Модели эндогенного роста

Матершева В.В.

Воронеж 2015

Критика модели Солоу.

экзогенность задания ключевых параметров экономического роста (норма сбережений, темп роста технологического прогресса, который Солоу задает через темп роста эффективности единицы труда);

непостижимость феномена НТП;

сомнительную адекватность модели при проверке ее выводов.

Аналитика.

Пусть экономика описывается производственной функцией Кобба-Дугласа вида:

$$Y = AK^{\alpha} L^{(1-\alpha)},\ \text{где}\ (0 < \alpha < 1)$$

У неоклассиков реальная ставка процента – это разница между предельной производительностью капитала и нормой амортизации:

$$r = MPK - \delta = \alpha A \left(\frac{K}{L} \right)^{-(1-\alpha)} - \delta$$

Аналитика.

$$\frac{Y_{США}}{Y_{Япония}} = \frac{K^{\alpha}_{США}}{K^{\alpha}_{Япония}} = 5$$

где Y-выпуск, а K-запас капитала.

Отсюда $K_{США} = 5^{(\frac{1}{\alpha})} K_{Япония}$

Отсюда $\frac{r_{Япония} + \delta}{r_{США} + \delta} = \frac{K^{(1-\alpha)}_{США}}{K^{(1-\alpha)}_{Япония}} = 5^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}$

Таким образом

$$r_{Япония} = 5^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \left(r_{США} + \delta \right) - \delta$$

При расчетных значениях α=0,3 и δ=0,1 с исторической ставкой в США $r_{США}$=6,5%, оценка $r_{Япония}$=400% далека от реальности

Направления развития моделей.

Расширение понятия капитала и увеличение параметра α.

Эндогенизация НТП, т.е. определение g.

Модель Лукаса.

Пусть выпуск описывается функцией Кобба-Дугласа вида:

$$Y = \overline{A} K_t^{\alpha} (L H_t)^{(1-\alpha)}, \text{ где } (0 < \alpha < 1)$$

$\overline{A}$ – технологический параметр, $\overline{A} > 0$

H_t – уровень человеческого капитала, которым обладает типичный представитель рабочей силы в момент времени *t.* По аналогии с моделью Солоу эффективность труда измеряется уровнем человеческого капитала.

Инвестиции в момент t.

$$I_t = I_t^k + I_t^h$$

$$\Delta K = I^k - \delta K$$

$$\Delta H = I^h - \delta H$$

Производственная функция модели Лукаса.

MPK = MPH

$$\alpha \overline{A}\left(\frac{LH_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\overline{A}\left(\frac{K_t}{LH_t}\right)^{\alpha} L$$

Отсюда

$$\frac{H_t}{K_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Тогда производственная функция имеет вид:

$$Y = AK$$

где

$$A = \overline{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} L^{1-\alpha}$$

Допущения модели.

1. постоянная предельная производительность капитала

2. выпуск на душу населения можно представить в виде:

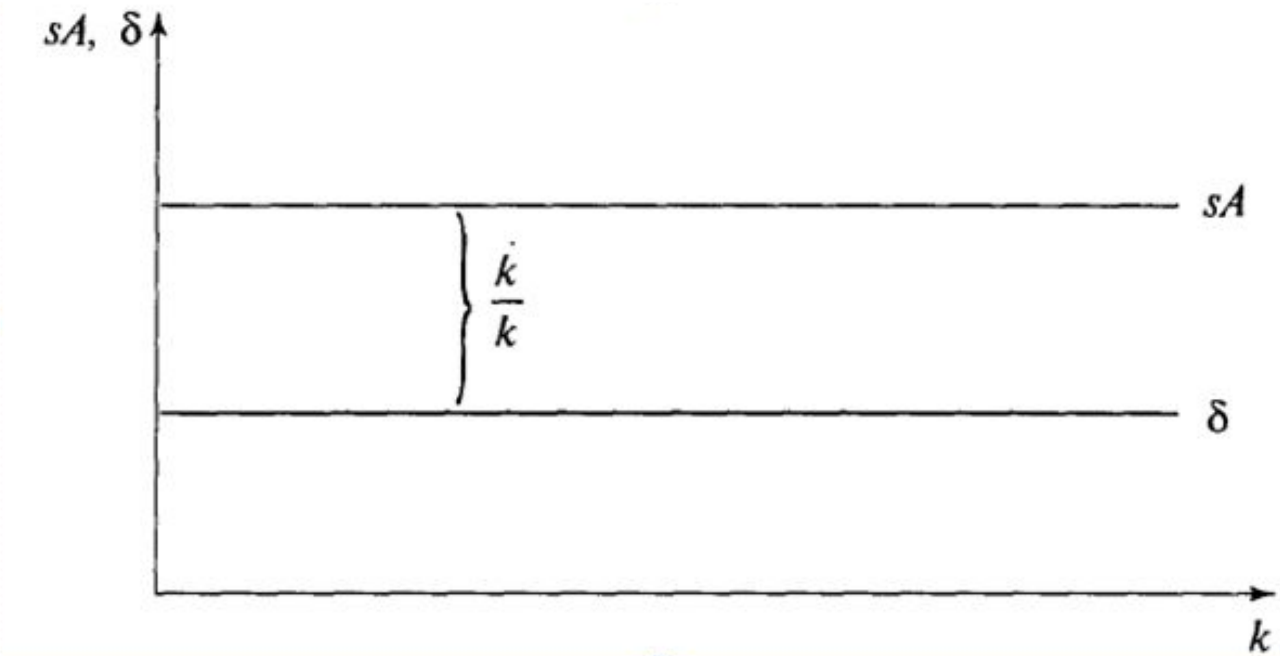
$$k = i - \delta k = sAk - \delta k$$

3. темп роста капиталовооруженности равен:

$$\frac{\Delta k}{k} = s\frac{f(k)}{k} - \delta = sA - \delta$$

4. не рассматриваются темпы роста технологического прогресса и роста населения.

Темпы роста капиталовооруженности в модели АК.



Модель АК.

Поскольку $Y = Ak$, а потребление $c = (1 - s)\, y$, то, очевидно, что темпы роста производительности труда, потребления на одного работающего и капиталовооруженности совпадают.

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta k}{k} = sA - \delta$$

Условие означает, что если та часть капиталоотдачи, которая идет на накопление капитала, превышает норму выбытия, то в экономике будет наблюдаться устойчивый экономический рост.

Модифицированная модель АК.

$$Y = F(K, L) = AK + BK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

где выполняется условие

$$\frac{\Delta k}{k} = s\,\frac{f(k)}{k} - \delta = sA + s\,\frac{B}{k^{1-\alpha}} - \delta$$

в расчете на душу населения:

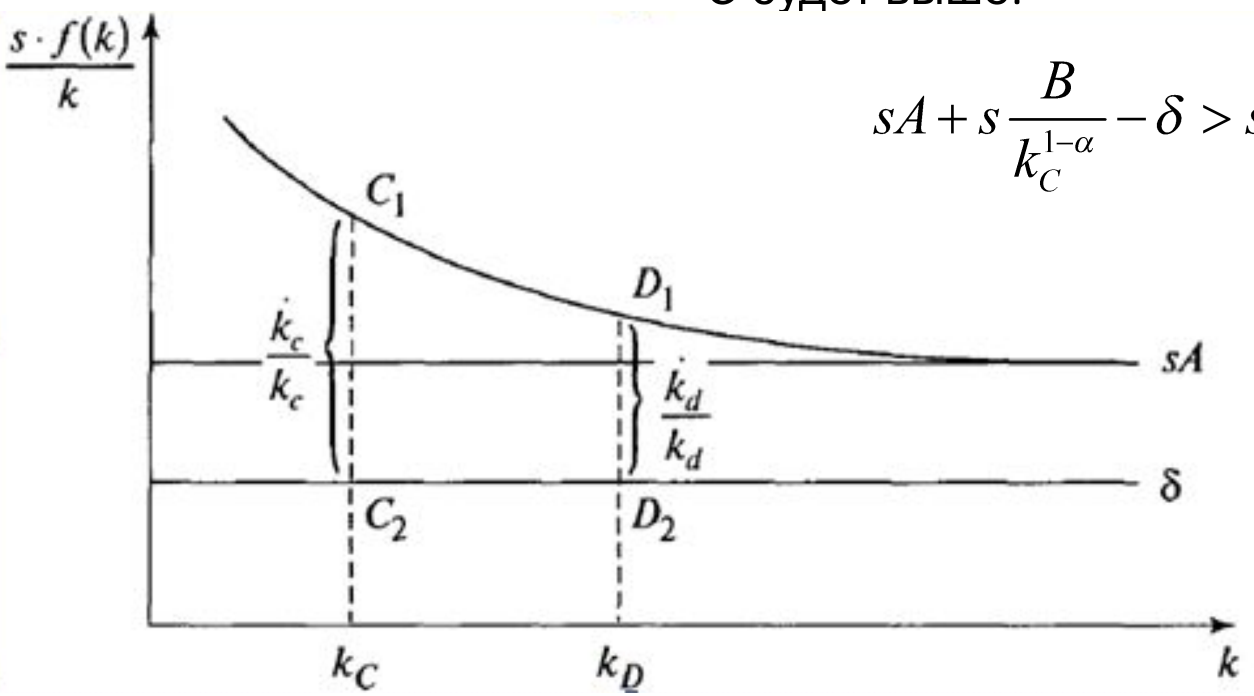
$$y = f(k) = Ak + Bk^{\alpha}$$

Темпы роста капиталовооруженности в модифицированной модели АК в двух странах.

Пусть в двух странах *C* и *D* производственная функция и все параметры совпадают, но в стране *C* первоначальный уровень капиталовооруженности ниже $(k_C<k_D)$.

По мере накопления капитала темпы роста падают, и в конце концов страны приближаются к одинаковому устойчивому уровню. Однако первоначально темп роста в *C* будет выше:

$$sA+s\frac{B}{k_C^{1-\alpha}}-\delta > sA+s\frac{B}{k_D^{1-\alpha}}-\delta$$



Производственная функция в модели Ромера.

$$\tilde{Y}_t = \tilde{K}_t^{\alpha} \tilde{L}_t^{1-\alpha} \tilde{A}_t^{\beta}$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$

$\tilde{Y}, \tilde{K}, \tilde{L}$ - соответственно выпуск, капитал и трудовые ресурсы репрезентативной фирмы в момент времени *t*

A - уровень технологии в экономике, растет с ростом общего уровня знаний

Модель Ромера.

Пусть в экономике N подобных фирм. Тогда $K_t = N\tilde{K}_t$, $L_t = N\tilde{L}_t$.

Тогда выпуск описывается производственной функцией:

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} K_t^{\beta}$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$

Т.к. , $\alpha + (1-\alpha) + \beta = 1 + \beta > 1$

в экономике наблюдается возрастающая отдача от масштаба

Модель Ромера.

В результате аналитических выводов получим, что в устойчивом состоянии темп роста капитала равен:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{(1-\alpha)n}{1-\alpha-\beta}$$

Рост будет экзогенный, если числитель и знаменатель в правой части не равны 0. Тогда в устойчивом состоянии рост обеспечивается за счет роста населения. Темпы роста будут стремиться к бесконечности при $n > 0$ и $\beta = 1-\alpha$, а также при $\alpha + \beta > 1$.

Единственная возможность для эндогенного роста остается в случае, если $n = 0$ и $\beta = 1-\alpha$.

Тогда темпы постоянного роста зависят от нормы сбережений и постоянной численности населения:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{sK^{\alpha}L^{1-\alpha} - \delta K}{K} = sL^{1-\alpha} - \delta$$

Модель растущего разнообразия товаров.

Производственная функция имеет вид:

$$Y_t = A\left[\int_0^{m_t}\left(x_t^i\right)^{\alpha}di\right]L^{1-\alpha}$$

где $0 < \alpha < 1$.

x_t^i - затраты *i*-го промежуточного продукта в момент времени *t*

m_t - количество затрачиваемых промежуточных продуктов для производства выпуска в момент времени *t*

A - уровень технологии

Или вид: $$Y_t = \overline{A}m_tL$$

где $$\overline{A} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

γ - издержки на единицы товара

Инвестиции в модели.

$$I_t = sY_t$$
$$I_t = (m_{t+1} - m_t)\varphi + \gamma x m_t$$

Темп экономического роста.

Темпы роста в экономике совпадают с темпом роста количества промежуточных продуктов

$$\frac{Y_{t+1}}{Y} = \frac{m_{t+1}}{m_t} = 1 + \frac{\bar{A}L}{\varphi}(s - \alpha^2)$$

Откуда темп экономического роста равен:

$$\frac{AL}{\varphi}(s - \alpha^2)$$

В случае $s > \alpha^2$ наблюдается устойчивый экономический рост. Темп роста тем выше, чем выше норма сбережений, чем ниже уровень издержек φ, необходимых для осуществления исследований и разработок по вводу нового продукта, а также чем ниже издержки производства уже существующих γ.

Модель ступенек качества.

Производственная функция:

$$Y_t = A\left[\int_0^1 \lambda_{ti}^{1-\alpha}(x_t^i)di\right]L^{1-\alpha}$$

где $\lambda_{ti}^{1-\alpha}$ - уровень качества *i*-го товара в момент времени *t*

Если предположить, что качество всех товаров стремится к одному уровню производственная функция примет вид:

$$Y_t = \overline{A}\lambda_t L$$

где $\overline{A} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Инвестиции в модели.

$$I_t = sY_t$$

$$I_t = I_{tr} + \gamma x$$

где I_{tr} - ресурсы, необходимые для изобретения и производства *i*-го товара.

Темп экономического роста.

Темпы экономического роста равны темпам роста качества товаров и совпадают с темпами роста выпуска в модели растущего разнообразия товаров:

$$\frac{Y_{t+1}}{Y} = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = 1 + \frac{\overline{A}L}{\varphi}(s - \alpha^2)$$

Откуда темп экономического роста равен:

$$\frac{\overline{A}L}{\varphi}(s - \alpha^2)$$

Модель заимствования технологий.

Производственная функция:

$$Y_t = A\left[\int_0^{m_t} \left(x_t^i\right)^{\alpha} di\right] L^{1-\alpha}$$

Если предположить, что все промежуточные продукты импортируются по одинаковой цене *p*.

Производственная функция примет вид:

$$Y_t = \overline{A} m_t L p^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

где

$$\overline{A} = \cdot A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Инвестиции в модели.

$$I_t = (m_{t+1} - m_t)\varphi L$$

φ - издержки обучения одного работника

$$m_{t+1} = m_t + \frac{I_t}{\varphi L}$$

I_t - инвестиции, связанные с заимствованием технологии

Темп экономического роста.

Если сберегается постоянная часть выпуска *s*, то темп роста выпуска будет:

$$\frac{Y_{t+1}}{Y} = \frac{m_{t+1}}{m_t} = 1 + \frac{s\bar{A}p^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\varphi}$$

Откуда темп экономического роста равен:

$$\frac{s\bar{A}p^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\varphi}$$

Достоинство моделей.

Выделены новые детерминанты роста, связанные с решениями фирм по поводу нововведений.

Это, прежде всего:

1. издержки, связанные с производством единицы промежуточного продукта,
2. издержки ресурсов в процессе НИОКР,
3. издержки обучения работника использованию в процессе производства нового товара,
4. цены на импортируемые промежуточные продукты