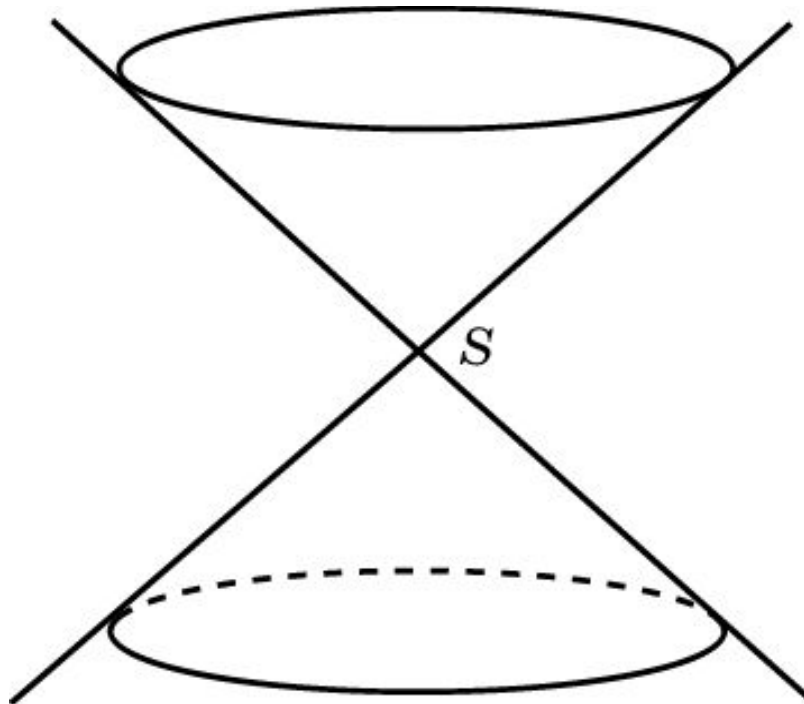


# КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

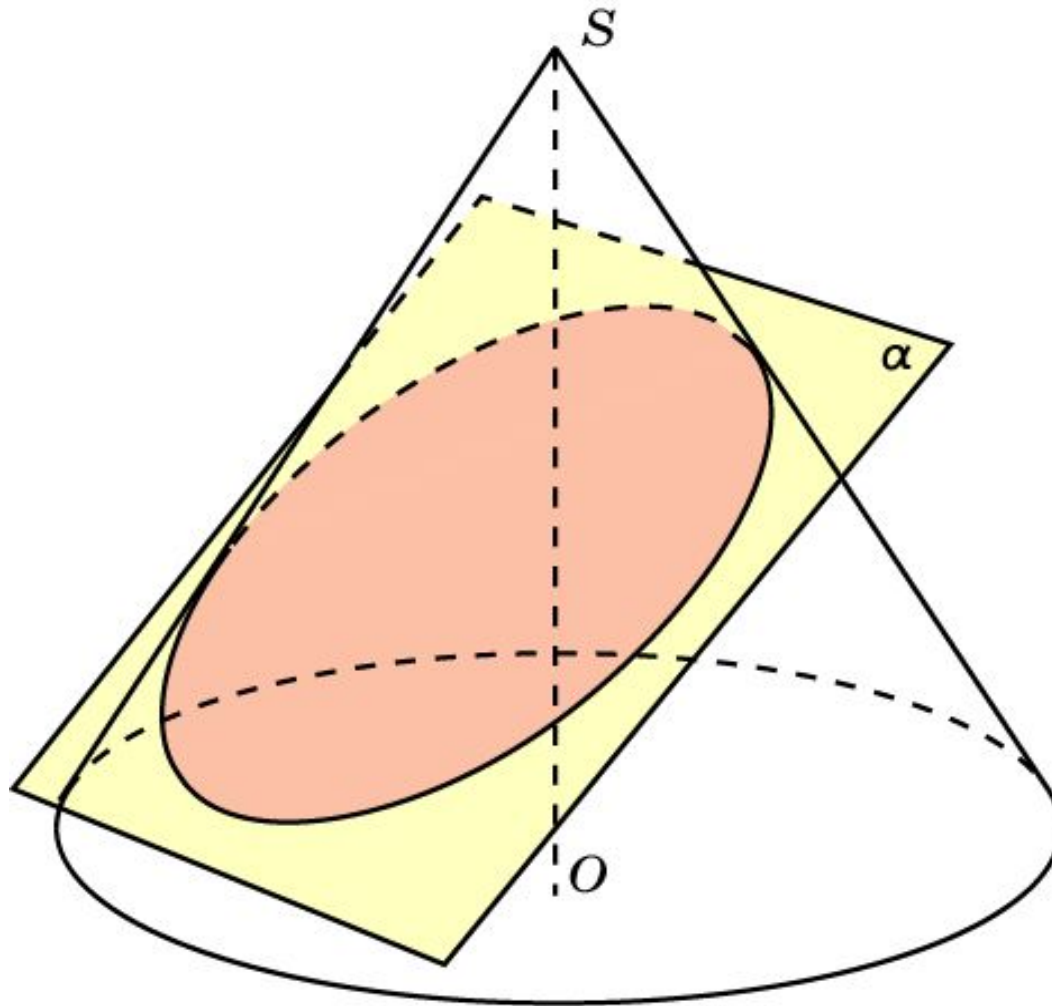
Для данного конуса рассмотрим коническую поверхность, образованную прямыми, проходящими через вершину конуса и точки окружности основания конуса.

Сечения конической поверхности плоскостью можно рассматривать как центральную проекцию окружности основания конуса на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания и не проходит через вершину конуса, то в сечении конической поверхности получается окружность.



# Теорема 1

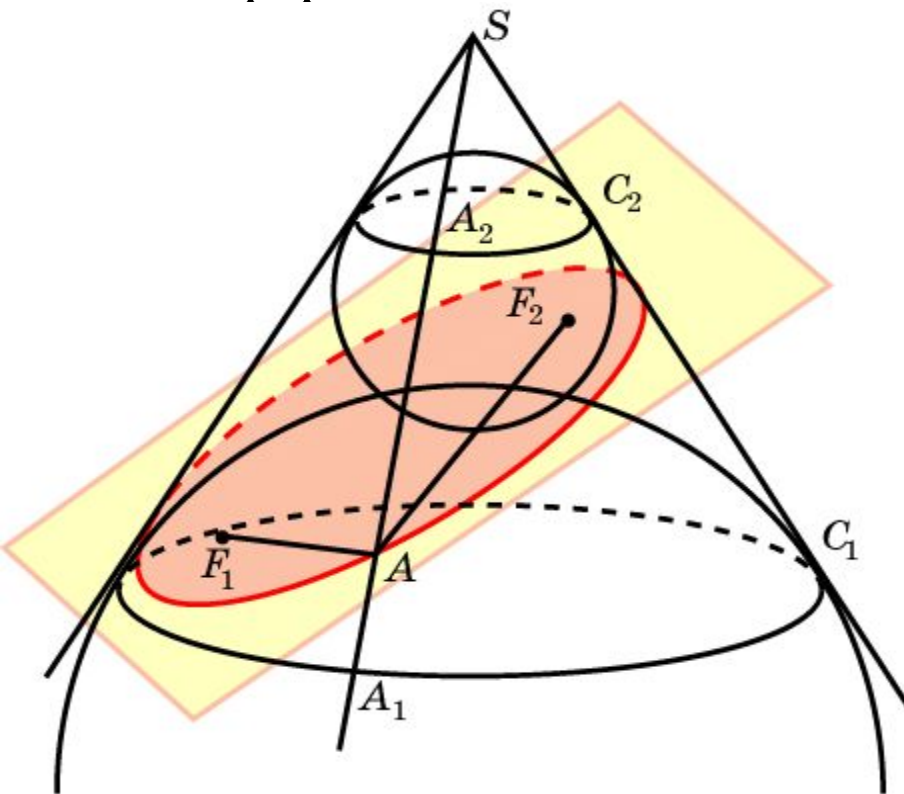
Если плоскость образует с осью конуса угол, больший, чем угол между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается эллипс.



## Доказательство

Впишем в коническую поверхность две сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках  $F_1$ ,  $F_2$  и конической поверхности по окружностям  $C_1$  и  $C_2$  соответственно.

Пусть  $A$  – произвольная точка сечения. Проведем образующую  $AS$  и обозначим через  $A_1$ ,  $A_2$  точки ее пересечения с окружностями  $C_1$ ,  $C_2$  соответственно. Заметим, что прямая  $AS$  является касательной к обеим сферам.

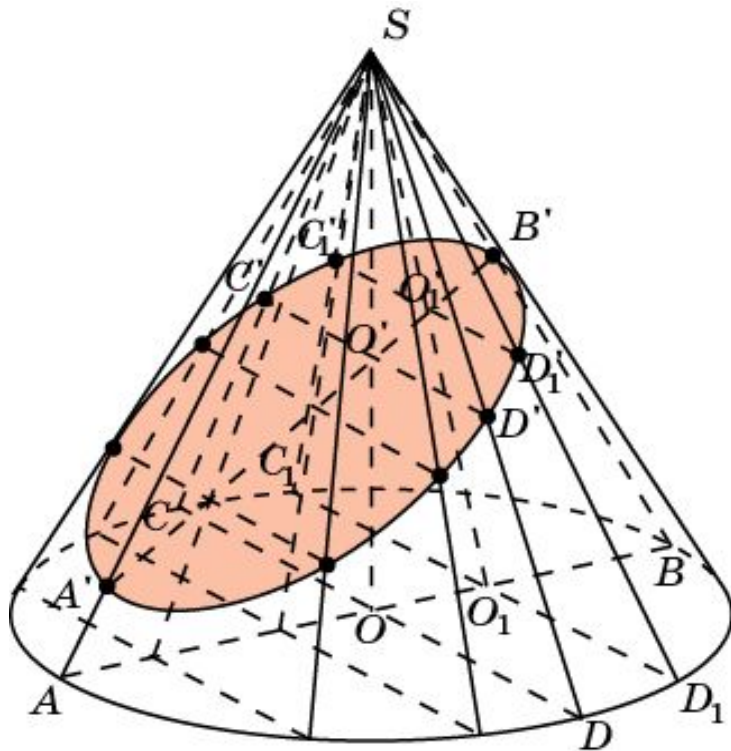


Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда  $AF_1 = AA_1$ ,  $AF_2 = AA_2$ . Поэтому  $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$ . Но длина отрезка  $A_1A_2$  не зависит от выбора точки  $A$  сечения. Она равна образующей соответствующего усеченного конуса. Поэтому сумма расстояний от точки  $A$  до точек  $F_1$ ,  $F_2$  будет постоянной.

# Построение сечение конуса (эллипс)

В эллипсе, изображающем основание конуса, проведем сопряженные диаметры  $AB$  и  $CD$ .

На образующих  $SA$  и  $SB$  выберем какие-нибудь точки  $A'$  и  $B'$ . Точку пересечения  $A'B'$  и  $SO$  обозначим  $O'$ . Через нее проведем прямую, параллельную  $CD$  и ее точки пересечения с  $SC$  и  $SD$  обозначим  $C'$  и  $D'$  соответственно. Они будут принадлежать искомому сечению.



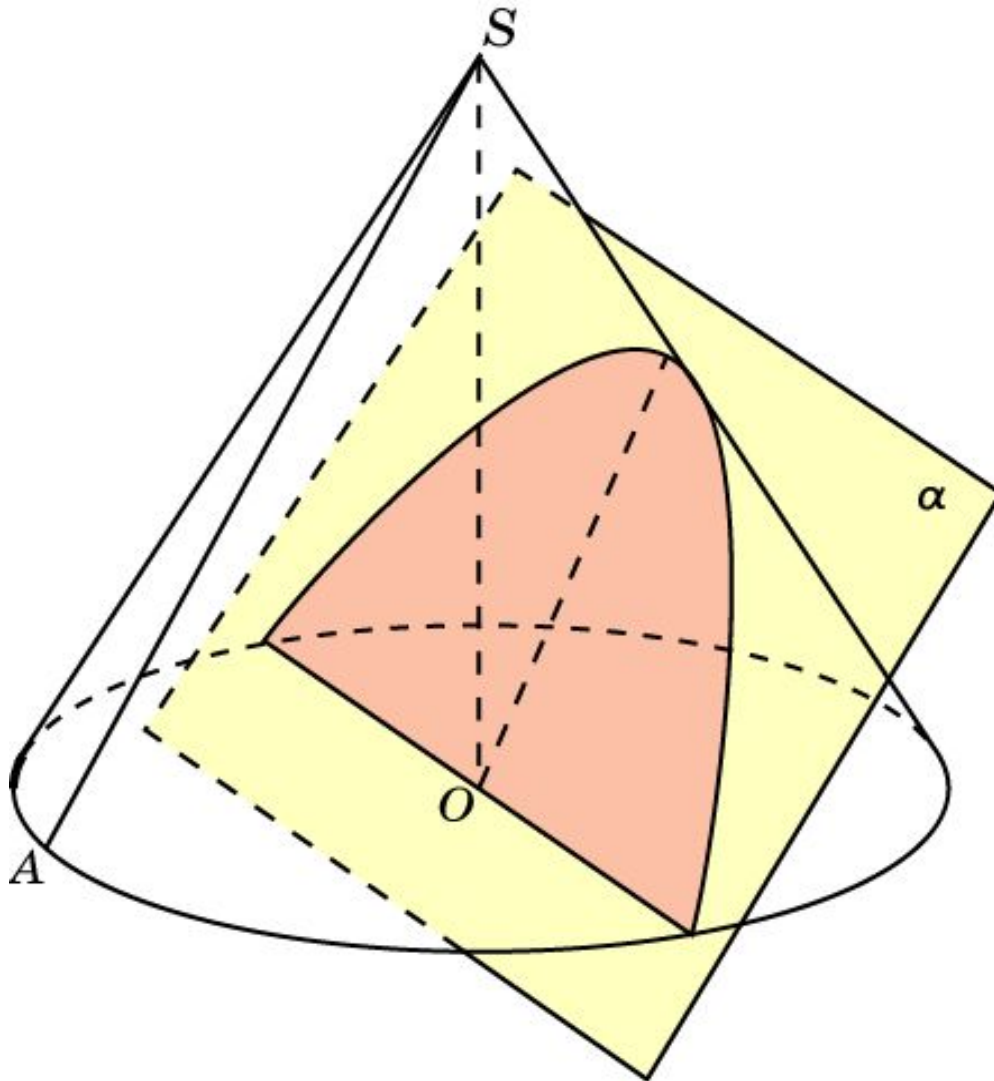
Проведем хорду  $C_1D_1$ , параллельную  $CD$ , и точку  $O_1$  ее пересечения с  $AB$  соединим с  $S$ . Точку пересечения  $SO_1$  и  $A'B'$  обозначим  $O_1$ . Через точку  $O_1$  проведем прямую, параллельную  $C_1D_1$  и ее точки пересечения с  $SC_1$  и  $SD_1$  обозначим  $C'_1$  и  $D'_1$ , соответственно. Они будут принадлежать искомому сечению.

Аналогичным образом построим несколько других точек.

Соединяя их плавной кривой, получим искомое сечение.

## Теорема 2

Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается парабола.

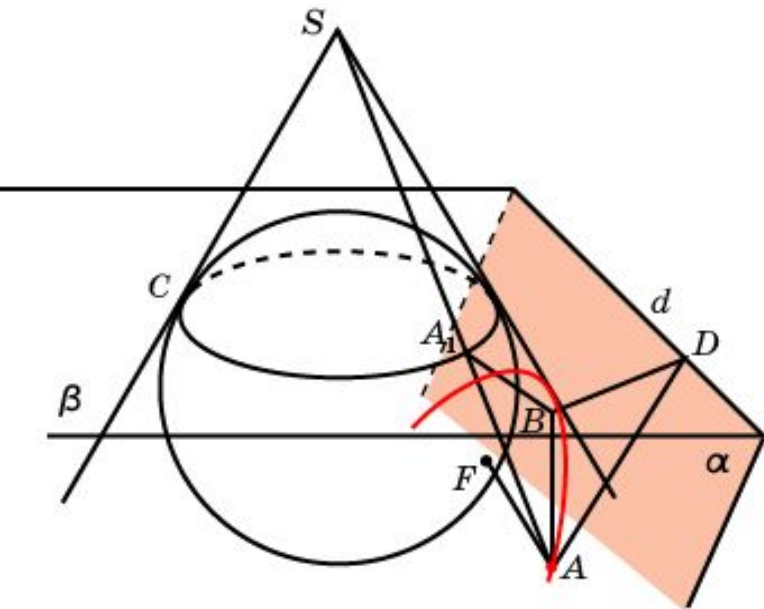


# Доказательство

Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости  $\alpha$  в некоторой точке  $F$  и конической поверхности по окружности  $C$ , лежащей в плоскости  $\beta$ , перпендикулярной оси. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  образуют между собой угол  $90^\circ - \varphi$  и пересекаются по некоторой прямой  $d$ .

Пусть  $A$  - произвольная точка сечения. Проведем образующую  $AS$  и обозначим через  $A_1$  точку ее пересечения с окружностью  $C$ . Заметим, что прямая  $AS$  является касательной к сфере. Прямая  $AF$  также является касательной. Отрезки  $AF$  и  $AA_1$  равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки. Опустим из точки  $A$  перпендикуляр  $AB$  на плоскость  $\beta$  и перпендикуляр  $AD$  на прямую  $d$ .

Угол  $A_1AB$  равен  $\varphi$ . Угол  $ADB$  является углом между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  и поэтому равен  $90^\circ - \varphi$ . Следовательно, угол  $BAD$  равен  $\varphi$ . Прямоугольные треугольники  $ABA_1$  и  $ABD$  равны, так как имеют общий катет и соответственно равные углы. Поэтому  $AA_1 = AD$ . Окончательно получаем равенство  $AF = AD$ , которое означает, что расстояние от произвольной точки сечения до точки  $F$  равно расстоянию от этой точки до прямой  $d$ , т. е. сечением конической поверхности в этом случае является парабола.

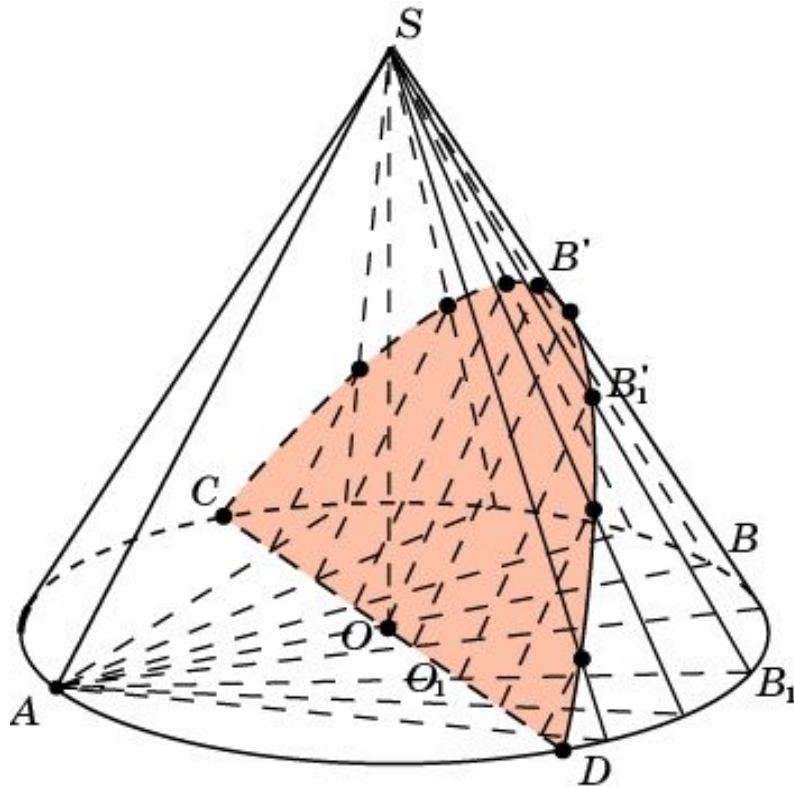




# Построение сечение конуса (парабола)

В эллипсе, изображающем основание конуса, проведем сопряженные диаметры  $AB$  и  $CD$ .

Через точку  $O$  проведем прямую, параллельную  $SA$  и ее точку пересечения с  $SB$  обозначим  $B'$ . Она будет принадлежать искомому сечению.

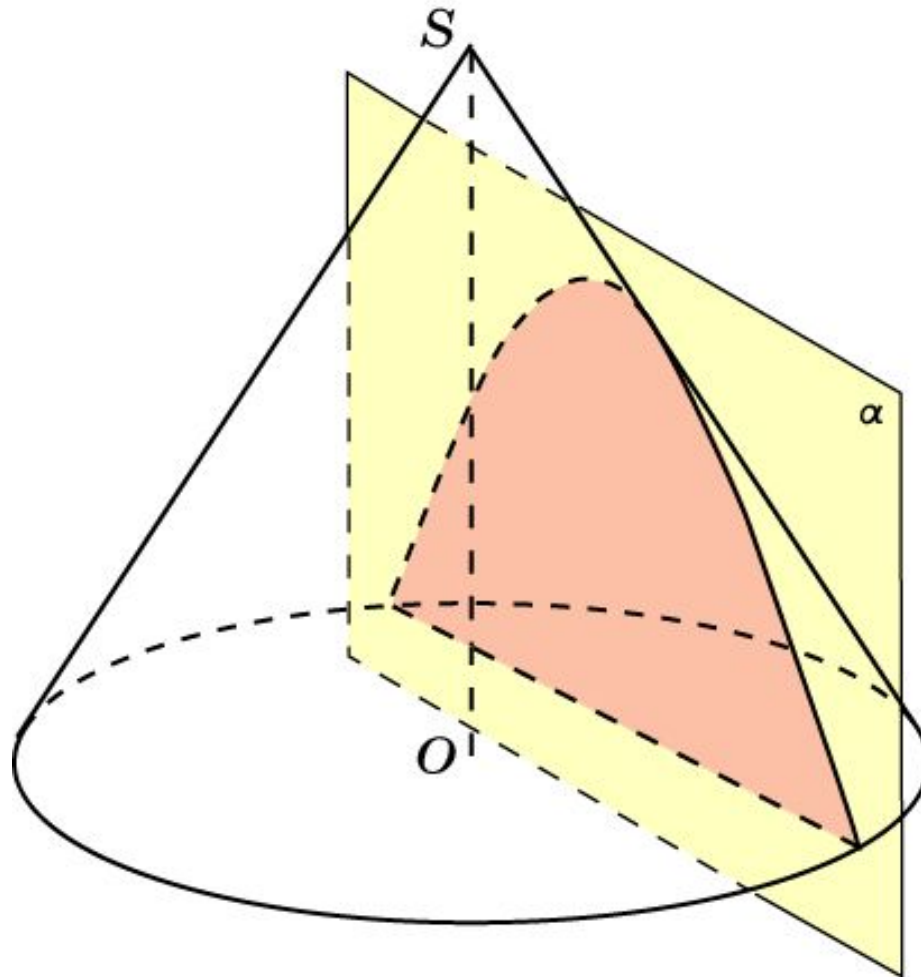


Через какую-нибудь точку  $O_1$  диаметра  $CD$  проведем прямую  $AO_1$  и ее точку пересечения с эллипсом основания обозначим  $B_1$ . Через точку  $O_1$  проведем прямую, параллельную  $SA$  и ее точку пересечения с  $SB_1$  обозначим  $B'_1$ . Она будет принадлежать искомому сечению. Аналогичным образом построим несколько других точек.

Соединяя их плавной кривой, получим искомое сечение.

## Теорема 3

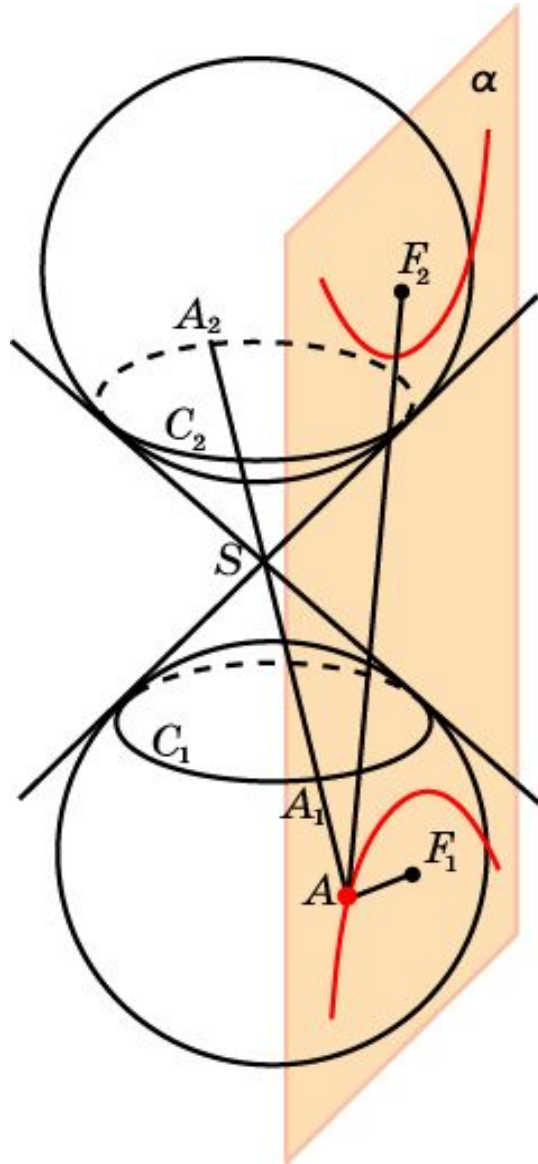
Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший угла между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается гипербола.





# Доказательство

Впишем в коническую поверхность сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках  $F_1$  и  $F_2$  и конической поверхности по окружностям  $C_1$  и  $C_2$  соответственно.



Пусть  $A$  - точка сечения, расположенная в той же части конической поверхности, что и точка  $F_1$ . Проведем образующую  $AS$  и обозначим через  $A_1$ ,  $A_2$  точки ее пересечения с окружностями  $C_1$ ,  $C_2$  соответственно. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда  $AF_1 = AA_1$ ,  $AF_2 = AA_2$ . Поэтому  $AF_2 - AF_1 = AA_2 - AA_1 = A_1A_2$ . Но длина отрезка  $A_1A_2$  не зависит от выбора точки  $A$  сечения. Она равна сумме образующих соответствующих конусов. Следовательно, разность  $AF_2 - AF_1$  расстояний от точки  $A$  до точек  $F_1$ ,  $F_2$  будет постоянной. Таким образом, сечением конической поверхности в этом случае является гипербола.

# Построение сечение конуса (гипербола)

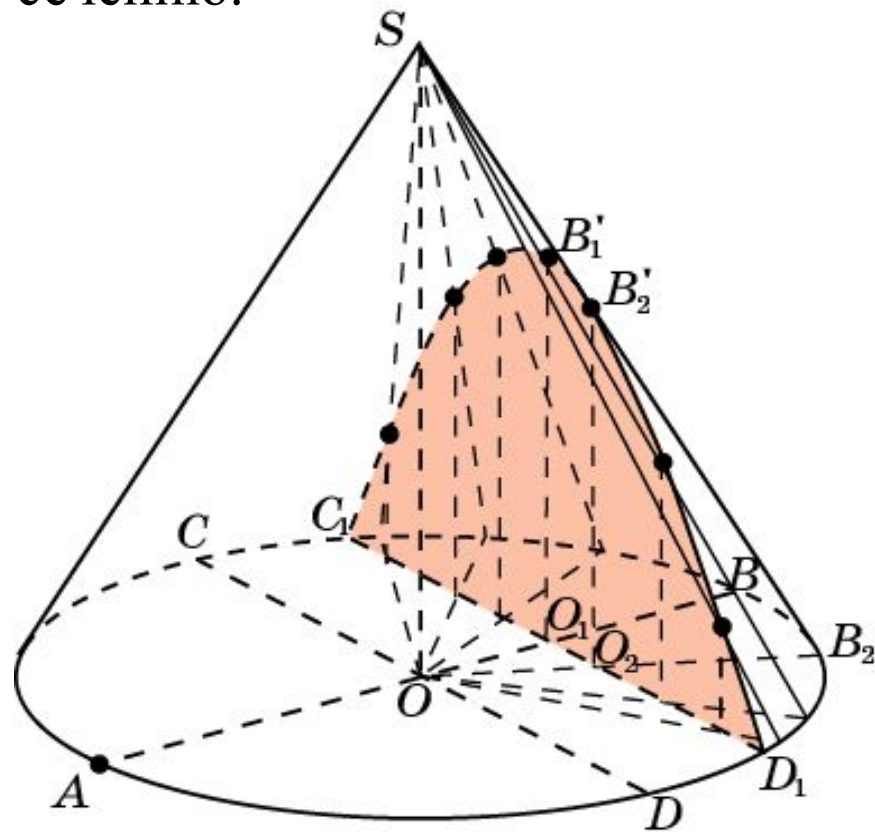
Построим сечение конуса, параллельное его оси  $SO$ .

В эллипсе, изображающем основание конуса, проведем сопряженные диаметры  $AB$  и  $CD$ .

Проведем хорду  $C_1D_1$ , параллельную  $CD$ . Через точку  $O_1$  ее пересечения с диаметром  $AB$  проведем прямую, параллельную  $SO$  и ее точку пересечения с  $SB$  обозначим  $B'_1$ . Она будет принадлежать искомому сечению.

Через какую-нибудь точку  $O_2$  хорды  $C_1D_1$  проведем прямую  $OO_2$  и ее точку пересечения с эллипсом обозначим  $B_2$ . Через точку  $O_2$  проведем прямую, параллельную  $SO$  и ее точку пересечения с  $SB_2$  обозначим  $B'_2$ . Она будет принадлежать искомому сечению. Аналогичным образом построим несколько других точек.

Соединяя их плавной кривой, получим искомое сечение.



# Упражнение 1

Какую форму принимает поверхность воды в наклоненной конусообразной колбе?

**Ответ:** Эллипса, параболы или гиперболы.

## Упражнение 2

Пучок света карманного фонарика имеет форму конуса. Какую форму имеет освещенный фонариком участок ровной поверхности в зависимости от угла наклона фонарика?

**Ответ:** Эллипса, параболы или гиперболы.

## Упражнение 3

Что представляет собой сечение конической поверхности, параллельное: а) оси; б) образующей?

**Ответ:** а) Гипербола; б) парабола.

## Упражнение 4

Через центр основания конуса и середину образующей проведена плоскость. Что представляет собой сечение конуса этой плоскостью?

**Ответ:** Фигура, ограниченная параболой.



## Упражнение 5

Высота конуса равна радиусу основания. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, образующей с осью угол: а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ?

**Ответ:** Фигура, ограниченная: а) гиперболой; б) параболой; в) эллипсом.

## Упражнение 6

Образующая конуса в два раза больше радиуса основания. Под каким углом к оси нужно провести сечение конуса плоскостью, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

**Ответ:** а) Больше  $60^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в) меньше  $60^\circ$ .