Логические универсальные учебные действия на уроках математики.

Логическими универсальными действиями являются:

- Анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных)
- Синтез – составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов.
- Выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов.
- Подведение под понятие, выведение следствий.
- Установление причинно – следственных связей, представление цепочек объектов и явлений.
- Построение логической цепочки рассуждений, анализ истинности утверждений.
- Доказательство.
- Выдвижение гипотез и их обоснование.

Логические операции:

АНАЛИЗ – *расчленение* предмета, явления, ситуации и *выявление составляющих их элементов,* частей.

СИНТЕЗ – *соединение частей* предметов или явление *в одно целое,* а также мысленное сочетание отдельных их свойств.

СРАВНЕНИЕ – *сопоставление* предметов с целью выявления *признаков сходства или признаков различия.*

ОБОБЩЕНИЕ – *нахождение существенно общего* в заданных предметах или явлениях.

АБСТРАГИРОВАНИЕ – *отчленение, выделение общего, существенного и его противопоставление частному, несущественному.*

КЛАССИФИКАЦИЯ – *распределение* предметов и явлений определенного типа *по классам и подклассам в зависимости от сходства и различия.*

Алгебра 7 класс «Решение уравнений»

Первое уравнение:

$x(x-1)=x$

$x-1=1$ **$x=0$**

$x=2$

Если **$x-1=1$** то **$x=x$**

Второе уравнение: $x(x^2-3)=x$

$x^2-3=1$ **$x=0$**

$x^2=4$

$x=2$ **$x=-2$**

Алгебра 7 класс
«Решение уравнений»

Третье уравнение:

$$(x^2 - 9)(x^2 - 2) = 9 - x^2$$

т.к. $x^2 - 9$ и $9 - x^2$ противоположные, то $x^2 - 2 = -1$

$x^2 - 2 = -1$	$x^2 - 9 = 0$
$x^2 = 1$	$x^2 = 9$
$x = 1 \quad x = -1$	$x = 3 \quad x = -3$

Алгебра 7 класс
«Решение уравнений»

Четвертое уравнение:

$$(x^4 - 16)\,[\,(x + 2)^2 + 2\,]^2 = 16 - x^4$$

$x^4 – 16$ и $16 – x^4$ противоположные, но $[\,(x + 1)^2 + 2\,]^2 \neq -1$

$$x^4 – 16 = 0$$

$x = 2 \quad x = -2$

Алгебра 7 класс
«Решение уравнений»

Пятое уравнение:

$$(x^2 - 9)^2\,(x^2 - 5x + 1) = x^4 - 18x^2 + 81$$

т.к. $x^4 - 18x^2 + 81 = (x^2 - 9)^2$, то

$x^2 - 9 = 0$

$x = 3 \quad x = -3$

$x^2 - 5x + 1 = 1$

$x^2 - 5x = 0$

$x\,(x - 5) = 0$

$x = 0 \quad x = 5$

Игра с математическими объектами

1. Прием разбиения при игре с математическими объектами.
2. Прием включения одного объекта в другой.

Найти сумму: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} = 1 + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62}) = 1 + 2(S - 2^{63})$

$S = 1 + 2S - 2^{64}$

$S = 2^{64} - 1$

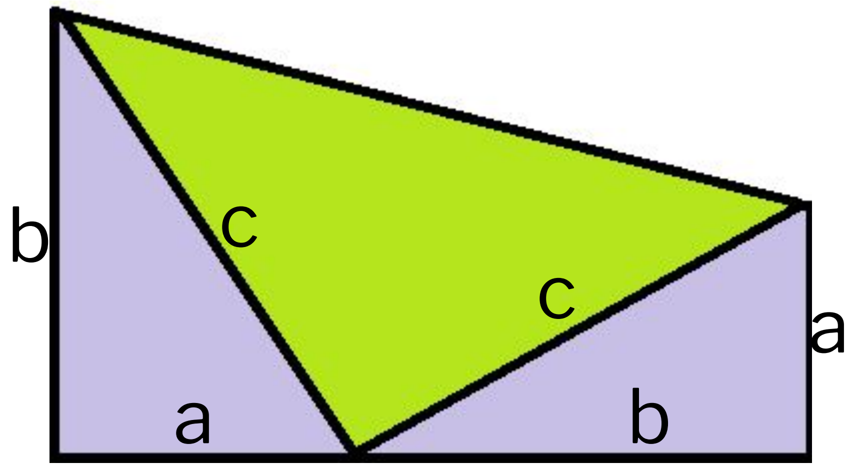
После этого примера ученикам уже легко выйти на ***идею частных сумм:***

a_1; $a_1 + a_2$; $a_1 + a_2 + a_3$; . . . $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Задача: существует ли такое натуральное число, что число 1111…11 (п единиц) делится на 2007?

Метод удвоения объекта

Пример 1. Еще одно доказательство теоремы

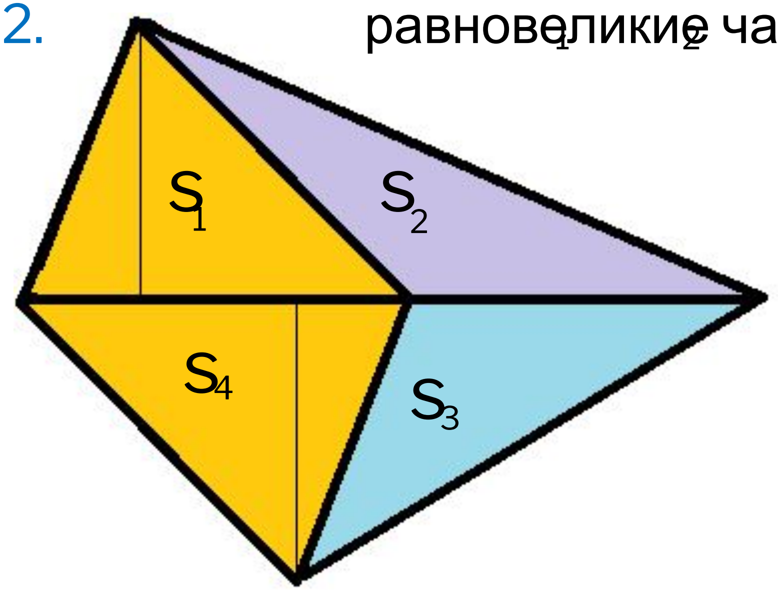


$S = 1/2\,(a + b)\,(a + b) =$

$= 1/2\,ab + 1/2ab + 1/2c^2$

Значит $a^2 + b^2 = c^2$

Пример 2. Способ разбиения четырехугольника на равновеликие части $(S_1 = S_2 = S_3 = S_4)$



Пример 3.

$$x^2 - 6x + 9$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (x^2 - 6x + 9)$$

$$(x^2 - 6x + 9) + x^6 (x^2 - 6x + 9)$$

$$x^8 - 6x^7 + 9x^6 + x^2 - 6x + 9$$

Решите неравенство:

$$x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0$$

Следствия в тригонометрии

1. ***Рассмотрение частных случаев***

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b a$$

Замена $b = a$, то $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Замена $b = П/4$ (любое табличное значение), то

$$\cos(a + П/4) = \cos a \cos П/4 - \sin a \sin П/4 = \sqrt{2}/2\,(\cos a - \sin a)$$

Выходим на ***идею вспомогательного угла***

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

Замена $b = 3a$, то $\cos a + \cos 3a = 2\cos 2a \cos a$, откуда следует формула косинуса тройного угла $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

2. *Рассмотрение общих случаев*

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

1). Заменив тригонометрические функции в формуле буквами *a, b, c, d,* получаем, что $|ab - cd| \le 1$, если $|a| \le 1$, $|b| \le 1$, $|c| \le 1$, $|d| \le 1$. В результате ученики выходят на *идею тригонометрической подстановки* (которую целесообразно использовать при доказательстве данного неравенства).

2). Если в данной формуле сделать только две замены: $\cos a = x$, $\sin b = y$, тогда получаем *задачу: Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения* $x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2}$

Здесь даже не пришлось указывать, что $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, ибо оно следует из условия задачи.

Сам факт замены тригонометрических функций буквами подсказывает перспективный методический прием. В каком-либо тригонометрическом тождестве ученик делает подобные замены и полученные равенства предлагает одноклассникам для угадывания формул.

Например: $a^2 + в^2 = 1$

$(a + в)^2 = 1 + 2aв$

$в^2 = (1 - a)(1 + a)$

$(a + в - 1)(a + в + 1) = 2aв$

$в = \dfrac{2a}{1 + a^2}$

3. *Соотнесение формул*

Например, соотнося $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ и тригонометрическую единицу $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$,
ученики получают сразу несколько полезных фактов:

1). Формулы понижения степени:

$\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$ $\sin^2 a = (1 - \cos 2a)/2$

2). Если равенства почленно перемножить или разделить, то

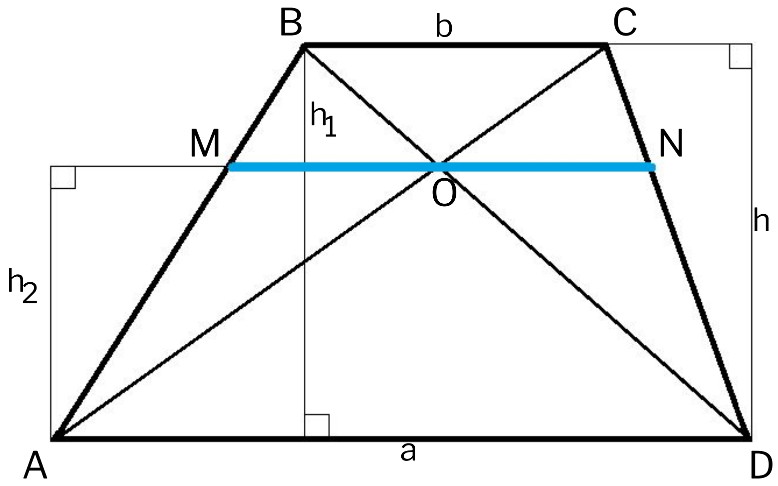
получим тождества $\frac{\cos 2a}{1} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} - \frac{ctg^2 - 1}{ctg^2 + 1}$

$\cos 2a\,(\cos^2 a + \sin^2 a) = \cos 2a \cos^2 a + \cos 2a \sin^2 a$

Замечаем, что если бы вместо *cos2a* взять *cosa*, то получили бы однородное выражение третьей степени.

Урок одной задачи

Задача 1. *В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами.*



Из подобия треугольников *ABD и ABC*, *MBO и ABD* получаем равенства

$x/b = h_2/h$, $x/a = h_1/h$, где $x = MO$.

Сложив эти равенства, получаем

$x/a + x/b = (h_1 + h_2)/h = 1$, т.е.

$x = ab/(a+b)$

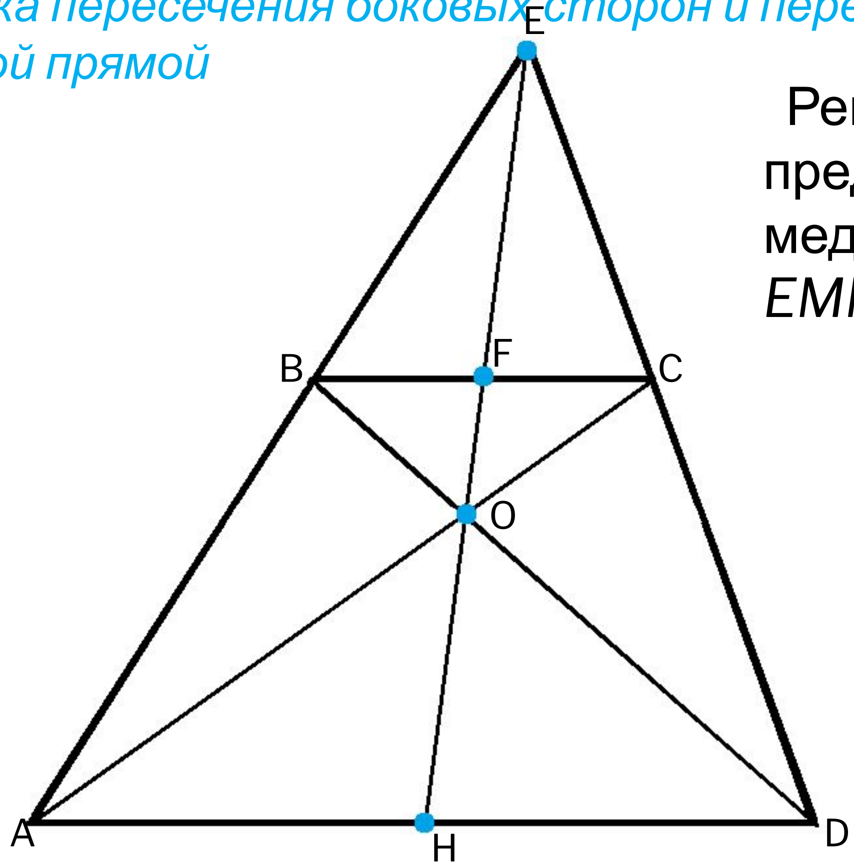
Аналогично $ON = ab/(a + b)$

Откуда и ответ $MN = 2ab/(a + b)$

Задачи на доказательство:

Задача 2. *Докажите, что в трапеции отрезок прямой, параллельной основаниям, которому принадлежит точка пересечения диагоналей и концы которого находятся на боковых сторонах трапеции, делится в этой точке пополам.*

Задача 3. *Докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, точка пересечения боковых сторон и пересечения диагоналей лежат на одной прямой*

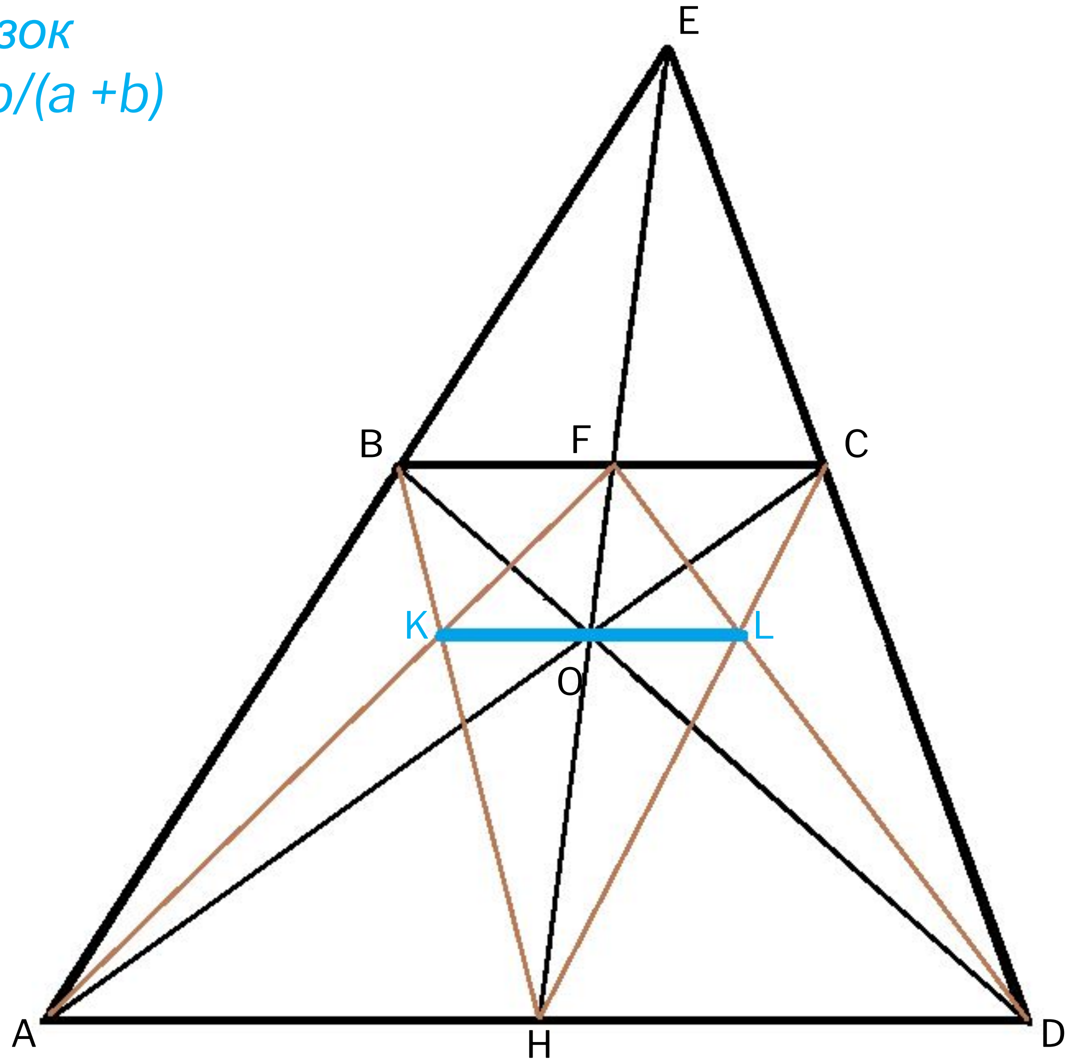


Решение следует из предыдущей задачи, т.к. *EH* – медиана в треугольниках *EBC*, *EMN*, *EAD*.

Задачи на построение:

Задача 4*. На каждой из двух параллельных прямых расположены по одному отрезку длиной a и b. С помощью одной линейки построить отрезок*

$x = ab/(a+b)$



Построение.

1. AB $\cap$ CD = E

2. AC $\cap$ BD = O

3. OE $\cap$ BC = F

OE $\cap$ AD = H

4. DF $\cap$ CH = L

AF $\cap$ BH = K

5. KL - искомый

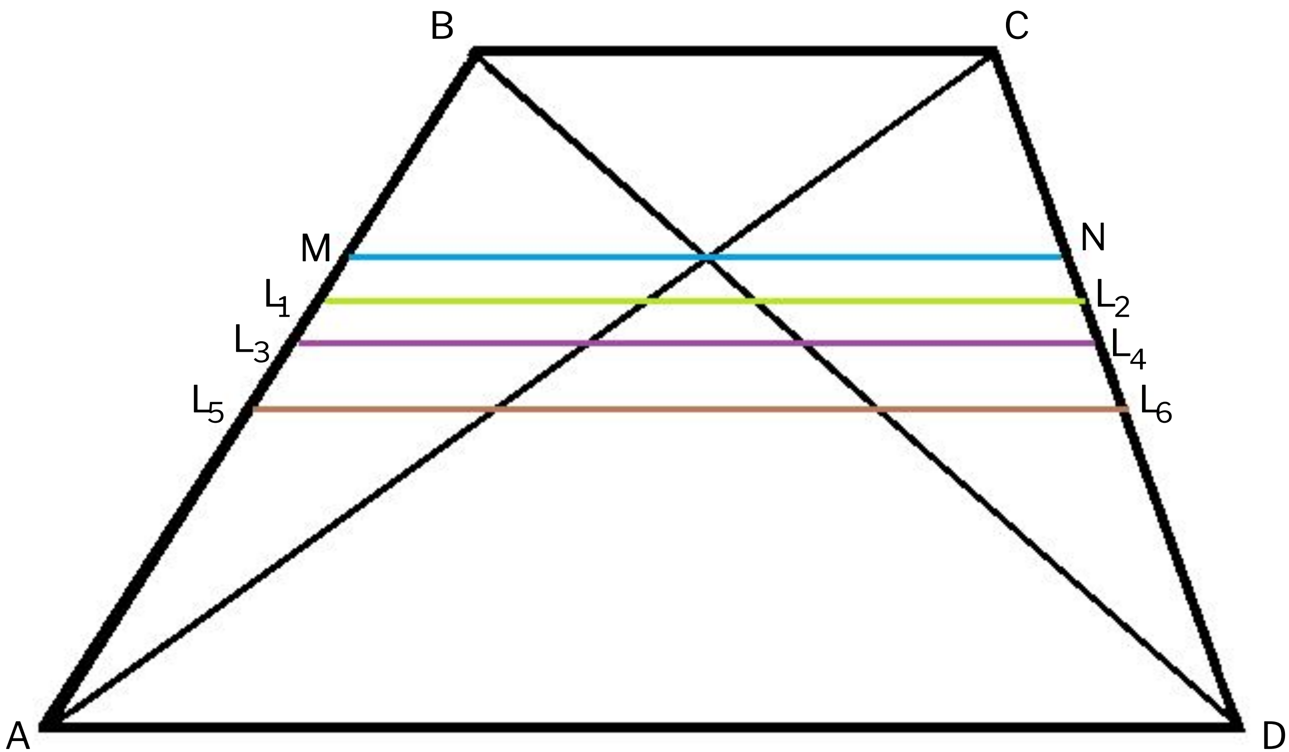
Связь задачи с неравенствами:

MN - среднее гармоническое чисел ***a*** и ***b*** (здесь они основания трапеции).

$MN < L_1 L_2$ – среднее геометрическое чисел ***a*** и ***b***

$MN < L_3 L_4$ - средняя линия трапеции – среднее арифметическое чисел ***a*** и ***b***.

$MN < L_5 L_6$ – среднее квадратичное двух чисел ***a*** и ***b***



$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+\ b^2}{2}}$$

СПАСИ
БО

СПАСИ
БО

СПАСИ
БО