Метод координат
и метод векторов при решении задач

Цель:

* Рассмотрение эффективных приемов использования популярных методов решения задач (векторного и координатного)
* Рассмотрение примеров решения задач.

История

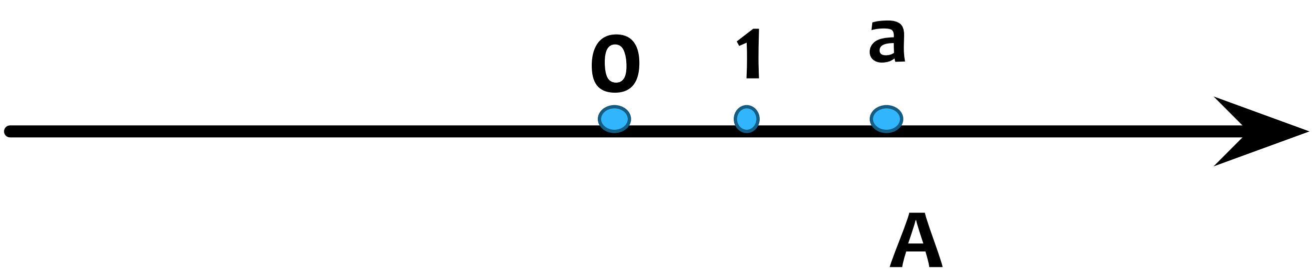
Р. Декарт

Пьер Ферма

Рено Декарт

Некоторые определения и вычислительные формулы

Координаты точки на прямой.



A(a)

Задачи на прямой в координатах

* **1. Вычисление длины отрезка АВ.**

Дано: А(x_1), В(x_2).

Найти АВ.

Решение:

$$\rho(A,B)=|x_2-x_1|$$

Задачи на прямой в координатах

* **2. Вычисление координаты середины отрезка.**

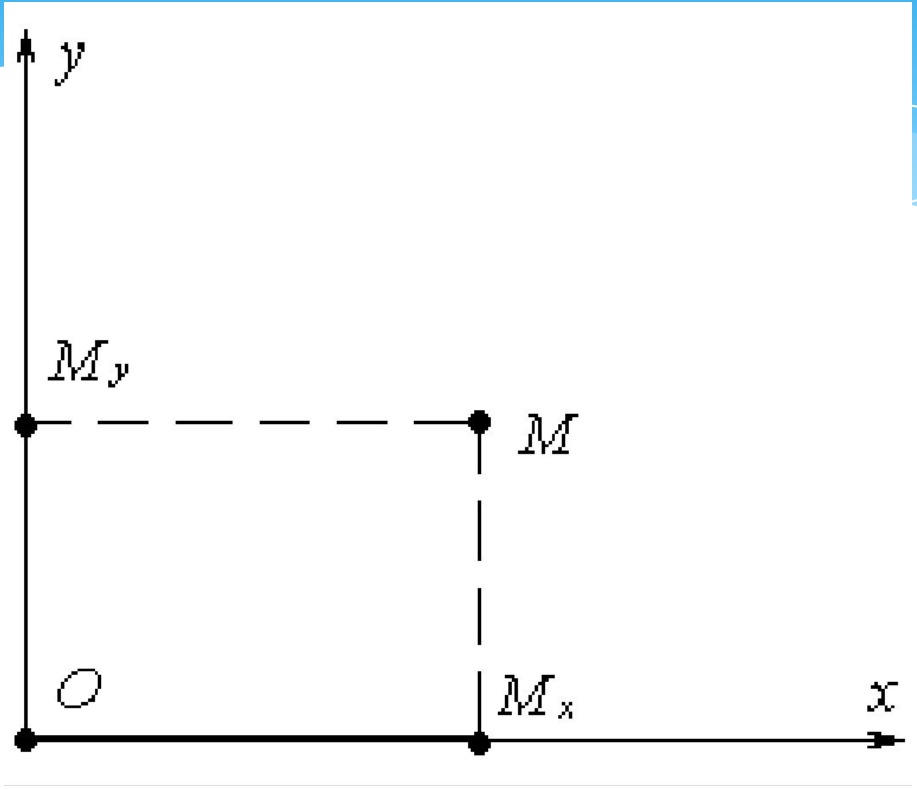
Дано: $A(x_1)$, $B(x_2)$, C – середина отрезка AB.

Найти координату C.

Решение:

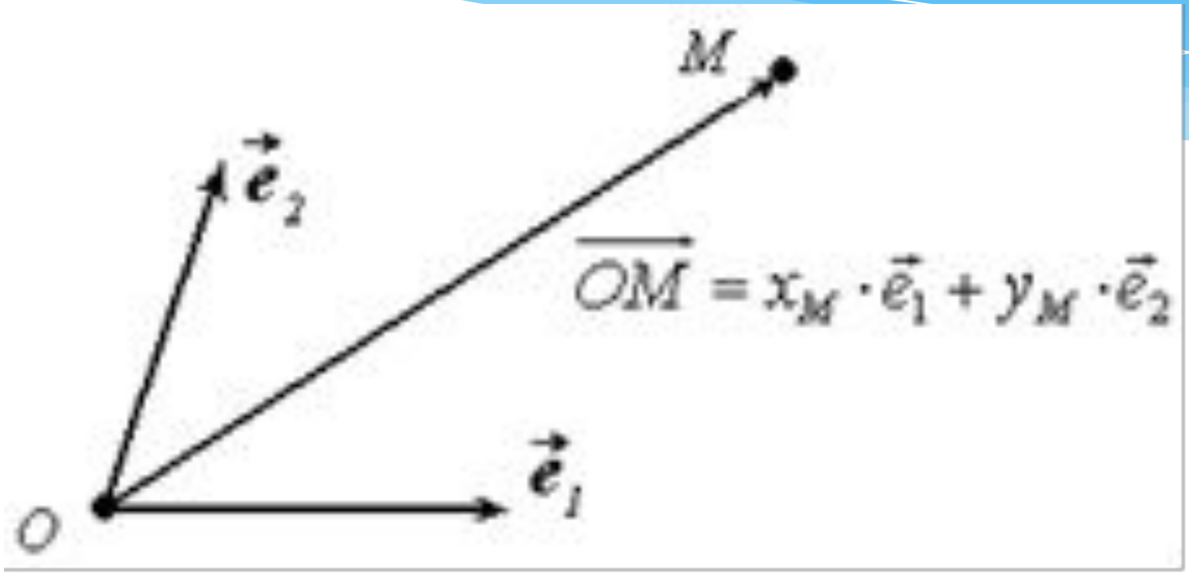
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Координаты точки на плоскости



Определение координат
точки методом проекций на оси.

Координаты точки на плоскости



Определение координат точки через координаты ее радиус-вектора.

Деление отрезка пополам.

Дано: A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),C(x, y) – середина отрезка AB.

Найти координаты C.

Решение:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Расстояние между точками

Дано: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

Найти AB.

Решение:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Некоторые свойства векторов

* ***Коллинеарность векторов***

* **Первый признак:** $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

* **Второй признак:** $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Некоторые свойства векторов

* ***Вычисление координат вектора по координатам его начала и конца.***

$$\overline{AB}\{x_B - x_A; y_B - y_A\}$$

Некоторые свойства векторов

* ***Вычисление длины вектора и длины отрезка***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Некоторые свойства векторов

* *Скалярное произведение векторов в прямоугольной системе координат*

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Некоторые свойства векторов

* ***Признак перпендикулярности векторов:***

  два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Некоторые свойства векторов

* **Вычисление угла между векторами.**

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

Некоторые свойства векторов

* **Вычисление площади параллелограмма, построенного на двух векторах.** $\vec{a}\{a_1, a_2\}, \vec{b}\{b_1, b_2\}$

$$S = \left| a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \right|$$

Уравнения прямой и отрезка

* *Параметрические уравнения прямой.*

$$x = a_1 \cdot t + x_0$$

$$y = a_2 \cdot t + y_0,$$

Уравнения прямой и отрезка

* *Канонические уравнения прямой.*

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}$$

Уравнения прямой и отрезка

* *Общее уравнение прямой.*

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Уравнения прямой и отрезка

* ***Условие перпендикулярности двух прямых, заданных как графики линейных функций.***

$$y = k_1 \cdot x + b_1 \qquad y = k_2 \cdot x + b_2$$

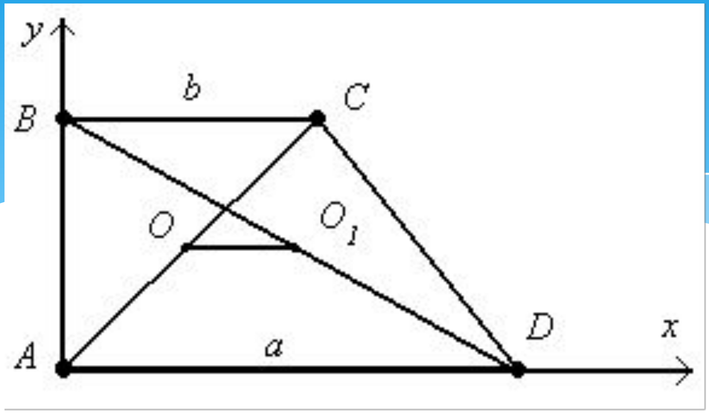
$$\vec{a}_1\{1, k_1\} \qquad \vec{a}_2\{1, k_2\}$$

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \qquad k_1 \cdot k_2 = -1$$

Уравнение окружности

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Примеры решения задач



Задача 1. ***Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.***

Решение. 1. Введем систему координат как указано на рисунке 3. Тогда вершины трапеции будут иметь координаты: A(*0,0*), B(*0,y*), C(*b,y*) и D(*a,0*). (*y* – высота трапеции, AB).

2. Найдем координаты середин диагоналей. Для точки O,

$$x_O=\frac{0+b}{2}=\frac{b}{2};\ y_O=\frac{0+y}{2}=\frac{y}{2}$$

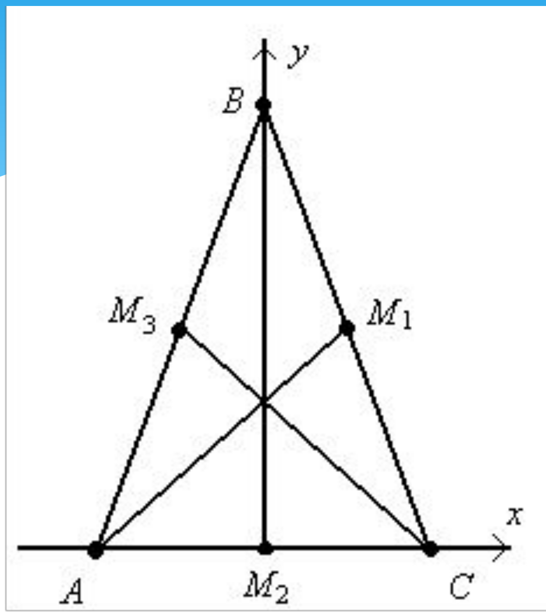
для точки O_1:

$$x_{O_1}=\frac{0+a}{2}=\frac{a}{2};\ y_{O_1}=\frac{0+y}{2}=\frac{y}{2}$$

По формуле найдем расстояние между точками O и O_1:

$$|OO_1|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)^2}=\frac{a-b}{2}$$

Примеры решения задач



Задача 2. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.

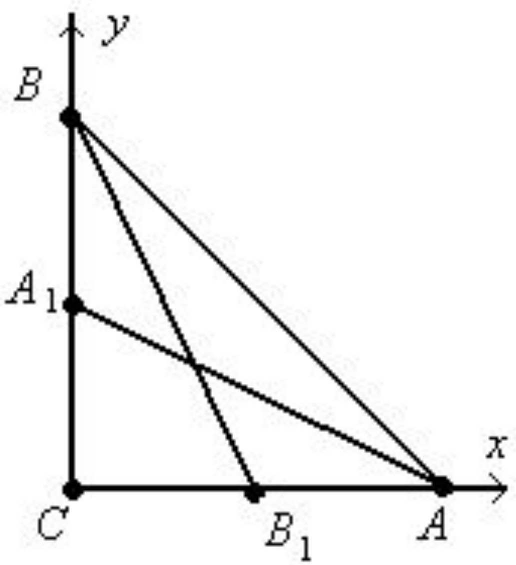
Решение. 1. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 4. В этой системе вершины треугольника будут иметь координаты:
A(-40,0), B(0, 160), C(40,0), а точка M_2(0,0).

$$x_{M_3} = \frac{0+(-40)}{2} = -20; \; y_{M_3} = \frac{160+0}{2} = 80 \qquad x_{M_1} = \frac{0+40}{2} = 20; \; y_{M_1} = \frac{160+0}{2} = 80$$

Вычислим длины отрезков AM_1 и CM_3, используя формулу (6). Для AM_1 получим:

$$|AM_1| = \sqrt{(20-(-40))^2 + (80-0)^2} = 100\ (\quad) \qquad |AM_1| = |CM_3| = 100\ (\quad)$$

Примеры решения задач



Задача 3. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы острых углов. Вычислите косинус угла между ними.

Решение. 1. Введем систему координат так, как показано на рисунке 5. В этом случае Вершины треугольника будут иметь координаты: C(0,0), A(*a*,0), B(0,*a*), а середины катетов (Здесь *a* – длина катета.):

$$B_1\left(\frac{a}{2},0\right);\ A_1\left(0,\frac{a}{2}\right)$$

2. По формуле (4) вычислим координаты векторов

$$\overrightarrow{AA_1}=\left(0-a;\frac{a}{2}-0\right)=\left(-a;\frac{a}{2}\right) \qquad \overrightarrow{BB_1}=\left(\frac{a}{2}-0;0-a\right)=\left(\frac{a}{2};-a\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1}\right)=\frac{(-a)\cdot\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot(-a)}{\sqrt{(-a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+(-a)^2}}=-\frac{4}{5}$$

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

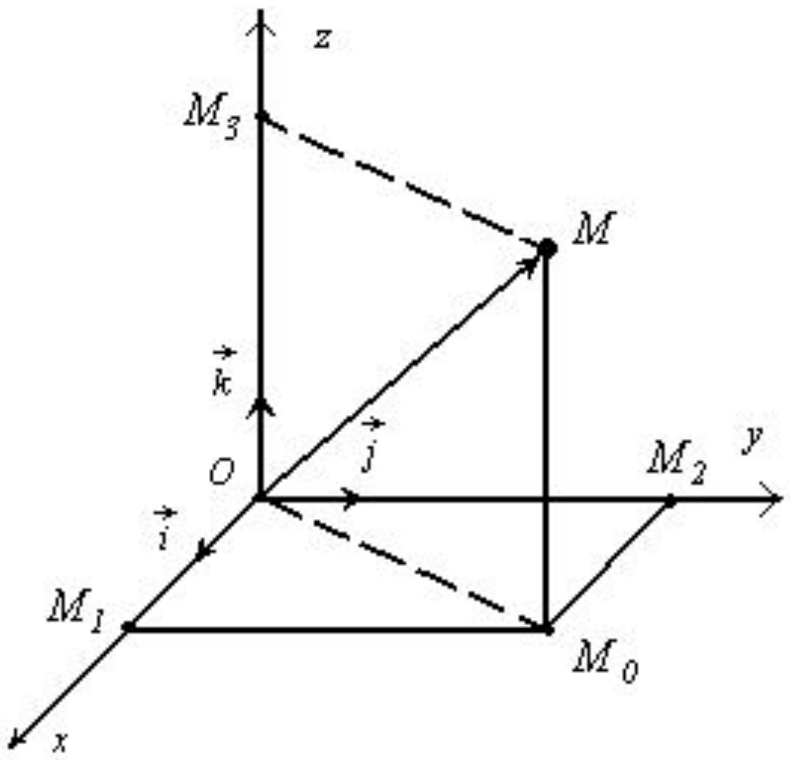


Рисунок 1

Основные формулы

* **Координаты вектора по координатам его начала и конца определяются так: если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$**

Основные формулы

* **Скалярное произведение векторов = (a_1, a_2, a_3) и = (b_1, b_2, b_3) в координатах равно:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Основные формулы

* **Длина вектора** $= (a_1, a_2, a_3)$ **вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Основные формулы

- **Угол между векторами = (*a_1, a_2, a_3*) и = (*b_1, b_2, b_3*) из определения скалярного произведения**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Основные формулы

- **Угол между векторами = (a_1, a_2, a_3) и = (b_1, b_2, b_3) из определения скалярного произведения**

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Основные формулы

* **Расстояние между двумя различными точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ равно**

* $\rho(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Основные формулы

- **Уравнение сферы с центром в точке С (x_0, y_0, z_0) и радиусом r имеет вид:**

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

Основные формулы

* **Координаты точки $M(x,y,z)$ – середины отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и**
* **$M_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_1 \neq M_2$ находятся по формулам:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Основные формулы

* **Условие коллинеарности векторов = (a_1, a_2, a_3) и = (b_1, b_2, b_3) имеет вид**

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_3}{c_3}$$

Примеры решения задач

Задача 1. *В системе координат* $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *написать уравнения прямой d, заданной*

1) *точкой* $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in d$ *и направляющим вектором* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *;*
2) *двумя различными точками* $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d$.

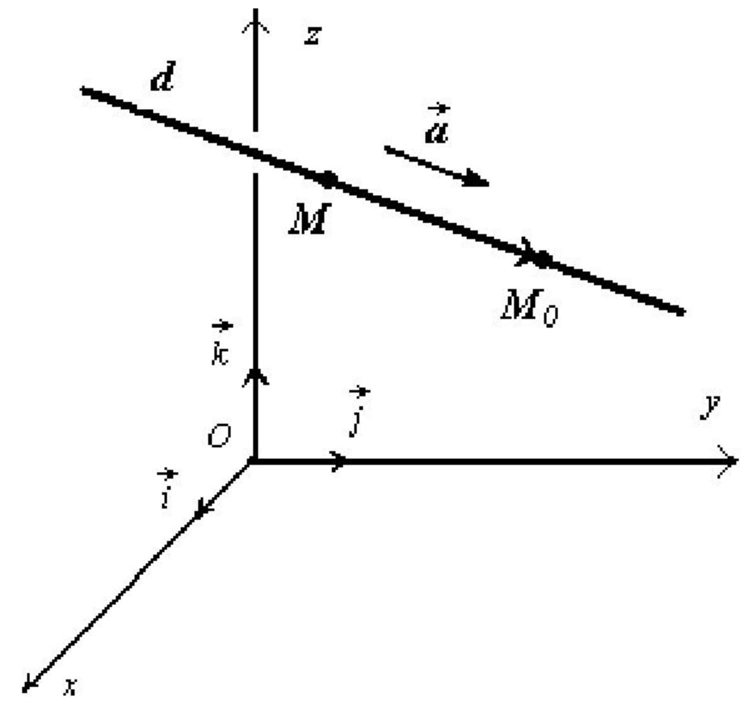


Рисунок 1

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, то

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Примеры решения задач

Задача 4. *Найти угол между прямой d и плоскостью π в системе координат* $R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, *если известны уравнения этой прямой и плоскости:*

$$d:\quad \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3};\qquad \pi:\quad Ax+By+Cz+D=0,\ \text{где } A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

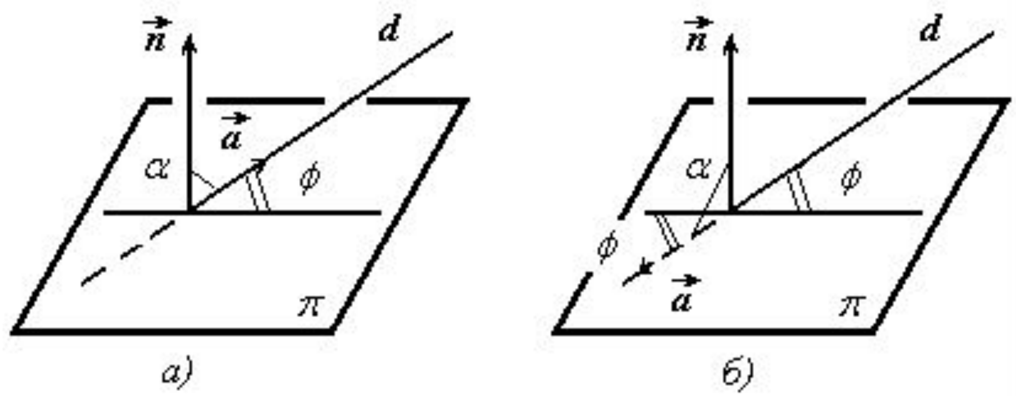


Рисунок 1

$$\sin\varphi=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

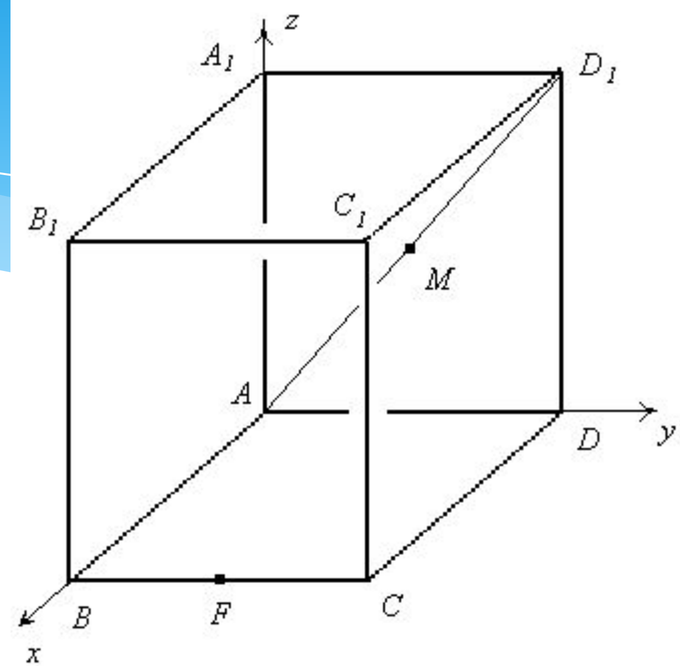
Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

* Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
* Находим координаты необходимых для нас точек.
* Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
* Переходим от аналитических соотношений к геометрическим

Примеры решения задач

Задача 5. *В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра имеют следующую длину: $AB=8$, $AD=6$, $AA_1=12$. Пусть M – середина отрезка DA_1, а F – центр стороны BC.*

1.Введите систему координат, с началом в точке A и координатными осями, направленными по лучам AB, AD, и AA_1- соответственно, и определите координаты всех вершин параллелепипеда и точек M и F.
2.Составьте уравнения прямых FD_1 и BM.
3.Определите угол между этими прямыми.
4.Найдите координаты вектора, перпендикулярного плоскости AD_1F.
5.Определите угол между этой плоскостью и прямой BM.



Рисунок

Примеры решения задач

Решение. 1). Определить координаты вершин параллелепипеда в предложенной системе координат несложно: у нижних вершин: A(0,0,0), B(8,0,0), C(8,6,0), D(0,6,0). Для верхних вершин две первых координаты совпадают с координатами нижних, а третья равна 12: $A_1(0,0,12)$, $B_1(8,0,12)$, $C_1(8,6,12)$, $D_1(0,6,12)$. Найдем теперь координаты точек M и F. Используем известную из 9 класса формулу для вычисления координат середины отрезка. Для этого нужно взять полусуммы соответствующих координат концов отрезка. Получим:

$$M:\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+6}{2},\frac{12+0}{2}\right)=(0,3,6),$$

$$F:\left(\frac{8+8}{2},\frac{0+6}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(8,3,0).$$

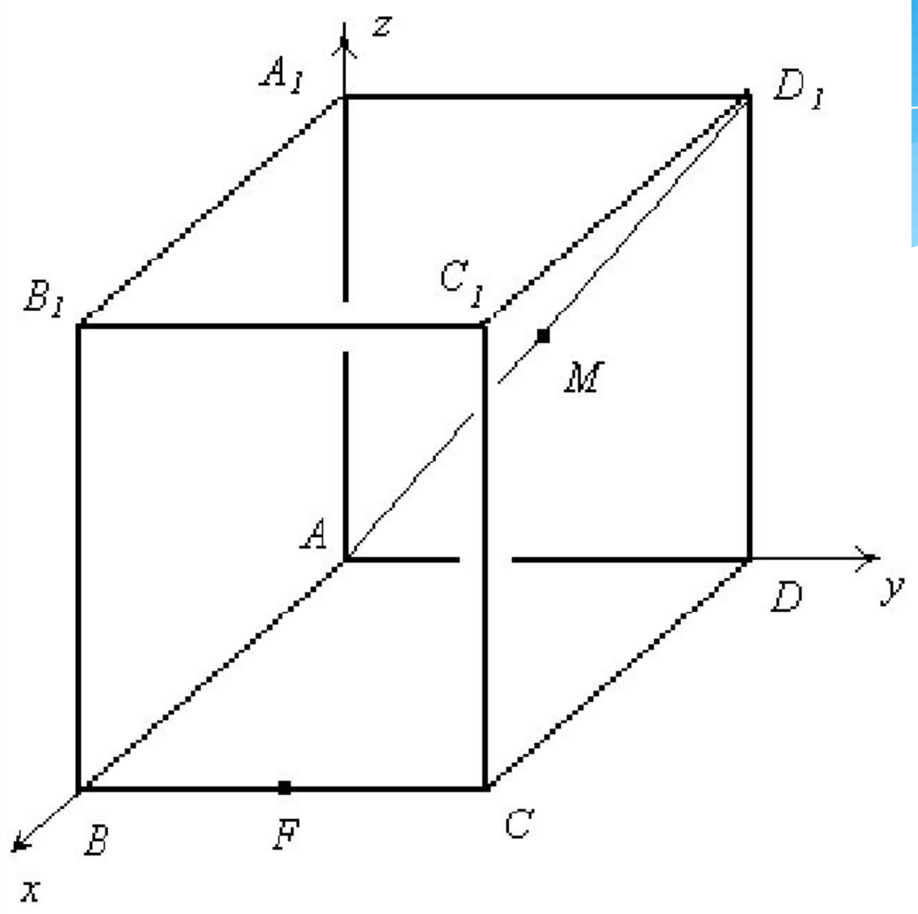


Рисунок 1

Примеры решения задач

2) Составим уравнения прямых, используя формулы (11):

$$FD_1:\ \frac{x-0}{8-0}=\frac{y-6}{3-6}=\frac{z-12}{0-12}\Rightarrow\frac{x-0}{8}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-12}{-12},$$

$$BM:\ \frac{x-0}{8-0}=\frac{y-3}{0-3}=\frac{z-6}{0-6}\Rightarrow\frac{x-0}{8}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-6}{-6}.$$

3) Угол между прямыми определим как угол между их направляющими векторами с помощью формулы (12). Учитывая, что направляющие векторы имеют координаты: $\vec{a}=\{8,-3,-12\}$, $\vec{b}=\{8,-3,-6\}$.

$$\cos\varphi=|\cos\alpha|=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}=\frac{|8\cdot 8+(-3)(-3)+(-12)(-6)|}{\sqrt{8^2+(-3)^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{8^2+(-3)^2+(-6)^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{145}{\sqrt{217}\cdot\sqrt{109}}.$$

Примеры решения задач

4) Найдем координаты вектора, перпендикулярного плоскости AD_1F. Для этогс используем признак перпендикулярности векторов: *два вектора перпендикулярны если их скалярное произведение равно нулю*. Пусть интересующий нас вектор $\vec{n}$ имеет координаты {x,y,z}. Векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AF}$ лежат в интересующей нас плоскости, и имеют координаты {0,6,12} и {8,3,0} соответственно. Используем формулу (3) для вычисления скалярных произведений в координатах, приравняем эти произведения к нулю и получим систему уравнений:

$\begin{cases} 0x+6y+12z=0 \\ 8x+3y+0z=0 \end{cases}$, выразим в этой системе x и z через y: $x=-\frac{3}{8}y, \quad z=-\frac{1}{2}y$. Как мы видим, получилось множество векторов, перпендикулярных данной плоскости координаты которых зависят от параметра y. Выберем один из них, положив, для удобства, что y=-8. Итак $\vec{n}$={3,-8,4}.

5) Нам осталось определить угол между прямой BM и плоскостью AD_1F. Для этогс мы используем формулу (16): $\sin\varphi=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$. Здесь A,B и C – пс сути, координаты вектора $\vec{n}$={3,-8,4}, а $\{a_1,a_2,a_3\}$ – координаты направляющегс вектора прямой BM: $\vec{b}=\{8,-3,-6\}$. Подставив все эти значения в формулу, получим:

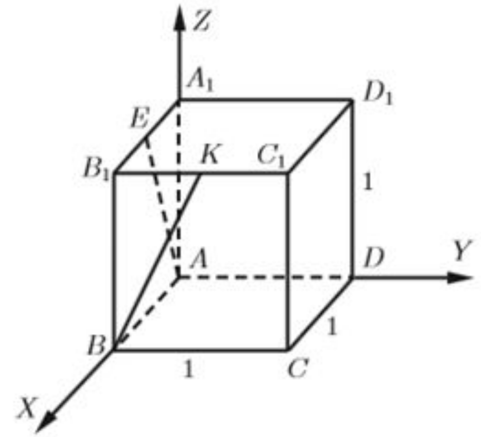
$$\sin\varphi=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\frac{|3\cdot8+(-8)(-3)+4(-6)|}{\sqrt{3^2+(-8)^2+4^2}\sqrt{8^2+(-3)^2+(-6)^2}}$$

$$\sin\varphi=\frac{12}{\sqrt{89}\sqrt{109}}.$$

Примеры решения задач

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Если в задаче С2 вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж:



Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые AE и BK — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$. Для этого нужны их координаты.

$A\ (0;\ 0;\ 0)$
$B\ (1;\ 0;\ 0)$
$E\ (\frac{1}{2};\ 0;\ 1)$
$K\ (1;\ \frac{1}{2};\ 1)$

Запишем координаты векторов:
$\overrightarrow{AE}\ (\frac{1}{2};\ 0;\ 1)$
$\overrightarrow{BK}\ (0;\ \frac{1}{2};\ 1)$
и найдем косинус угла между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BK}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

* Многие задачи в математике решаются методом координат, суть которого состоит в следующем:

* Задавая фигуры уравнениями (неравенствами) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяем алгебру к решению геометрических задач;

* Пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические соотношения геометрически, применяя геометрию к решению алгебраических задач.

СПАСИБО

ЗА

ВНИМАНИЕ!