

# Моделирование нестационарных течений в газотурбинных двигателях.

Выполнила: Ст ММ-12 Митрофанова Юлия

Научный руководитель: Инженер-  
конструктор

1 кат. ИЦ (г. Пермь)

Загитов Р.А

# Оптимизация лопатки компрессора газотурбинного двигателя.

- Критерии: уменьшение потери энергии при переходе через лопатку
- Ограничения: направление потока, скорость потока на выходе.

Для решения задачи оптимизации необходимо научиться моделировать течение газа.

Для этого рассмотрим ударную трубу.  
Распространение волн в ударной трубе начинается с распада произвольного разрыва.

# Постановка задачи

Произвольный разрыв — произвольный скачок параметров сплошной среды.



С лева от заслонки газ находится с одним состоянием  $(P_1, \rho_1, u_1)$ , а в другом  $(P_2, \rho_2, u_2)$ . В начальный момент времени заслонка убирается.

# Математическая постановка задачи

Для описания процесса течения газа по трубе, использовалась система нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений Эйлера:

- уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) = 0;$$

- уравнения сохранения импульса

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u W) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- уравнение сохранения полной удельной энергии

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E W) + \operatorname{div}(\rho W) = 0;$$

(Система 1)

Здесь  $W$  – вектор скорости;  $u$  - компонента вектора скорости вдоль оси  $x$ ;  $p$ –давление;  $E$  – полная энергия;  $t$ –время, а оператор  $\frac{\partial}{\partial t}$  – оператор дифференцирования.

Данная система замыкалась уравнением состояния идеального газа:

$$p = (k - 1) \rho \left( E - \frac{u^2}{2} \right)$$

# Метод решения задачи

Основная идея метода крупных частиц состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения. Среда здесь моделируется системой из жидких (крупных) частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейками эйлеровой сетки.

# Эйлеров этап

На данном этапе изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а жидкость предполагается заторможенной. Поэтому конвективные члены соответствующие эффектам перемещения, в системе 1 откидываются. Плотность считается постоянной и дивергентными слагаемыми пренебрегают. Получаем:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(pW) = 0.$$

- Аппроксимируя данные уравнения в момент времени  $t_n$  ( $n$ –номер шага по времени) и разрешая их относительно искомым величин, получим явные конечно-разностные уравнения первого порядка точности по времени и второго порядка по пространству в декартовой системе координат для ячейки (крупной частицы)  $i$ :

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \frac{p_{i+0.5}^n - p_{i-0.5}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_i^n};$$

$$\tilde{E}_i^n = E_i^n - \frac{p_{i+0.5}^n \bar{u}_{i+0.5}^n - p_{i-0.5}^n \bar{u}_{i-0.5}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_i^n}.$$

Величины с дробными индексами, относящиеся к границам ячеек, находятся следующим образом:

$$u_{i+0.5}^n = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \quad p_{i-0.5}^n = \frac{p_i^n + p_{i-1}^n}{2}$$

$\bar{u}_{i+0.5}^n$  числится как «весовая» комбинация:

$$\bar{u}_{i+0.5}^n = (1 - Av_i^n)u_{i+0.5}^n + \tilde{u}_{i+0.5}^{n-1}Av_i^n$$

Где  $Av$  – коэффициент, влияющий на уровень аппроксимационной вязкости схемы.

При конкретных расчётах в зависимости от характера рассматриваемого течения величину  $Av$  можно варьировать как функцию от скорости потока.

Опытным путём была подобрана оптимальная зависимость  $Av$  от скорости потока:

$$\text{Если } M_i^n < 0.25, \text{ то } Av_n^i = 6.5 \left(1 - \frac{M_i^n}{0.25}\right)$$

$$\text{Если } M_i^n \geq 0.25, \text{ то } Av_n^i = 0,$$

$$\text{Где } M_i^n = \sqrt{k \frac{p_i^n}{\rho_i}}, \text{ - местное число Маха.}$$

# Лагранжев этап.

- На данном этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся потоки массы, импульса и энергии через границы эйлеровых ячеек. Поточковые формулы в общем случае могут быть представлены в следующем виде:

$$(\Phi \tilde{u})_{i+0.5}^n = \Phi_{i+0.5}^n \tilde{u}_{i+0.5}^n, \text{ где } \Phi = \rho, \rho \tilde{u}, \rho \tilde{E}.$$

- Для всех видов записи потоковых формул характерен учёт направления потока на данной границе, что повышает устойчивость вычислений.
- Будем определять потоки массы, импульса и полной удельной энергии по следующим формулам первого порядка точности:

$$(\Phi \tilde{u})_{i+0.5}^n = \Phi_i^n \tilde{u}_{i+0.5}^n, \text{ если } \tilde{u}_{i+0.5}^n \geq 0;$$

$$(\Phi \tilde{u})_{i+0.5}^n = \Phi_{i+1}^n \tilde{u}_{i+0.5}^n, \text{ если } \tilde{u}_{i+0.5}^n < 0.$$

# Заключительный этап.

- Здесь происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля параметров потока на фиксированной сетке в момент времени  $t_{n+1}$
- Исходная система дифференциальных уравнений системы 1 примет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \tilde{W}) = 0;$$

$$\frac{\partial(\rho \tilde{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \tilde{u} \tilde{W}) = 0;$$

$$\frac{\partial(\rho \tilde{E})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \tilde{E} \tilde{W}) = 0.$$

- Аппроксимируя эти уравнения на новом временном слое и разрешая их относительно искомых параметров потока, получим:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \left[ \frac{(\rho \tilde{u})_{i+0.5}^n - (\rho \tilde{u})_{i-0.5}^n}{\Delta x} \right] \Delta t;$$

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^n \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} - \left[ \frac{(\rho \tilde{u} \tilde{u})_{i+0.5}^n - (\rho \tilde{u} \tilde{u})_{i-0.5}^n}{\Delta x} \right] \frac{\Delta t}{\rho_i^{n+1}};$$

$$E_i^{n+1} = \tilde{E}_i^n \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} - \left[ \frac{(\rho \tilde{E} \tilde{u})_{i+0.5}^n - (\rho \tilde{E} \tilde{u})_{i-0.5}^n}{\Delta x} \right] \frac{\Delta t}{\rho_i^{n+1}}.$$

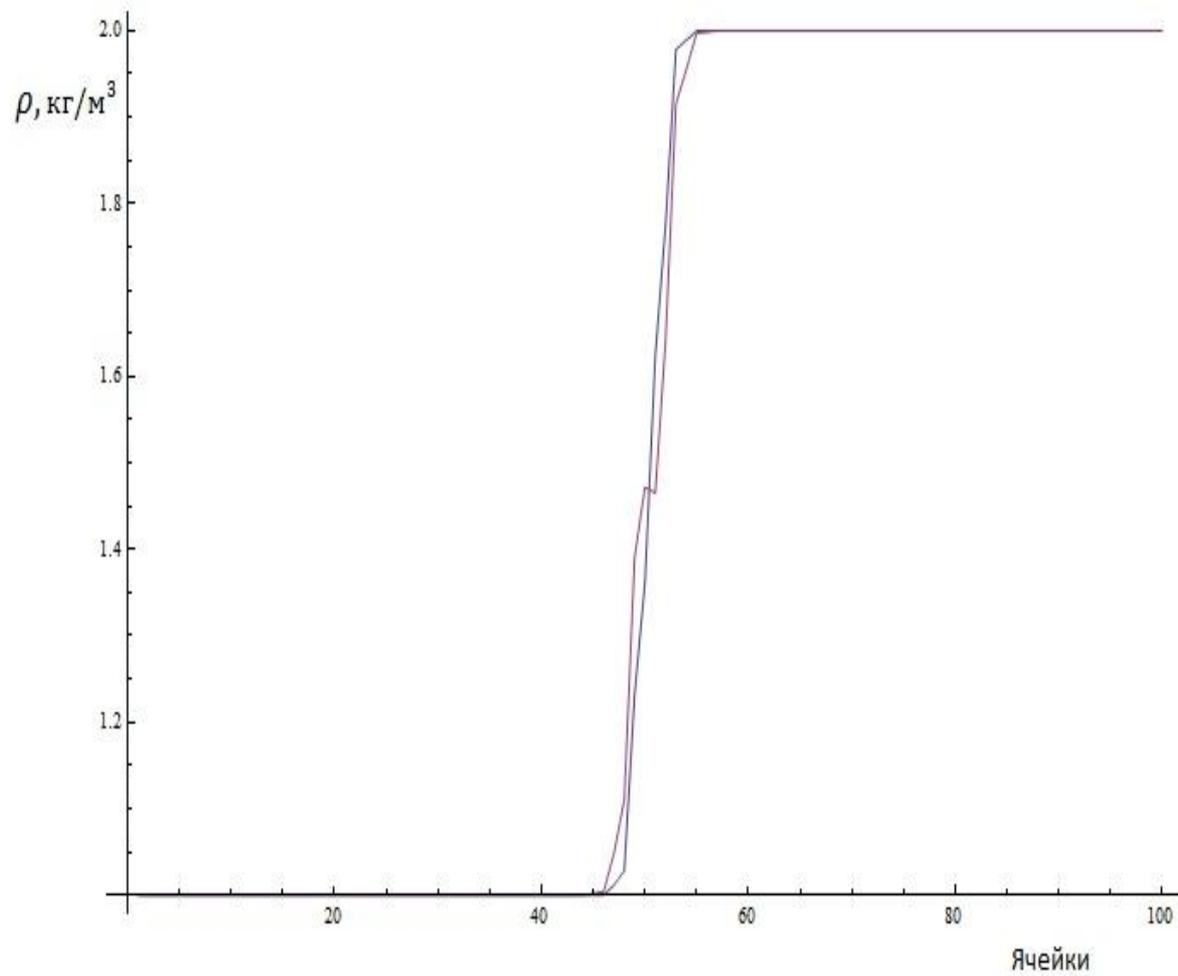
Уравнение, замыкающее систему:

$$p_i^{n+1} = (k - 1) \rho_i^{n+1} \left( E_i^{n+1} - \frac{(u_i^{n+1})^2}{2} \right)$$

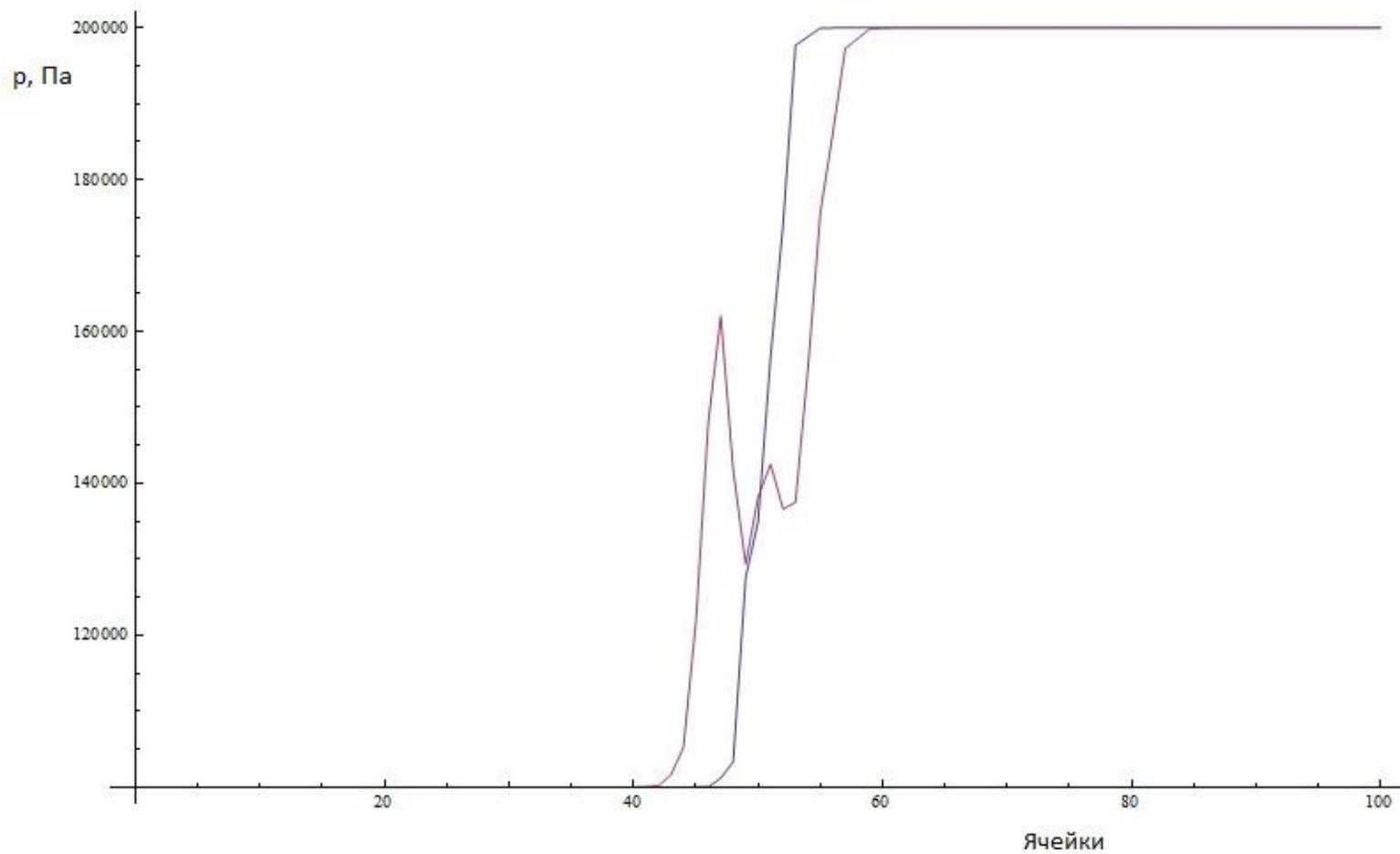
# Результаты решения одномерной задачи.

- Начальные условия задаются вручную. Все величины исчисляются в системе СИ.
- Для решения были взяты: Плотность с левой части  $1 \text{ кг/м}^3$  в правой 2 . Давление в левой части 100000 Па, в правой 200000 Па. Скорость в обеих частях равна нулю.
- Графики зависимости величин от шага времени:
- Синим обозначается значение рассматриваемой величины при шаге времени  $(n) = 4$ , фиолетовым, при  $n = 8$

- График плотности



- График давления



# Выводы:

Результаты расчётов показывают, что построенная математическая модель позволяет получать решение поставленной задачи с требуемой точностью. Таким образом можно сделать вывод о применимости разработанной модели для описания нестационарных течений в газотурбинных двигателях.