

Свойства корня n -й степени

Повторим:

Корнем n -ой степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) называют такое **неотрицательное** число, при возведении которого в степень n получается a .

Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a ($n = 3, 5, 7, \dots$) называют такое **отрицательное** число, при возведении которого в степень n получается a .

$$\sqrt[n]{a}$$

a – подкоренное число, n – показатель корня

Теорема 1. Корень n -й степени ($n = 2, 3, 4, \dots$) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n -й степени из этих чисел:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{ab} = x \\ \sqrt[n]{a} = y \\ \sqrt[n]{b} = z \end{array} \right\} \Rightarrow x = yz \quad \begin{array}{l} \sqrt[n]{ab} = x \Leftrightarrow ab = x^n \\ \sqrt[n]{a} = y \Leftrightarrow a = y^n \\ \sqrt[n]{b} = z \Leftrightarrow b = z^n \end{array}$$
$$ab = a \cdot b$$
$$= \quad \cdot \quad \Leftrightarrow x^n = (y \cdot z)^n \Rightarrow x = yz$$

Теорема 2. Если $a \geq 0$, $b > 0$ и n – натуральное число, $n > 1$, то справедливо равенство

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x \\ \sqrt[n]{a} = y \\ \sqrt[n]{b} = z \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{y}{z} \quad \begin{array}{l} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x \Leftrightarrow \frac{a}{b} = x^n \\ \sqrt[n]{a} = y \Leftrightarrow a = y^n \\ \sqrt[n]{b} = z \Leftrightarrow b = z^n \end{array}$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow x^n = \left(\frac{y}{z}\right)^n \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

Пример:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ответ: 60.

Пример:

Вычислить $\sqrt[4]{\frac{16}{0,0625}}$.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Решение:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{0,0625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{0,0625}} = \frac{2}{0,5} = 4$$

Ответ: 4.

Теорема 3. Если $a \geq 0$, k – натуральное число и n – натуральное число, $n > 1$, то справедливо равенство

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Доказательство:

$$k = 3 \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^3 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[n]{a^3}$$

Теорема 4. Если $a \geq 0$, k и n – натуральное число, $n > 1$, $k > 1$, то справедливо равенство

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Пример:

Вычислить: а) $\sqrt[3]{8 + 27}$; б) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$.

Решение:

$$\text{а) } \sqrt[3]{8 + 27} = \sqrt[3]{35}$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt[3]{35} \neq 5$$

$$\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a - b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

Теорема 5. Если показатели корня и степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:

$${}^{np}\sqrt{a^{kp}} = {}^n\sqrt{a^k}$$

$${}^{12}\sqrt{a^8} = {}^3\sqrt{a^2}$$

$${}^6\sqrt{a^3} = \sqrt{a}$$

Доказательство:

$${}^{np}\sqrt{a^{kp}} = x \Rightarrow a^{kp} = x^{np}$$

$${}^n\sqrt{a^k} = y \Rightarrow a^k = y^n \Leftrightarrow a^{kp} = y^{np}$$

$$x^{np} = y^{np} \Leftrightarrow x = y$$

Пример:

Преобразовать выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}$$

Ответ: $\sqrt[6]{a^5}$.

Пример:

Привести радикалы к одинаковому показателю корня $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{2}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5}$$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3}$$

Пример:

Решить уравнение $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5x} + 13 + \frac{\sqrt[3]{5x}}{5} = 2\sqrt[3]{5x}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{5x} = y$$

$$\frac{1}{2}y + 13 + \frac{y}{5} = 2y \Leftrightarrow \frac{1}{2}y + \frac{y}{5} - 2y = -13 \Leftrightarrow -1,3y = -13 \Leftrightarrow y = 10$$

$$\sqrt[3]{5x} = 10 \Leftrightarrow 5x = 1000 \Leftrightarrow x = 200$$

Ответ: $x = 200$.

Пример:

$$a^2 - \sqrt[n]{ab} = (\sqrt[n]{a} \cdot b)(\sqrt[n]{a} + b)$$

Вычислить $\sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} &= \sqrt[3]{(8 - \sqrt{37})(8 + \sqrt{37})} = \sqrt[3]{8^2 - (\sqrt{37})^2} = \\ &= \sqrt[3]{64 - 37} = \sqrt[3]{27} = 3 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Свойства $\sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, n – натуральное число:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Пример:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Вычислить $\sqrt[3]{-135} \cdot \sqrt[3]{25}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{-135} = \sqrt[3]{-27 \cdot 5} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5}$$

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-135} \cdot \sqrt[3]{25} &= -\sqrt[3]{27 \cdot 5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5 \cdot 5^2} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5^3} = -\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{5^3} = \\ &= -3 \cdot 5 = -15 \end{aligned}$$

Ответ: -15 .