастает на L

Пусть игрок ***P1*** применит свою оптимальную стратегию $X^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$
Тогда его выигрыш будет не менее V при любых действиях игрока ***P2***.

В частности, если игрок ***P2*** применит свою чистую стратегию B_j , то
выигрыш ***P1*** составит:

$$a_{1j}x_1^0 + a_{2j}x_2^0 + \dots + a_{mj}x_m^0 \geq V \quad j = (1, \dots, n)$$

Поделим это неравенство на V и обозначим $\frac{x_i^0}{V} = z_i \quad (i = 1, \dots, m)$

$$a_{1j}z_1 + a_{2j}z_2 + \dots + a_{mj}z_m \geq 1 \quad j = (1, \dots, n), \quad z_i \geq 0$$

ДОЛЖНО ВЫПОЛНЯТЬСЯ УСЛОВИЕ

$$\sum_{i=1}^m x_i^0 = 1$$

Поделим это выражение на V и в новых обозначениях запишем

$$z_1 + z_2 + \dots + z_m = \frac{1}{V}$$

Поскольку игрок ***P1*** стремиться к максимуму V , то целевая функция будет иметь вид:

$$f(z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \min$$

Задача (1) – задача линейного программирования

Решение задачи (1).

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i \geq 1 \quad (j = \overline{1, n}) \\ z_i \geq 0 \end{cases}$$

Тогда

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i^0}$$

$$x_i^0 = \frac{z_i^0}{\sum_{i=1}^m z_i^0} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Аналогичные рассуждения можно проделать для игрока **P2**:

Пусть он применяет оптимальную смешанную стратегию $Y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$

а игрок **P1** – чистую стратегию A_i ($i = 1, \dots, m$).

Тогда проигрыш игрока **P2** составит величину не более V :

$$a_{i1}y_1^0 + a_{i2}y_2^0 + \dots + a_{in}y_n^0 \leq V \quad (i = 1, \dots, m)$$

Разделим это неравенство на $V > 0$

$$\frac{y_j^0}{V} = w_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

получим

$$a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n \leq 1 \quad (i = 1, \dots, m), \quad w_j \geq 0$$

ДОЛЖНО ВЫПОЛНЯТЬСЯ УСЛОВИЕ

$$\sum_{j=1}^n y_j^0 = 1$$

Поделим это выражение на V и в новых обозначениях получим:

$$\sum_{j=1}^n w_j = \frac{1}{V}$$

Поскольку игрок **P_2** стремится минимизировать проигрыш

$V \rightarrow \min$

$$f(w_1, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \max$$

имеем задачу линейного программирования (2)

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \leq 1 \quad (j = \overline{1, n}) \\ w_j \geq 0 \end{cases}$$

решение задачи (2).

$$w^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0)$$

Тогда

$$y_j^0 = \frac{w_j^0}{\sum_{j=1}^n w_j^0} \quad (j = 1, \dots, n)$$

ПРИМЕР 14 ЗАДАЧА КОМПЛЕКТАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

Предполагается организовать ВЦ коллективного пользования, который может быть оснащен ЭВМ - 4х типов, на обработку будут приниматься данные, относящиеся к одному из 5 видов задач (календарное планирование, распределение ресурсов...) Процесс решения каждой задачи требует определенного времени, зависящего от типа ЭВМ. Расходы связанные с деятельностью ВЦ оплачивают заказчики в следующих размерах:

		виды задач				
Э В М		1	2	3	4	5
	1	200	400	600	400	700
	2	300	400	600	500	800
	3	400	500	600	500	800
	4	700	300	500	200	100

Определить, какими ЭВМ надо оснащать ВЦ, что бы обеспечить **max** прибыль и какие задачи надо решать, что бы иметь **min** убытки.

Решение

Игрок ***P1*** (организаторы ВЦ) имеет 4 стратегии комплектования ВЦ,

Игрок ***P2*** (пользователи ВЦ) имеет 5 стратегий выбора задач.

	<i>B1</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>
<i>A3</i>	400	500	800
<i>A4</i>	700	200	100

$$B_1 \quad 400p + 700(1-p) = Z$$

$$B_4 \quad 500p + 200(1-p) = Z$$

$$B_5 \quad 800p + 100(1-p) = Z$$

$$400p + 700(1-p) = 500p + 200(1-p)$$

$$p^* = \frac{5}{6}$$

$$X^0 = (0, 0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}) \quad V = 450$$

Пусть игрок **P2** применяет стратегию $(q, 1-q)$

$$Z = 400q + 500(1-q)$$

$$Z = 700q + 200(1-q)$$

	<i>B1</i>	<i>B4</i>
<i>A3</i>	400	500
<i>A4</i>	700	200

$$q^* = \frac{1}{2} \quad Y^0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Таким образом результат означает, что на ВЦ целесообразно устанавливать машины **3** и **4** типов в соотношении **5:1**. Заказчикам наиболее выгодны задачи **1** и **4** типов в равной степени и тогда доход будет не менее **450** усл.ед.

Запишем данную задачу как задачу линейного программирования

$$z_3 + z_4 \rightarrow \min$$

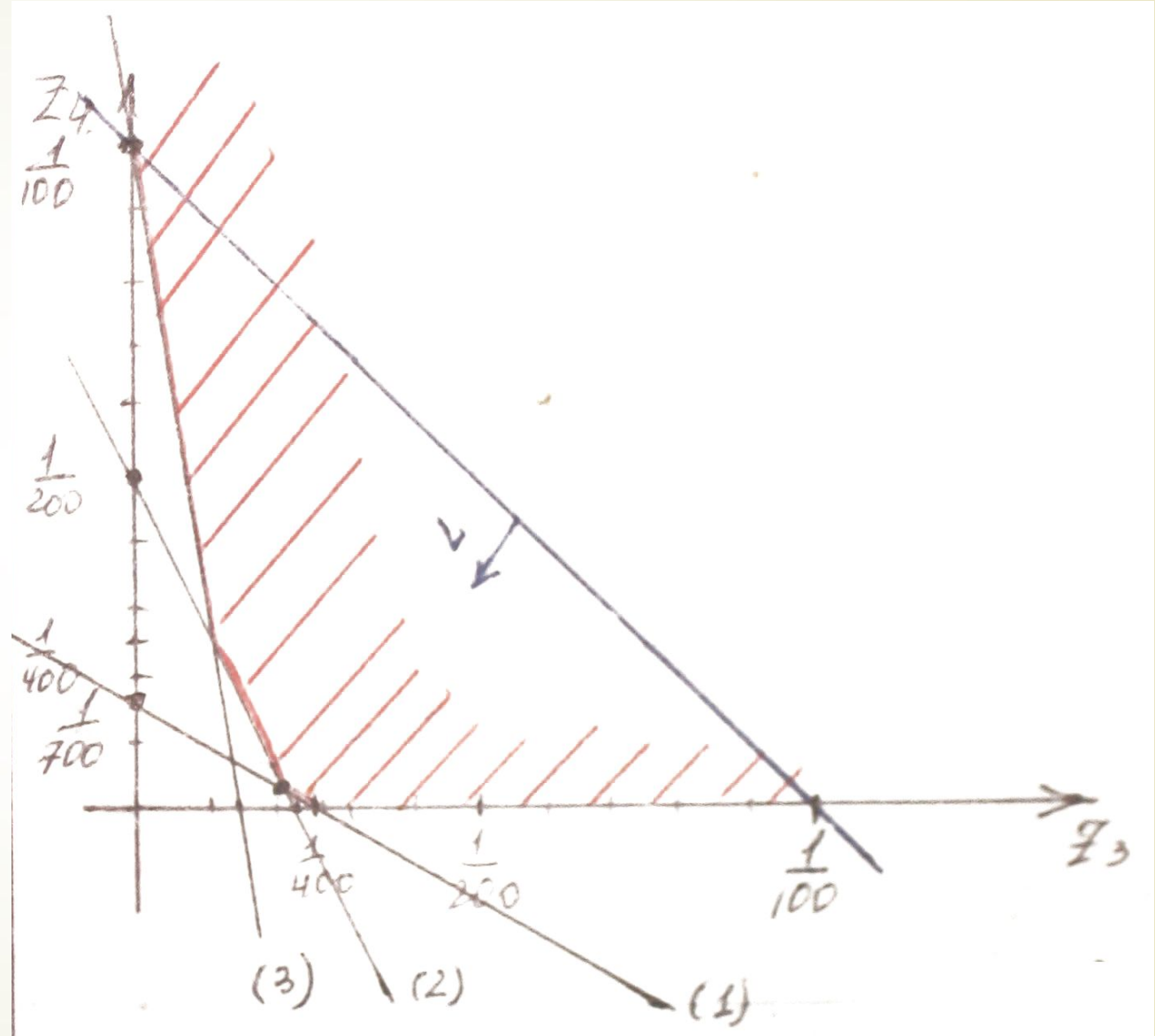
$$400z_3 + 700z_4 \geq 1$$

$$500z_3 + 200z_4 \geq 1$$

$$800z_3 + 100z_4 \geq 1$$

$$z_i \geq 0$$

$$z_3 = \frac{1}{540} \quad z_4 = \frac{1}{2700}$$




$$x_3^0 = \frac{z_3}{\sum_{i=3}^4 z_i} = \frac{450}{540} = \frac{5}{6}$$

$$x_4^0 = \frac{450}{2700} = \frac{1}{6}$$

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i} = \frac{1}{\frac{1}{2700} + \frac{1}{540}} = 450$$

Найдем стратегию игрока ***P2***, решая двойственную задачу:

$$w_1 + w_4 + w_5 \rightarrow \max$$

$$400w_1 + 500w_4 + 800w_5 \leq 1$$

$$700w_1 + 200w_4 + 100w_5 \leq 1$$

$$w_i \geq 0$$

$$\zeta_1 \sim w_1$$

$$\zeta_2 \sim w_2$$

$$\zeta_3 \sim w_3$$

$$z_3 \sim \eta_1$$

$$z_4 \sim \eta_2$$

В прямой задаче $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ (т.к. в пересечении прямых (1) и (2) находится решение)

$\zeta_3 \neq 0$, значит w_1, w_4 - базисные переменные, w_5 - свободная

Уравнений 2, базисных переменных 2 η_1, η_2 - свободные

Значит $w_5 = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 0$

$$\begin{cases} 400w_1 + 500w_4 = 1 \\ 700w_1 + 200w_4 = 1 \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{1}{900}; w_4 = \frac{1}{900}$$

$$y_1^0 = \frac{w_1}{w_1 + w_4} = \frac{1}{2}$$

$$y_4^0 = \frac{1}{2}$$

$$Y^0 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)$$

ЗАДАЧА. ВОЙНА АРМИЙ.

Две воюющие армии ведут борьбу за два пункта. Первая армия состоит из 3-х полков, вторая из 2-х. Армия, которая посылает больше полков в тот или иной город, занимает его и уничтожает все направленные в этот пункт силы противника, получая 1 очко за занятый пункт и по 1 очку за каждый уничтоженный полк противника. Найти оптимальную стратегию для обеих армий.

		P_2			
		(2, 0)	(0, 2)	(1, 1)	
P_1	(3, 0)	3	0	1	
	(0, 3)	0	3	1	
	(2, 1)	1	-1	2	
	(1, 2)	-1	1	2	

		P_2			
		(2, 0)	(0, 2)	(1, 1)	
P_1	(3, 0)	5	2	3	
	(0, 3)	2	5	3	
	(2, 1)	3	1	4	
	(1, 2)	1	3	4	

ДЛЯ ПЕРВОЙ АРМИИ

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \rightarrow \min$$

$$5z_1 + 2z_2 + 3z_3 + z_4 \geq 1$$

$$2z_1 + 5z_2 + 1z_3 + 3z_4 \geq 1$$

$$3z_3 + 3z_4 + 4z_3 + 4z_4 \geq 1$$

$$z_i \geq 0$$

ДЛЯ ВТОРОЙ АРМИИ

$$w_1 + w_2 + w_3 \rightarrow \max$$

$$5w_1 + 2w_2 + 3w_3 \leq 1$$

$$2w_1 + 5w_2 + 3w_3 \leq 1$$

$$3w_1 + w_2 + 4w_3 \leq 1$$

$$w_1 + 3w_2 + 4w_3 \leq 1$$

$$w_i \geq 0$$

$$\zeta_1 \sim w_1$$

$$\zeta_2 \sim w_4$$

$$\zeta_3 \sim w_5$$

$$z_1 \sim \eta_1$$

$$z_2 \sim \eta_2$$

$$z_3 \sim \eta_3$$

$$z_4 \sim \eta_4$$



	$\mathbf{b}$	η_1	η_4	η_2
w_1	1/16			
η_3	0			
w_3	3/16			
w_2	1/16			
$\mathbf{L}$	-5/16	-7/48	-1/16	-5/48

$$y_j^0 = \frac{w_j^0}{\sum_{j=1}^n w_j^0}$$

$$Y^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$V = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j} = 16/5$$

$$V = 16/5 - 2 = 6/5$$

ДЛЯ ПЕРВОЙ АРМИИ

	b	ζ_1	z_3	ζ_3	ζ_2
z_1	7/48				
z_4	1/16				
z_2	5/48				
L	5/6	-1/6	0	-3/16	-1/16

$$x_i^0 = \frac{z_i^0}{\sum_{i=1}^m z_i^0}$$

$$X^0 = \left(\frac{7}{15}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5} \right)$$