

Ох уж, эти проценты

Авторы: Алибаева Р.К., учитель математики,
Бондарева Л.А. учитель информатики,
МКОУ Амурская СОШ



Из истории процентов

Слово «процент» происходит от латинского procentum, что буквально означает «на сотню». В популярной литературе возникновение этого термина связывается с внедрением в Европе десятичной системы счисления в XV в. Однако уже в «Дигестах Юстиниана», датируемых V в., мы находим вполне современное употребление процентов.





- По-видимому, процент возник в Европе вместе с ростовщичеством как предтеча десятичной системы счисления. Разрыв во времени заставляет вспомнить современные теории о лишних веках общепринятой хронологии.
- Употребление термина «процент» в качестве нормы русского языка начинается, вероятно, с конца XVIII в. Об этом свидетельствует сравнительный анализ текстов двух фундаментальных учебников по математике Ефима Войтяховского (первое издание 1795 г.) и Т.Ф. Осиповского (первое издание 1802 г.).






Задача 1. Купец торговал положенными в торг 100 рублями с убытком, так что оставшаяся сумма после первого года без $\frac{4}{25}$ всего (начального) капитала равна оставшейся сумме после двух лет.


Спрашивается: по сколько он получал убытка от 100 руб. каждый год? *Ответ:* 80 или 20 руб.



- 
- **Задача 2.** Отдан в ломбард капитал a по p процентов; проценты сии в ломбард оставляются, причисляя их к капиталу, и сверх сего вносится еще ежегодно по b руб. Спрашивается: сколь велик весь капитал будет по истечении n лет?


Ответ: $k^n \cdot a + ((k^n - 1) / (k - 1)) \cdot b$, где $k = 1 + p/100$.



- 
- **Задача 3.** Положим, например, что отдан в ломбард капитал, состоящий из 10 000 рублей по 5 процентов, и ежегодно вносится по 800 рублей. Спрашивается: после 12 лет сколь велик капитал сей будет?

Ответ: 30 692 руб. 26 коп.





Знак % произошел, как предполагается, благодаря опечатке. В рукописях procentum часто заменяли словом «cento» (сто) и писали его сокращенно – sto. В 1685 году в Париже была напечатана книга – руководство по коммерческой арифметике, где по ошибке наборщик вместо sto набрал %.



Понятие процента



Проценты употребляются для сравнения однородных *положительных количеств и только для этого.*

Один процент – это, по определению, одна сотая:
 $1\% = 1/100$.

Соответственно, $p\% = p/100$.

Один процент от количества А – это, по определению, одна сотая часть от количества А:
 1% от А равен $1/100$ А.

Соответственно, $P\%$ от А равен $p/100$ А, (1), где p – безмерное число. Отметим, что предлог *от* часто опускается.





Вместо «В составляет р процентов от А» говорят еще: «Процент В от А есть р», то есть слово «процент» может означать любое количество процентов, но словосочетание «один процент» всегда означает именно одну сотую, так же как словосочетание «двадцать один процент» всегда означает именно двадцать одну сотую и т.д.

10% 20% 30%

40% 50% 60%

70% 80% 90%

100%



Вычисление количеств по процентам

Первая группа шаблонных вопросов относится к той ситуации, когда даны количество A и некоторый процент p . требуется найти количество, которое этот процент выражает.

Вопрос К1. Каково количество, составляющее $p\%$ от A ?

Формула ответа: $p/100 A$.

Обсуждение. Здесь ключевое слово *от*. То, что стоит за ним, принимается за базу в 100% и подвергается умножению на коэффициент $k=p/100$. вопрос К1 может звучать в несколько другой форме, например, так:

найти $p\%$ от A ;

или так:

найти $p\%$ количества A .





Ключевое слово – предлог **от** – в последней формулировке вопроса К1 отсутствует. Однако его можно вставить без искажения смысла вопроса и причем вставить в одно единственное место:

найти $r\%$ от количества A .

Таким образом, и при явном и при неявном участии ключевого слова **от** в формулировке вопроса К1 оно имеет свое, однозначно определяемое место. Чтобы понять некоторый вопрос на проценты как вопрос К1, нужно это место найти и следующее за ним количество принять за базу в 100%.

Для быстрого ответа на вопрос К1 нужно знать, что: $5\% = 1/20$, $10\% = 1/10$, $20\% = 1/5$,



$25\% = 1/4$, $50\% = 1/2$, $75\% = 3/4$



Задача 4. В городе N состоялись выборы в городскую думу, в которых принимали участие 75% избирателей. Только 10% от числа принявших участие в выборах отдали голоса партии «зеленых». Сколько жителей проголосовали за эту партию, если в городе всего 1 миллион избирателей?

Решение. Здесь мы должны дважды применить формулу ответа на вопрос K1. По условию, в выборах приняли участие $0,75 \cdot 1000 \text{ тыс.} = 750 \text{ тыс. чел.}$ От них 10% – это $0,1 \cdot 750 \text{ тыс.} = 75 \text{ тыс.}$ *Ответ:* 75 000 тыс.

Задача 5. Из 750 учащихся школы 80% занимаются в различных кружках, из них 5% – в радиокружке. Сколько учащихся занимается в радиокружке?

Решение. Дважды применив формулу K1, получим $5/100 (80/100 \cdot 750) = 30$. *Ответ:* 30.



Задача 6. Длина дистанции трехдневной велогонки

была 480 км. В первый день велогонщики проехали 25% всего пути, а во второй день 55% оставшегося пути. Сколько километров проехали велогонщики в третий день?

Решение. Здесь нужно дважды применить формулу К1. В первый день велогонщики проехали $1/4 \cdot 480 = 120$ км.

Оставшийся путь составил $480 - 120 = 360$ км. Тогда, по условию, во второй день велогонщики проехали $55/100 \cdot 360 = 198$ км. В результате в заключительный третий день велогонщики проехали $480 - 120 - 198 = 162$ км. *Ответ:* 162 км.

Вопрос К2. Каково количество, $p\%$ от которого есть А?

Формула ответа: $100/p \cdot A$.

Обсуждение. Вопросы К1 и К2 родственны. Пусть искомое количество (в данном случае – это стопроцентная база) есть x . Тогда мы находимся в ситуации вопроса К1: $A = p/100 \cdot x$.

Отсюда получаем формулу ответа на вопрос К2.

Следует владеть и другим способом рассуждения при ответе на вопрос К2: если на А приходится $p\%$, то один процент от неизвестного количества есть A/p , соответственно неизвестное количество (искомая стопроцентная база) есть $100 \cdot A/p$.



Задача 7. При помоле пшеницы получается 80% муки.

Сколько пшеницы нужно смолоть, чтобы получить 480 кг пшеничной муки?

Решение. По формуле **К2** искомое количество пшеницы есть $100/80 \cdot 480 = 600$ кг. *Ответ:* 600 кг.

Вопрос **К3.** Каково количество, большее чем A , на $p\%$?

Формула ответа: $(1 + p/100) A$.

Обсуждение. Здесь ключевое слово *чем*. То, что стоит за ним, принимается за базу в 100%. В данном случае стопроцентная база – это A . Разница между неизвестным количеством и базой составляет по условию $p\%$ от A , что по формуле ответа на вопрос **К1** дает $p/100 A$.





В результате искомое количество есть $A + p/100 A = (1 + p/100) A$. Вопрос **К3** может звучать в несколько другой форме, например, найти количество, превосходящее A на $p\%$.

Ключевое слово – *чем* – в последней формулировке вопроса **К3** отсутствует. Чтобы понять некоторый вопрос на проценты как вопросы **К3**, нужно переформулировать некоторый вопрос с участием слова *чем* и следующее за союзом *чем* количество принять за базу в 100%.

Примером кратного употребления вопроса **К3** является вышеприведенная задача 2 и ее частный случай – задача 3.

Вопрос **К4**. Каково количество, меньшее *чем* A , на $p\%$?
Формула ответа: $(1 - p/100) A$.





Здесь ключевое слово *чем*.

То, что стоит за ним, так же, как в предыдущем случае, принимается за стопроцентную базу и т.п.

Если ответ на вопрос **К4** приведет к отрицательному числу, то искомое количество следует считать несуществующим, а сам вопрос некорректным.

Приведенная выше задача 1 решается с помощью тройного применения вопроса **К4**. в самом деле, пусть p – убыток купца от 100 руб. в каждый год.

Тогда, по условию, получим уравнение $(1 - p/100) \cdot A - 4/25 \cdot A = (1 - p/100)^2 A \Leftrightarrow p^2 - 10^2 \cdot p + 16 \cdot 10^2 = 0 \Leftrightarrow p = 50 \pm 30$.

Чтобы привить устойчивый навык быстрого разрешения вопросов **К1 – К4**, можно предложить учащимся самостоятельно заполнить карандашом следующую таблицу. Каждый засекает время и все действия производит в уме!



Тренинг-таблица К (с ответами)



р%	А	Количество, составляющее р% от А	Количество, р% которого есть А	Количество, больше А на р%	Количество, меньше А на р%
5	80	4	1600	84	76
10	60	6	600	66	54
20	120	24	600	144	96
25	36	9	144	45	27
50	42	21	84	63	21
75	12	9	16	21	3
90	90	81	100	171	9





Задача 8. В одном городе Канады 70% жителей

знают

французский язык и 80% - английский язык.

Сколько

процентов жителей этого города знают оба языка?

Алгебраическое решение. Исходим из того, что каждый житель города знает хотя бы один из двух языков – английский или французский. Пусть x жителей знают только английский, y – только французский, z – оба языка. Тогда можно дважды увидеть вопрос **П1** и, применив соответствующую формулу, получить

$$(x+y) / (x+y+z) = 0,8, (y+z) / (x+y+z) = 0,7.$$

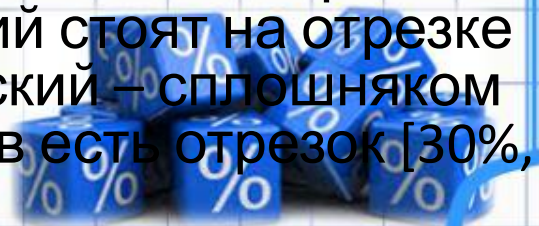
Сложив оба эти равенства, получим

$$1 + z / (x+y+z) = 1 + 0,5 \Leftrightarrow z / (x+y+z) \cdot 100\% = 50\%,$$

что по формуле **П1** дает искомый ответ: 50%.

Геометрическое решение. Разместим всех жителей города на отрезке 100% так, что знающие английский стоят на отрезке сплошняком слева, а знающие французский – сплошняком справа. Тогда общая часть этих множеств есть отрезок [30%, 80%] «протяженностью» в 50%

(убедитесь в этом, сделав рисунок).





Задача 9. Из 20-процентного раствора поваренной соли испарилось 25% имеющейся в растворе воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.

Решение. Пусть m – начальная масса раствора. По формуле **К1** соль составляет $c = 20/100 \cdot m$. Тогда по формуле **К1** останется воды $b = (100-25) / 100 \cdot (m-c) = 3/4 \cdot (m - 1/5 \cdot m) = 3/5 \cdot m$. Теперь по формуле **П1** искомый процент равен $c / (b+c) \cdot 100\% = 1/4 \cdot 100\% = 25\%$. *Ответ: 25%.*

Вопрос **П2.** На сколько процентов A больше, чем B ?

Формула ответа: $(A-B) / B \cdot 100\%$.

Обсуждение. Здесь ключевое слово *чем*. То, что стоит за ним, принимается за стопроцентную базу и записывается в знаменатель.





Задача 11. Во время предвыборной кампании социологический центр «ЗЕВС» поднял цену социологических исследований на 300%. Но отсутствие спроса заставило вернуться к прежнему уровню цен. На сколько процентов была снижена цена?

Решение. Пусть a – первоначальная цена социологических исследований. Тогда по формуле **КЗ** цена после повышения станет равна $(1 + 300/100) a = 4a$. По формуле **ПЗ** процент последующего снижения цены окажется равен $(4a - a) / 4a \cdot 100\% = 75\%$. *Ответ:* 75%.



Тренинг-таблица II

A	B	Сколько % составляет A от B	Сколько % составляет B от A	На сколько % A больше, чем B	На сколько % B больше, чем A	На сколько % A меньше, чем B	На сколько % B меньше, чем A
1	2	50	200	-50	100	50	-100
4	1	400	25	300	-75	-300	75
4	5	80	125	-20	25	20	-25
15	20	75	400/3	-25	100/3	25	-100/3
50	10	500	20	400	-80	-400	80





Литература

Барабанова О.О. Задачи на проценты как
проблема нормы словоупотребления.
//Математика в школе. №5. 2003, стр. 50-54.

