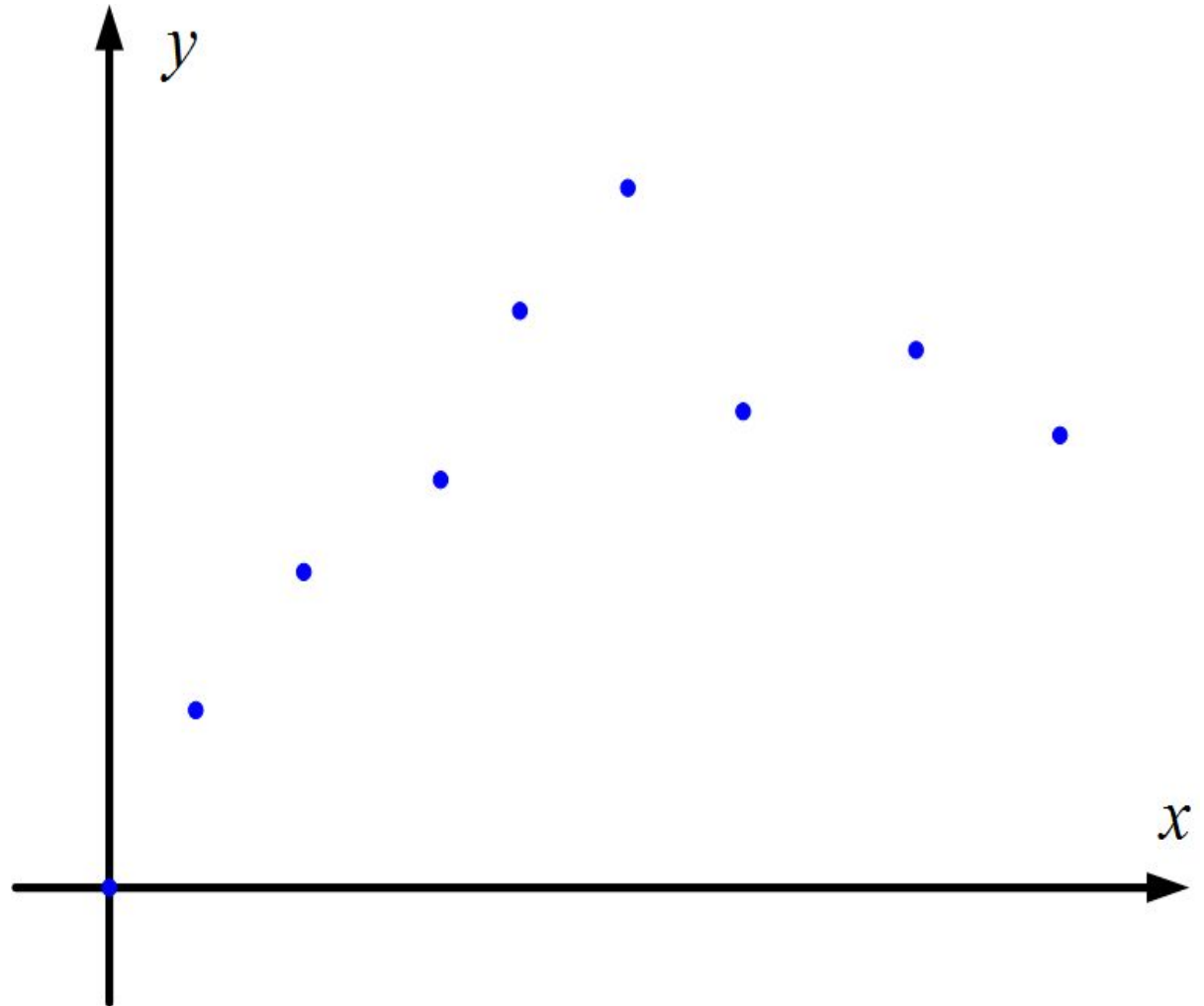
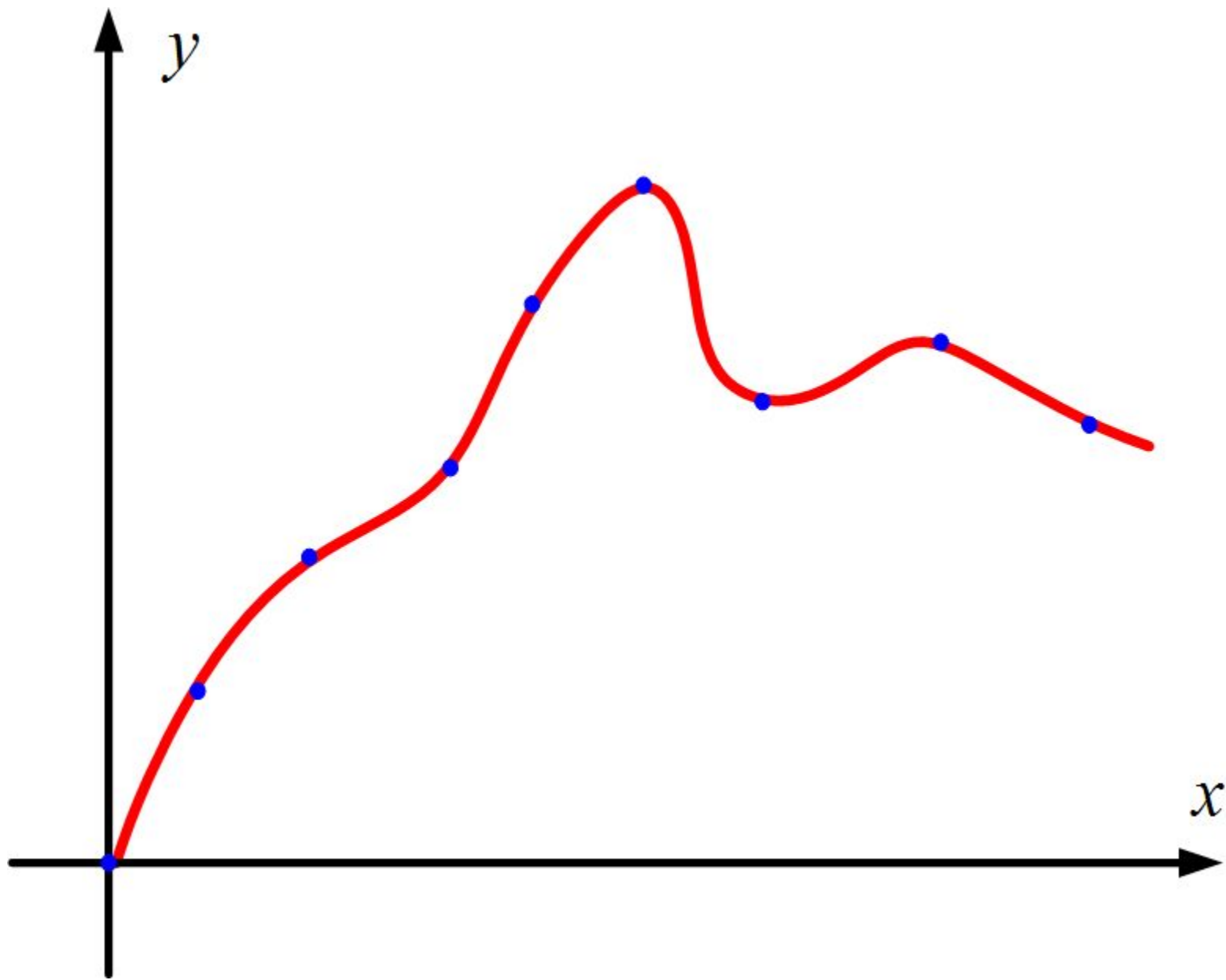
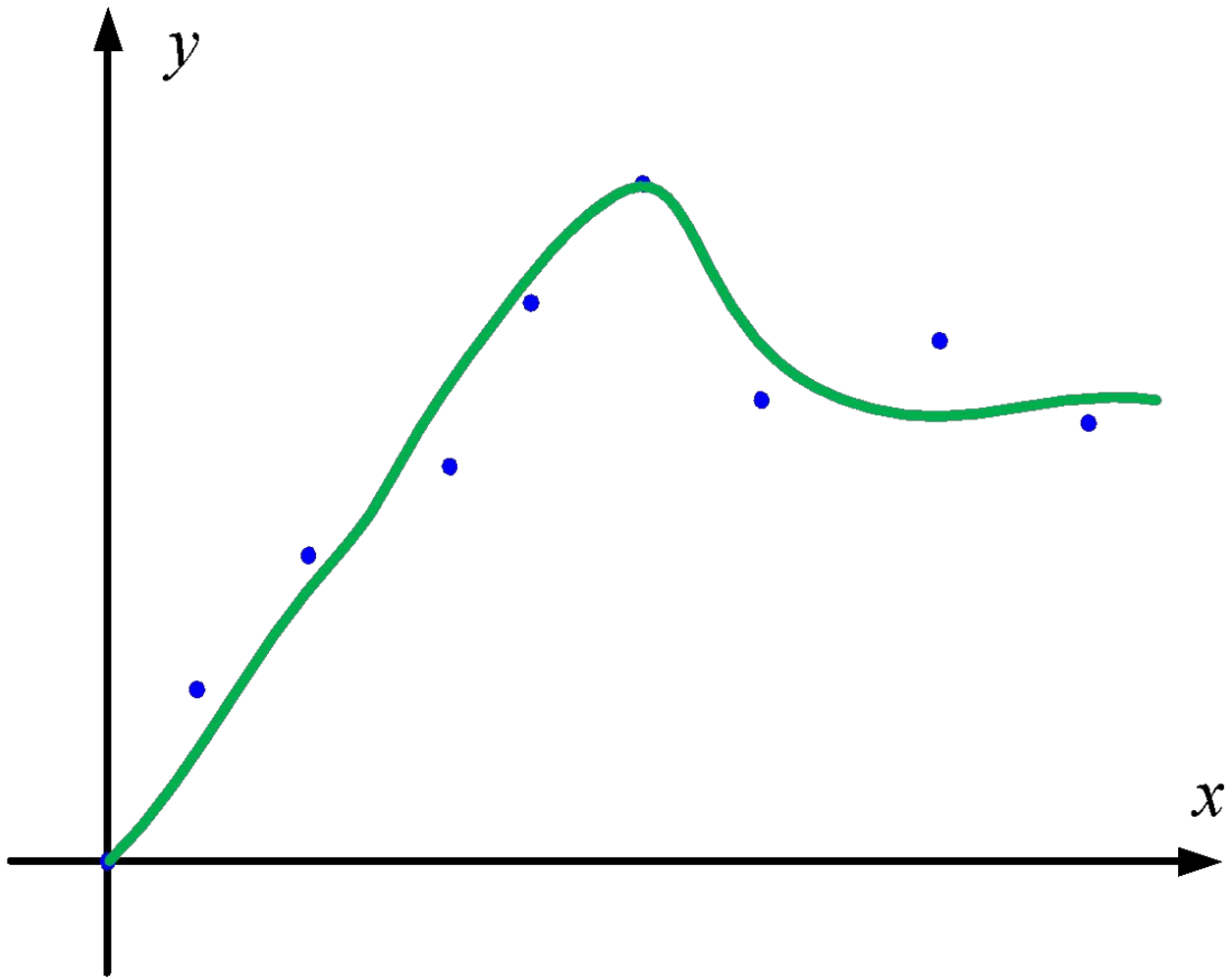


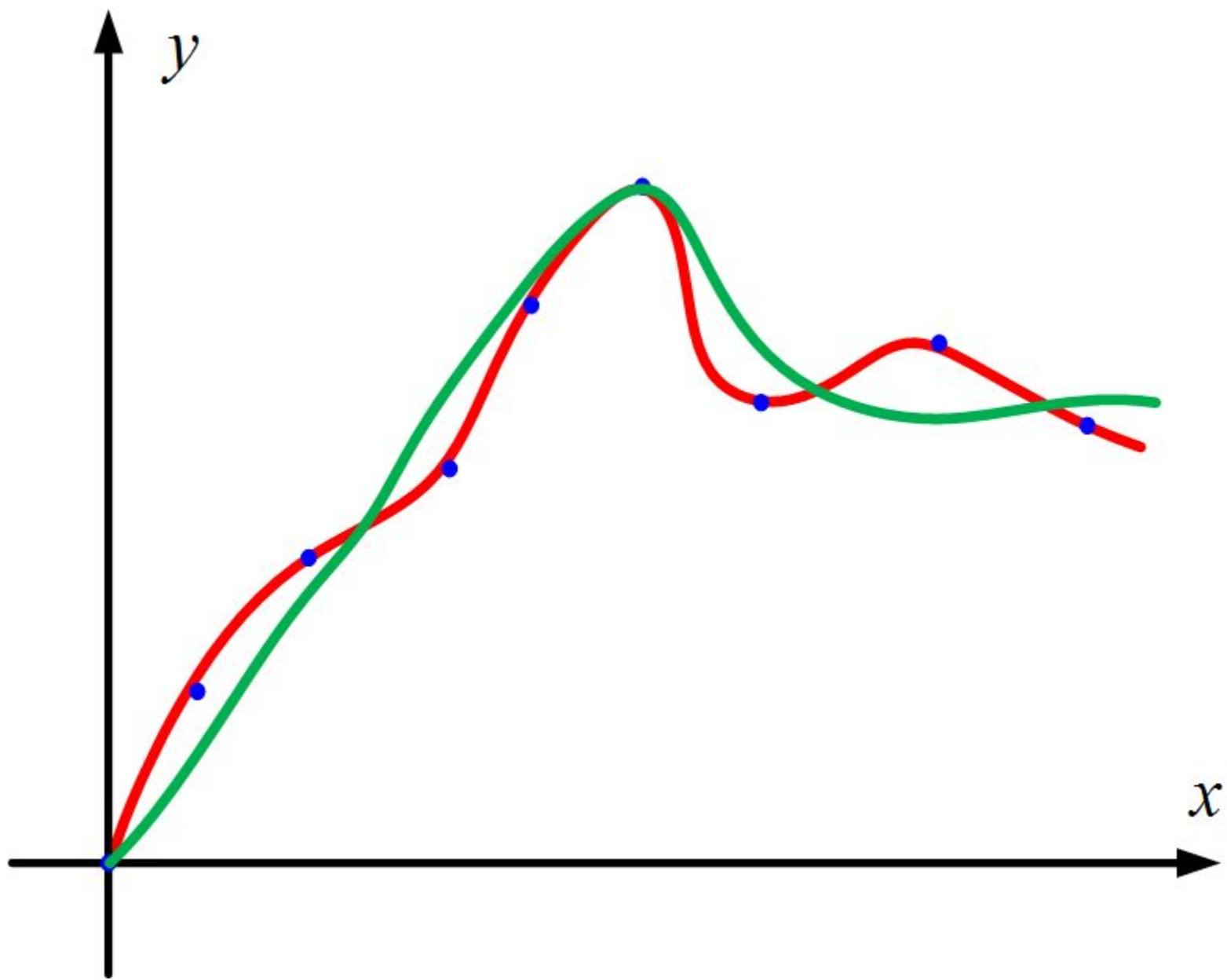
Интерполяция и экстраполяция

x	y
x_0	y_0
x_i	y_i
x_n	y_n









Интерполяция и экстраполяция

x	y
x_0	y_0
x_i	y_i
x_n	y_n

$$F(x_0) = y_0$$

$$F(x_1) = y_1$$

⊠

$$F(x_i) = y_i$$

⊠

$$F(x_n) = y_n$$

- Задача интерполяции

$$F(x) = ? \quad x \in [x_0; x_n] \quad x \neq x_i$$

- Задача экстраполяции

$$F(x) = ? \quad x \notin [x_0; x_n]$$

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

- Для равноотстоящих точек

$$x_{i+1} - x_i = \textit{const}$$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

- Для не равноотстоящих точек

$$x_{i+1} - x_i \neq \textit{const}$$

Интерполяционные формулы для равноотстоящих точек

$$F_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Конечные разности

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

⊠

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Горизонтальная таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
\boxtimes	\boxtimes				
x_n	y_n				

Горизонтальная таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	2	2	10	12	0	0
1	4	12	22	12	0	
2	16	34	34	12		
3	50	68	46			
4	118	114				
5	232					

Первая интерполяционная формула Ньютона

Общая формула

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

$$q - 1 = \frac{x - x_0}{h} - 1 = \frac{x - x_0 - h}{h} = \frac{x - x_1}{h}$$

$$q - 2 = \frac{x - x_2}{h}$$

⊠

Первая интерполяционная формула Ньютона Общая формула

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 \cdot 2!} \Delta^2 y_0 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h^3 \cdot 3!} \Delta^3 y_0 + \\ & \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{h^n \cdot n!} \Delta^n y_0 \end{aligned}$$

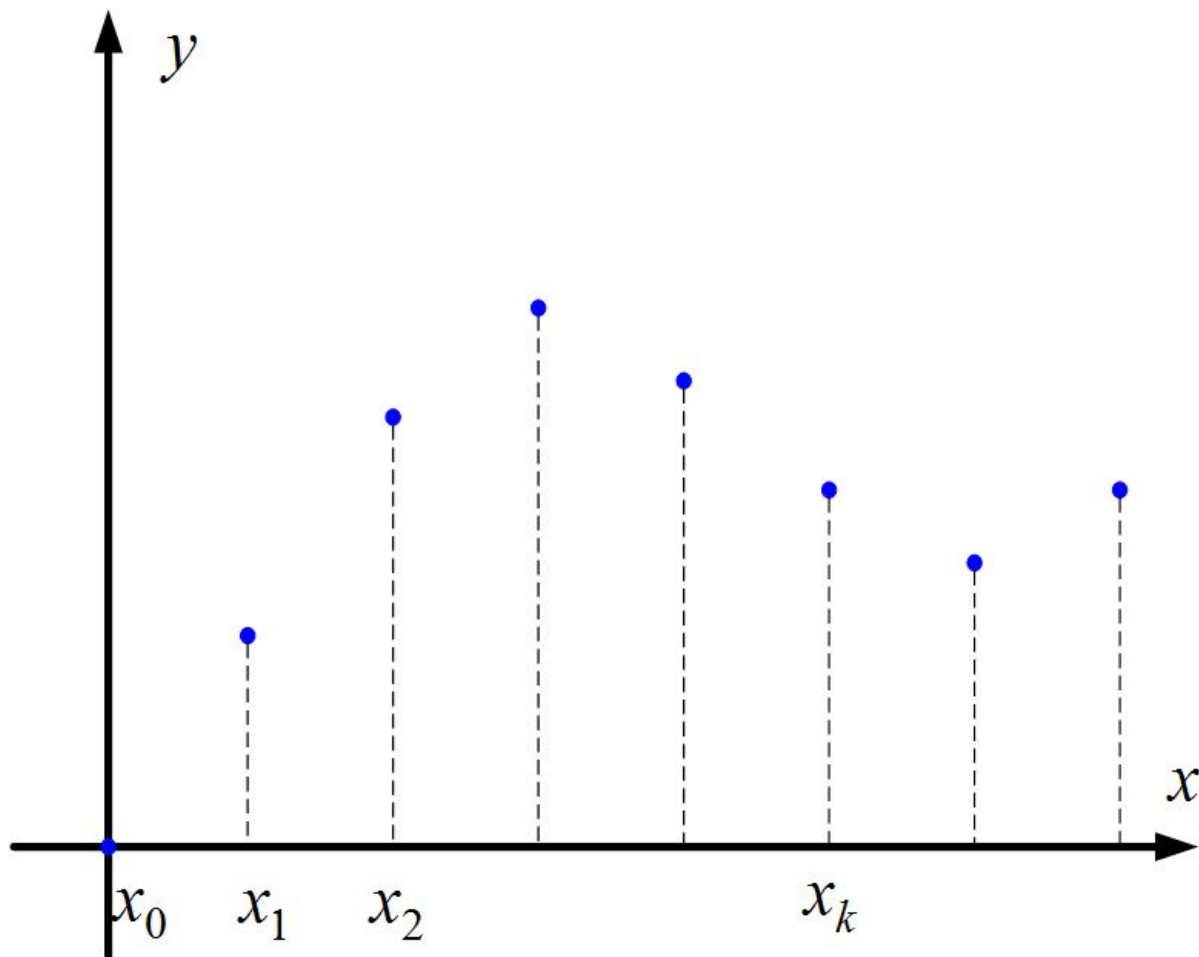
Первая интерполяционная формула Ньютона Частный случай

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

ближайшая узловая точка

значение функции в ближайшей узловой точке

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$



$$q = \frac{x - x_0}{h} = \left| x = x_0 + kh \right| = \frac{x_0 + kh - x_0}{h} = k$$

Первая интерполяционная формула Ньютона. Частные случаи.

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 + q\Delta y_0 = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 = \\ &= a_0 + a_1 x \end{aligned}$$

Первая интерполяционная формула Ньютона. Частные случаи.

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 = \\ &= y_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot \frac{(x-x_0)}{h} \cdot \left(\frac{(x-x_0)}{h} - 1 \right) = \\ &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot (x-x_0)(x-x_0-h) = \\ &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot (x-x_0)(x-x_1) = \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \end{aligned}$$

Горизонтальная таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	2	2	10	12	0	0
1	4	12	22	12	0	
2	16	34	34	12		
3	50	68	46			
4	118	114				
5	232					

$$x = 0.7 \quad y = ?$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 4$$

$$h = 1 \quad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.7 - 1}{1} = -0.3$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta y_0^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta y_0^3 + \\ &+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta y_0^4 = \\ &= 4 - 0.3 \cdot 12 + \frac{(-0.3)(-0.3-1)}{2} 22 + \frac{(-0.3)(-0.3-1)(-0.3-2)}{6} 12 + \\ &\frac{(-0.3)(-0.3-1)(-0.3-2)(-0.3-3)}{24} 0 = 2.896 \end{aligned}$$

Горизонтальная таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	2	2	10	12	0	0
1	4	12	22	12	0	
2	16	34	34	12		
3	50	68	46			
4	118	114				
5	232					

$$x = 4.9 \quad y = ?$$

$$x_0 = 5 \quad y_0 = 232$$

$$h = 1 \quad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{4.9 - 5}{1} = -0.1$$

$$P_5(x) = y_0 = 232$$

$$x = 10 \quad y = ?$$

$$x_0 = 5 \quad y_0 = 232$$

$$h = 1 \quad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{10 - 5}{1} = 5$$

$$P_5(x) = y_0 = 232$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона Общая формула

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

$$q + 1 = \frac{x - x_n}{h} + 1 = \frac{x - (x_n - h)}{h} = \frac{x - x_{n-1}}{h}$$

$$q - 2 = \frac{x - x_{n-2}}{h}$$

⊠

Вторая интерполяционная формула Ньютона Общая формула

$$P_n(x) = y_n + \frac{(x - x_n)}{h} \Delta y_{n-1} + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{h^2 \cdot 2!} \Delta^2 y_{n-2} +$$
$$+ \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{h^3 \cdot 3!} \Delta^3 y_{n-3} +$$
$$\dots + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)}{h^n \cdot n!} \Delta^n y_0$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона Частная задача

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

ближайшая узловая точка

значение функции в ближайшей узловой точке

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Горизонтальная таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	2	2	10	12	0	0
1	4	12	22	12	0	
2	16	34	34	12		
3	50	68	46			
4	118	114				
5	232					

$$x = 4.9 \quad y = ?$$

$$x_n = 5 \quad y_n = 232$$

$$h = 1 \quad q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{4.9 - 5}{1} = -0.1$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta y_{n-2}^2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta y_{n-3}^3 + \\ &+ \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\Delta y_{n-4}^n + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}{5!}\Delta y_{n-5}^n = \\ &= 232 - 0.1 \cdot 114 + \frac{(-0.1)(-0.1+1)}{2} 46 + \frac{(-0.1)(-0.1+1)(-0.1+2)}{6} 12 + \\ &+ \frac{(-0.1)(-0.1+1)(-0.1+2)(-0.1+3)}{24} 0 + \\ &+ \frac{(-0.1)(-0.1+1)(-0.1+2)(-0.1+3)(-0.1+4)}{120} 0 = 218.188 \end{aligned}$$

Интерполяционные формулы для не равноотстоящих точек

- Формула Лагранжа
- Формула Ньютона для не равноотстоящих точек

Формула Лагранжа

$$L_n(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

i	x	y
0	0	2
1	1	3
2	2	12
3	5	147

$$\begin{aligned} L_3(x_i) = & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \\ & + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \\ & + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \\ & + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3(x_i) &= 2 \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)} + \\
&+ 3 \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)} + \\
&+ 12 \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)} + \\
&+ 147 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)} = \\
&= x^3 + x^2 - x + 2
\end{aligned}$$

Погрешность интерполяционных формул

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Погрешность первой интерполяционной формулы Ньютона

$$R_n(x) = \left| \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0 \right|$$

Погрешность второй интерполяционной формулы Ньютона

$$R_n(x) = \left| \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0 \right|$$

Погрешность первой и второй интерполяционных формул Ньютона при известном виде функции

$$R_n(x) = \left| h^{n+1} \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

$$R_n(x) = \left| h^{n+1} \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

Пример

С какой точностью можно вычислить с помощью интерполяционной формулы $\ln 100.5$ для рассматриваемого интервала $[100; 103]$ с шагом $h = 1$

$$R_3(x) = \left| h^4 \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} f^{(4)}(\xi) \right|$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Пример

$$R_3(x) = 1^4 \frac{0.3(0.3-1)(0.3-2)(0.3-3)}{4!} \cdot \frac{6}{100^4} \approx 2.41 \cdot 10^{-9}$$

Погрешность формулы Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

Выбор узлов интерполирования. Формула Чебышева

$$x_i = \frac{x_0 + x_n}{2} - \frac{x_n - x_0}{2} \cos \frac{2i + 1}{2n + 2} \pi$$