Транспортная задача

Дисциплина «Методы оптимальных решений»

Транспортная задача

- Имеется n пунктов отправления (ПО), в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве a_i единиц (i=1,2,…,n).
- Имеется m пунктов назначения (ПН), подавших заявки соответственно на b_j единиц груза (j=1,2,…,m).
- Сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad (1)$$

- Известна стоимость перевозок c_{ij} из i-го ПО в j-ый ПН за единицу груза.
- Считается, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их числу.
- Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была минимальной.

Транспортная задача

Построим модель задачи:

- Введем переменные x_{ij} - количество груза, перевозимого из i-го ПО в j-ый ПН. Всего план будет состоять из nxm элементов.
- Суммарное количество груза, перевозимого из i-го ПО во все ПН равно:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,n} \tag{2}$$

- Суммарное количество груза, доставляемого в j-ый ПН из всех ПО равно:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,m} \tag{3}$$

- Суммарная стоимость всех перевозок равна:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot c_{ij} \to \min \tag{4}$$

- причем

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m} \tag{5}$$

Виды транспортных задач

1) замкнутые (сбалансированные) – выполняется условие (1);

2) открытые (несбалансированные) – вместо условия (1) может быть:

а) $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$ т.е. спрос превышает предложение (дефицит товара), тогда задача приводится к замкнутому ввиду с помощью введения фиктивного ПО с номером n+1, для которого запасы

равны дефициту товара

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

а стоимость перевозок c_{n+1j} равна штрафу за единицу недопоставленного в j-ый ПН товара:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot c_{ij} + \sum_{j=1}^{m} c_{n+1j} y_j \to \min \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = a_{n+1} \quad y_j \ge 0$$

где y_j объемы недопоставленного товара.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + y_j = b_j \quad x_{ij} \ge 0$$

Виды транспортных задач

б) $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$, т.е. предложение превышает спрос (избыток товара), тогда задача приводится к замкнутому ввиду с помощью введения фиктивного ПН с номером m+1, для которого запросы равны избытку товара $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$ а стоимость перевозок c_{im+1} равна штрафу за единицу нереализованного в i-ом ПО товара:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot c_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_{im+1} y_i \to \min \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + y_i = a_i \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = b_{m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad x_{ij} \ge 0 \qquad y_i \ge 0$$

где y_i объемы нереализованного товара.

Транспортная таблица

Построим для замкнутой транспортной задачи транспортную таблицу:

ПН / ПО	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Опорное решение (опорный план) транспортной задачи можно находить разными способами:

- 1. *Методом северо-западного угла.*
- 2. *Методом минимальной стоимости*.
- 3. *Методом Фогеля*.

Метод северо-западного угла

Заполнение таблицы всегда начинается с верхней левой ячейки.

Например, задача имеет транспортную таблицу

ПН / ПО	200	180	100	120
200	10	2	4	1
250	3	5	9	6
150	8	7	3	4

Заполнение таблицы начинаем с пустой верхней левой ячейки, соответствующей тарифу на перевозки c_{11}=10. Так как первому ПН требуется 200 единиц груза, а первый ПО имеет ровно 200 единиц, то все эти 200 единиц отправляем в первый ПН, при этом в первом ПО ничего не останется и не может быть отправлено в другие пункты назначения; с остальных ПО в первый ПН тоже грузы отправляться не будут.

Метод северо-западного угла

Далее заполнение таблицы начинаем с ячейки, соответствующей $c_{22}=5$. Второму ПН требуется 180 единиц, которыми располагает второй ПО. Поэтому со второго ПО во второй ПН отправляем 180 единиц, тогда во втором ПО остается 250-180=70 единиц. Из других ПО во второй ПН перевозить грузы не будут.

Далее заполнение таблицы начинаем с ячейки, соответствующей $c_{23}=9$. Все оставшиеся 70 единиц груза на втором ПО могут полностью быть отправлены в третий ПН, которому требуется 100 единиц. Отправим эти 70 единиц, после этого во втором ПО ничего не останется, но третьему ПН еще не хватает 30 единиц.

Далее заполнение таблицы начинаем с ячейки, соответствующей $c_{33}=3$. Из третьего ПО в третий ПН отправляем недостающие 30 единиц, все остальные 150-30=120 единиц отправляем в четвертый ПН.

Получили опорное решение, которое можно записать в виде матрицы

$$X=\begin{pmatrix} 200 & - & - & - \\ - & 180 & 70 & - \\ - & - & 30 & 120 \end{pmatrix}$$

Суммарные затраты на перевозки будут равны:

$$Z=200\cdot 10+180\cdot 5+70\cdot 9+30\cdot 3+120\cdot 4=4100.$$

Метод минимальной стоимости

Заполнение таблицы всегда начинается с ячейки, имеющей наименьшую стоимость.

Например, применим этот метод для приведенной выше транспортной таблицы

ПН / ПО	200	180	100	120
200	10	2	4	1
250	3	5	9	6
150	8	7	3	4

Заполнение начинаем с ячейки, соответствующей $c_{14}=1$.

Далее заполняем ячейку, соответствующую $c_{12}=2$, затем $c_{21}=3$.

Далее $c_{33}=3$, $c_{22}=5$ и $c_{32}=7$.

Метод минимальной стоимости

Получили опорное решение, которое можно записать в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} - & 80 & - & 120 \\ 200 & 50 & - & - \\ - & 50 & 100 & - \end{pmatrix}$$

Суммарные затраты на перевозки будут равны:

$$Z = 80 \cdot 2 + 120 \cdot 1 + 200 \cdot 3 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 7 + 100 \cdot 3 = 1780.$$

3. ***Метод Фогеля***. Заполнение таблицы всегда начинается с ячейки, которая находится следующим образом: в каждой строке и каждом столбце определяют разность между наименьшей стоимостью и ближайшим к нему значением; в строке или столбце, которым соответствует наибольшая разность, выбирают клетку с наименьшей стоимостью.

Для нашего примера этот метод даст опорное решение совпадающее с решением, полученным методом наименьшей стоимости.

Метод потенциалов

- Если при решении транспортной задачи число заполненных клеток транспортной таблицы равно m+n-1, где m – число пунктов отправления (ПО), n – число пунктов назначения (ПН), то план перевозок называется *невырожденным.*
- Если это число меньше m+n-1, то план перевозок называется *вырожденным.*

Алгоритм метода потенциалов:

1. Найти опорный план решения задачи.
2. Проверить полученный план на *не вырожденность*, если план оказался вырожденным, то недостающее количество клеток формально заполняется нулями так, чтобы не образовался замкнутый цикл из заполненных клеток.
3. Проверить опорный план на оптимальность.
4. «Улучшение плана» - если полученный план был неоптимальным.

Метод потенциалов: критерий оптимальности

а) Запишем матрицу стоимости *C* и подчеркнем в ней те стоимости, которые соответствуют занятым клеткам в опорном решении,

б) Составим систему уравнений для подчеркнутых элементов матрицы *C*: $u_i+v_j=c_{ij}$, где i – номер строки; j – номер столбца; c_{ij} - это стоимость перевозок, выделенных в матрице *C*; u_i, v_j – потенциалы; эта система имеет m+n-1 уравнение и m+n – неизвестных потенциалов. Пусть, например, $u_1=0$, тогда все остальные потенциалы находятся из этой системы;

в) Построим оценочную матрицу Δ, элементы которой равны: $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$, где c_{ij} - все элементы матрицы *C*.

г) Если все $\Delta_{ij}\le 0$, то этот план оптимальный, иначе план не оптимальный.

Метод потенциалов: улучшение плана

а) построим матрицу *X*, соответствующую нашему опорному решению и отметим в ней элемент соответствующий максимальному положительному числу Δ_{ij};

б) построим по этому элементу цикл, так чтобы одна вершина цикла находилась в свободной клетке, а все остальные в занятых клетках, например:

$$\begin{array}{ccc} +a & - & b- \\ | & & | \\ -c & - & 0+ \end{array}$$

расставим чередующиеся знаки, выберем число $\lambda=\min\{b,c\}$ среди чисел, помеченных минусом;

в) число λ прибавим к элементам цикла матрицы X, отмеченным плюсом, и вычтем из элементов, помеченных минусом, остальные элементы матрицы не изменяются.

В результате получим новое опорное решение X_1.

Проверим его на оптимальность.

Метод потенциалов: пример 1

Проверим на оптимальность опорное решение транспортной задачи

ПН / ПО	200	180	100	120
200	10 -	2 80	4 -	1 120
250	3 200	5 50	9 -	6 -
150	8 -	7 50	3 100	4 -

которое можно записать в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} - & 80 & - & 120 \\ 200 & 50 & - & - \\ - & 50 & 100 & - \end{pmatrix}$$

Суммарные затраты на перевозки будут равны: z=1780.

Выпишем платежную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов: пример 1

Запишем систему уравнений для определения потенциалов и решим ее:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 2 & \textit{пусть} \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2 \\ u_1 + v_4 = 1 & v_4 = 1 \\ u_2 + v_1 = 3 & v_1 = 0 \\ u_2 + v_2 = 5 & u_2 = 3 \\ u_3 + v_2 = 7 & u_3 = 5 \\ u_3 + v_3 = 3 & v_3 = -2 \end{cases}$$

Построим оценочную матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0+0-10 & 0+2-2 & 0-2-4 & 0+1-1 \\ 3+0-3 & 3+2-5 & 3-2-9 & 3+1-6 \\ 5+0-8 & 5+2-7 & 5-2-3 & 5+1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов: пример 1

Матрица Δ содержит положительный элемент Δ_{34}=2, следовательно, решение X не является оптимальным и может быть улучшено.

Выделим в матрице X элемент, соответствующий элементу Δ_{34}=2,

$$X = \begin{pmatrix} - & 80 & - & 120 \\ 200 & 50 & - & - \\ - & 50 & 100 & x \end{pmatrix}$$

И построим по нему цикл пересчета

$$\begin{matrix} +80 & - & 120- \\ | & & | \\ -50 & - & 0+ \end{matrix}$$

Найдем λ=min{50;120}=50.

Построим новое опорное решение

$$X_1 = \begin{pmatrix} - & 80+50 & - & 120-50 \\ 200 & 50 & - & - \\ - & 50-50 & 100 & 0+50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & 130 & - & 70 \\ 200 & 50 & - & - \\ - & - & 100 & 50 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов: пример 1

Проверим его на оптимальность, используя метод потенциалов. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 2 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_2 = 5 \\ u_3 + v_3 = 3 \\ u_3 + v_4 = 4 \end{cases} \qquad \textit{пусть} \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_2 =$$

$$v_4 =$$

$$v_1 =$$

$$u_2 =$$

$$v_3 =$$

$$u_3 =$$

Построим оценочную матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0+0-10 & 0+2-2 & 0+0-4 & 0+1-1 \\ 3+0-3 & 3+2-5 & 3+0-9 & 3+1-6 \\ 3+0-8 & 3+2-7 & 3+0-3 & 3+1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ -5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Эта матрица не содержит положительных элементов и содержит ровно 6 отрицательных, поэтому решение X_1 является оптимальным и единственным. Суммарные затраты на перевозки составляют

$$X_1 = \begin{pmatrix} - & 130 & - & 70 \\ 200 & 50 & - & - \\ - & - & 100 & 50 \end{pmatrix}$$

z=

Метод потенциалов: пример 2

Закончим решение транспортной задачи

	50	10	20	20
30	5	6	1 20	2 10
50	3 10	1 10	5	2 30
20	8 20	4	2	5
20	6 20	5	2	4

Запишем решение X и матрицу стоимости C:

$$X = \begin{pmatrix} - & - & 20 & 10 \\ 10 & 10 & - & 30 \\ 20 & - & - & - \\ 20 & - & - & - \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов: пример 2

Решим систему

$$
\begin{array}{lll}
u_1 + v_3 = 1 & \textit{пусть}\; u_1 = 0 \Rightarrow & v_3 = 1 \\
u_1 + v_4 = 2 & & v_4 = 2 \\
u_2 + v_1 = 3 & & v_1 = 3 \\
u_2 + v_2 = 1 & & v_2 = 1 \\
u_2 + v_4 = 2 & u_2 = 0 & \\
u_3 + v_1 = 8 & u_3 = 5 & \\
u_4 + v_1 = 6 & u_4 = 3 &
\end{array}
$$

Построим оценочную матрицу

$$
\Delta = \begin{pmatrix} 0+3-5 & 0+1-6 & 0+1-1 & 0+2-2 \\ 0+3-3 & 0+1-1 & 0+1-5 & 0+2-2 \\ 5+3-8 & 5+1-4 & 5+1-2 & 5+2-5 \\ 3+3-6 & 3+1-5 & 3+1-2 & 3+2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

Она содержит положительные элементы, поэтому решение X не оптимально.

Метод потенциалов: пример 2

Отметим в матрице X элемент соответствующий наибольшему положительному элементу Δ_{33}=4 и построим цикл

$$X = \begin{pmatrix} - & - & 20 & 10 \\ 10 & 10 & - & 30 \\ 20 & - & x & - \\ 20 & - & - & - \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccccc} & & -20 & - & 10+ \\ & & | & & | \\ +10 & - & - & - & 30- \\ | & & | & & \\ -20 & - & 0+ & & \end{array}$$

Найдем λ=min{20,30,20}=20 и получим новое решение

$$X_1 = \begin{pmatrix} - & - & 20-20 & 10+20 \\ 10+20 & 10 & - & 30-20 \\ 20-20 & - & 0+20 & - \\ 20 & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - & 30 \\ 30 & 10 & - & 10 \\ - & - & 20 & - \\ 20 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Это решение является вырожденным.

Проверим его оптимальность.

Метод потенциалов: пример 2

Решим систему

$$u_1 + v_4 = 2 \quad \textit{пусть}\ u_1 = 0 \Rightarrow v_4 = 2$$
$$u_2 + v_1 = 3 \qquad v_1 = 3$$
$$u_2 + v_2 = 1 \qquad v_2 = 1$$
$$u_2 + v_4 = 2 \qquad u_2 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 2$$
$$u_4 + v_1 = 6 \qquad u_4 = 3$$

Из данной системы не можем определить u_3 b v_3, поэтому дополним систему еще одним уравнением, соответствующим нулевому элементу матрицы X_1 с номером (4,3):

$$u_1 + v_4 = 2 \quad \textit{пусть}\ u_1 = 0 \Rightarrow v_4 = 2$$
$$u_2 + v_1 = 3 \qquad v_1 = 3$$
$$u_2 + v_2 = 1 \qquad v_2 = 1$$
$$u_2 + v_4 = 2 \qquad u_2 = 0$$
$$u_3 + v_3 = 2 \qquad u_3 = 3$$
$$u_4 + v_1 = 6 \qquad u_4 = 3$$
$$u_4 + v_3 = 2 \qquad v_3 = -1$$

Метод потенциалов: пример 2

Построим оценочную матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0+3-5 & 0+1-6 & 0-1-1 & 0+2-2 \\ 0+3-3 & 0+1-1 & 0-1-5 & 0+2-2 \\ 3+3-8 & 3+1-4 & 3-1-2 & 3+2-5 \\ 3+3-6 & 3+1-5 & 3-1-2 & 3+2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Она содержит положительный элемент Δ_{44}=1. Отметим в матрице X_1 элемент, соответствующий ему и построим цикл пересчета.

$$X_1 = \begin{pmatrix} - & - & - & 30 \\ 30 & 10 & - & 10 \\ - & - & 20 & - \\ 20 & - & - & x \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} +30 & - & 10- \\ | & & | \\ -20 & - & 0+ \end{matrix}$$

Найдем λ=min{20,10}=10 и получим новое решение

$$X_2 = \begin{pmatrix} - & - & - & 30 \\ 30+10 & 10 & - & 10-10 \\ - & - & 20 & - \\ 20-10 & - & - & 0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - & 30 \\ 40 & 10 & - & - \\ - & - & 20 & - \\ 10 & - & - & 10 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов: пример 2

Это решение является вырожденным. Проверим его оптимальность. Решим систему

$$
\begin{array}{lll}
u_1 + v_4 = 2 & \text{пусть } u_1 = 0 \Rightarrow v_4 = 2 & \\
u_2 + v_1 = 3 & u_2 = -1 & \\
u_2 + v_2 = 1 & & v_2 = 2 \\
u_3 + v_3 = 2 & & \\
u_4 + v_1 = 6 & & v_1 = 4 \\
u_4 + v_4 = 4 & u_4 = 2 &
\end{array}
$$

Из данной системы не можем определить u_3 b v_3, поэтому дополним систему еще одним уравнением, соответствующим нулевому элементу матрицы X_1 с номером (4,3):

$$
\begin{array}{lll}
u_1 + v_4 = 2 & \text{пусть } u_1 = 0 \Rightarrow v_4 = 2 & \\
u_2 + v_1 = 3 & u_2 = -1 & \\
u_2 + v_2 = 1 & & v_2 = 2 \\
u_3 + v_3 = 2 & u_3 = 2 & \\
u_4 + v_1 = 6 & & v_1 = 4 \\
u_4 + v_4 = 4 & u_4 = 2 & \\
u_4 + v_3 = 2 & & v_3 = 0
\end{array}
$$

Метод потенциалов: пример 2

Оценочная матрица примет вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0+4-5 & 0+2-6 & 0+0-1 & 0+2-2 \\ -1+4-3 & -1+2-1 & -1+0-5 & -1+2-2 \\ 2+4-8 & 2+2-4 & 2+0-2 & 2+2-5 \\ 2+4-6 & 2+2-5 & 2+0-2 & 2+2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как в этой матрице нет положительных элементов, то решение X_2 оптимально и ему соответствует значение

Z=

$$X_2 = \begin{pmatrix} - & - & - & 30 \\ 40 & 10 & - & - \\ - & - & 20 & - \\ 10 & - & - & 10 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Тестовые вопросы

1. Среди следующих транспортных задач **закрытыми** являются

1)

	22	35	41	20
31	10	7	6	8
49	5	6	5	4
38	8	7	6	7

2)

	22	34	41	20
31	10	7	6	8
48	5	6	5	4
39	8	7	6	7

3)

	25	33	41	20
31	10	7	6	8
50	5	6	5	4
38	8	7	6	7

Тестовые вопросы

2. Транспортная задача будет закрытой, если …

	50	60+b	200
100+a	7	2	4
200	3	5	6

1) a=45, b=40
2) a=45, b=35
3) a=45, b=25
4) a=45, b=30

3. Транспортная задача будет закрытой, если …

	50	60+b	200
100+a	7	2	4
200	3	5	6

1) a=50, b=40
2) a=50, b=50
3) a=50, b=20
4) a=50, b=30

Тестовые вопросы

4. Суммарные затраты на перевозку для опорного плана, содержащегося в транспортной таблице равны ________

	22	35	41	20
31	10 22	7 9	6 -	8 -
49	5 -	6 26	5 23	4 -
38	8 -	7 -	6 18	7 20

5. Суммарные затраты на перевозку для опорного плана, содержащегося в транспортной таблице равны ______

	22	34	40	21
31	10 -	7 -	6 10	8 21
48	5 22	6 26	5 -	4 -
38	8 -	7 8	6 30	7 -

Тестовые вопросы

6. Найти опорный план транспортной задачи, составленный методом северо-западного угла.

	22	35	41	20
31	10	7	6	8
49	5	6	5	4
38	8	7	6	7

Тестовые вопросы

7. Найти опорный план транспортной задачи, составленный методом наименьшей стоимости

	22	35	41	20
31	10	7	6	8
49	5	6	5	4
38	8	7	6	7

Домашнее задание

Решить транспортные задачи:

1.

	60	60	50
50	2	3	2
70	2	4	5
60	6	5	7

2.

	50	50	40	60
30	5	4	6	3
70	4	5	5	8
70	7	3	4	7