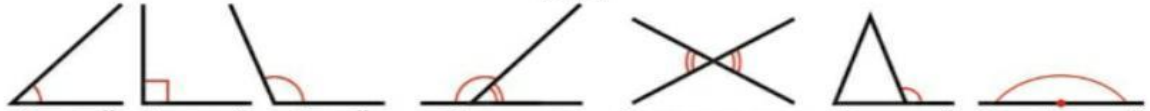
Геометрия. Основная теория для подготовки к ОГЭ

ГЕОМЕТРИЯ В КАРТИНКАХ

УГЛЫ

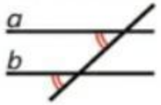


Острый *меньше 90°* | Прямой *равен 90°* | Тупой *больше 90°* | Смежные *в сумме образуют угол 180°* | Вертикальные *вертикальные углы равны* | Внешний | Развёрнутый *равен 180°*

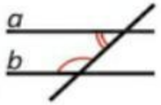
Признаки параллельности прямых

1. Внутренние накрест лежащие углы равны

2. Соответственные углы равны



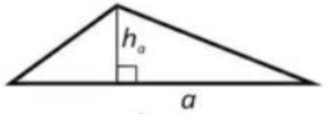
3. Внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°



Сумма углов многоугольников

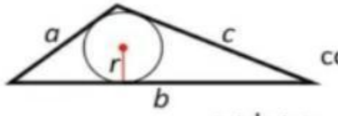
Сумма углов треугольника = 180°
Сумма углов четырёхугольника = 360°
Сумма углов пятиугольника = 540°
Сумма углов шестиугольника = 720°

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\alpha$

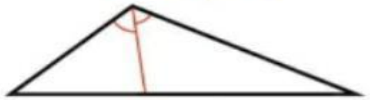


$S = p \cdot r$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$

Прочие соотношения

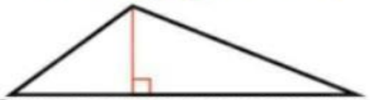
$r = \frac{2 \cdot S}{a+b+c}$

Биссектриса



Биссектриса – это луч, с началом в вершине угла, делящий угол на два равных угла

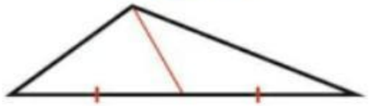
Высота треугольника



Высота в остроугольном треугольнике

Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону

Медиана

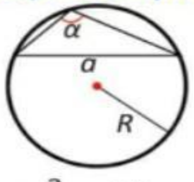


Медиана – это луч, с началом в вершине угла, делящий противоположную сторону пополам

Теорема о медиане, проведённой к гипотенузе

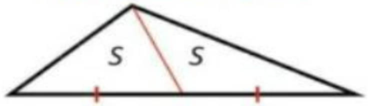
Медиана, проведённая к гипотенузе равна половине гипотенузы

Теорема синусов



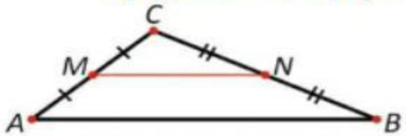
$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (на два треугольника с равными площадями)

Средняя линия треугольника



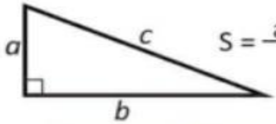
1. $MN \parallel AB$
2. $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними.
2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.
3. По трём сторонам.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

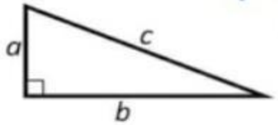


$S = \frac{a \cdot b}{2}$

Прочие соотношения

$r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$ $\quad R = \frac{c}{2}$

Теорема Пифагора



Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$c^2 = a^2 + b^2$

Синус

$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

Косинус

$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

Тангенс

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Котангенс

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Свойство острых углов

В прямоугольном треугольнике, синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла

$\sin A = \cos B$

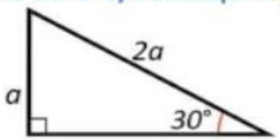
$\cos A = \sin B$

Аналогично тангенс одного острого угла равен котангенсу другого острого угла

$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$

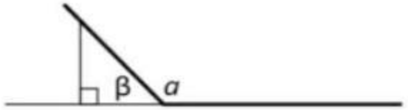
$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B$

Теорема о катете, лежащем против 30°



Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.

Свойство смежных углов

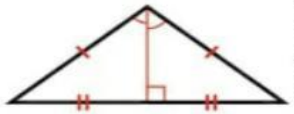


$\sin\alpha = \sin\beta$
$\cos\alpha = -\cos\beta$
$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$
$\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$

Чтобы найти sin или cos, tg или ctg, нужно найти соответствующую функцию для смежного угла.

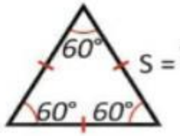
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Теорема о медиане, биссектрисе, высоте



В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию является ещё и медианой, и биссектрисой

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$S = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$

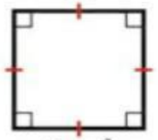
Прочие соотношения

$R = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}$ $h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$

$r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6}$ $h = 1{,}5 \cdot R$

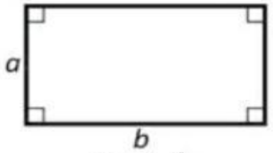
$h = 3 \cdot r$

КВАДРАТ



$S = a^2$

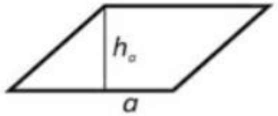
ПРЯМОУГОЛЬНИК



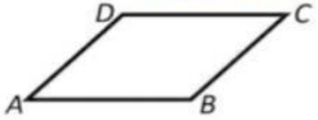
$S = a \cdot b$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

$S = a \cdot h_a$



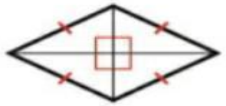
Теорема о сумме углов у любой стороны

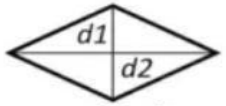


В параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°.

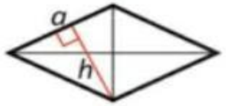
$\angle A + \angle B = 180°$
$\angle B + \angle C = 180°$
$\angle C + \angle D = 180°$
$\angle D + \angle A = 180°$

РОМБ





$S = \frac{d1 \cdot d2}{2}$

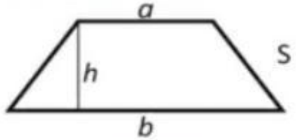


$S = a \cdot h$

$S = a^2 \cdot \sin\alpha$

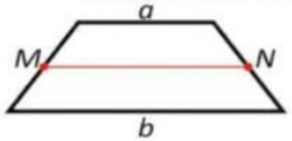
$S = 2 \cdot a \cdot r$

ТРАПЕЦИЯ



$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$

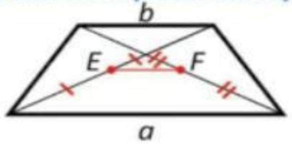
Средняя линия трапеции



1. MN || a || b
2. $MN = \frac{a + b}{2}$

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

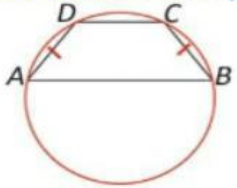
Теорема об отрезке на серединах диагоналей



$EF = \frac{a - b}{2}$

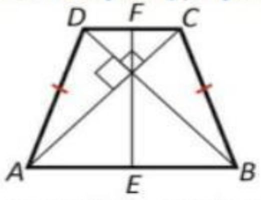
Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности оснований.

Теорема об описанной окружности



Если трапецию можно вписать в окружность, то эта трапеция – равнобедренная.

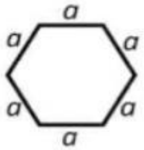
Теорема о перпендикулярных диагоналях



$h = \frac{a + b}{2}$

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.

ШЕСТИУГОЛЬНИК

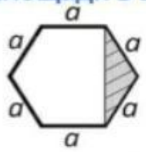


$S = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$

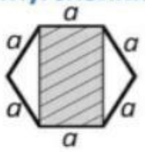
Прочие соотношения

$R = a;\ r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$

Площади в шестиугольнике

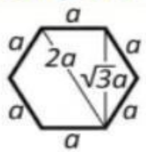


$S_{тр} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$



$S_{пр} = \sqrt{3} \cdot a^2$

Диагонали в шестиугольнике

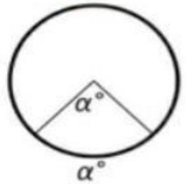


ОКРУЖНОСТЬ

Длина окружности $C = 2 \cdot \pi \cdot R$

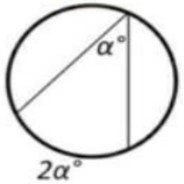
Площадь круга $S = \pi \cdot R^2$

Центральный угол



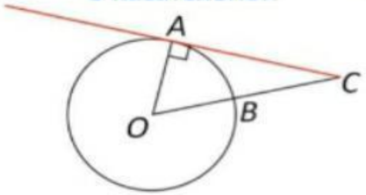
Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол



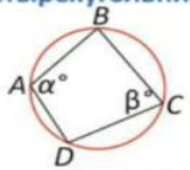
Вписанный угол равен половине градусной мере дуги, на которую он опирается.

Теорема о касательной



Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

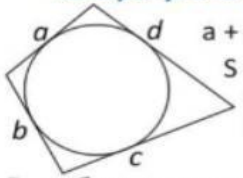
Теорема о вписанном четырёхугольнике



$\alpha + \beta = 180°$

В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Теорема об описанном четырёхугольнике



$a + c = b + d$

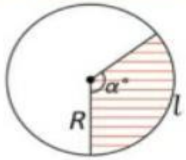
$S = p \cdot r$, где p – полупериметр

В любом описанном окружностью четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Теорема об отрезках касательных

Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

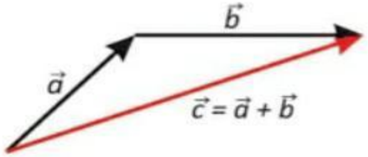
Круговой сектор



$S_{сектора} = \frac{l_{сектора} \cdot R}{2}$

$l_{сектора} = \frac{2 \cdot S_{сектора}}{R}$

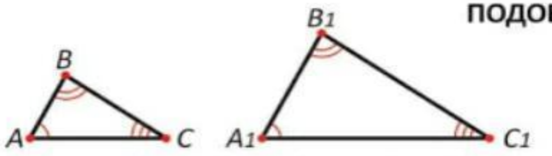
ВЕКТОРЫ



Сложение векторов

Даны два вектора. К концу первого пристраиваем начало второго. Теперь соединяем начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ПОДОБИЕ



$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

Признаки подобия треугольников

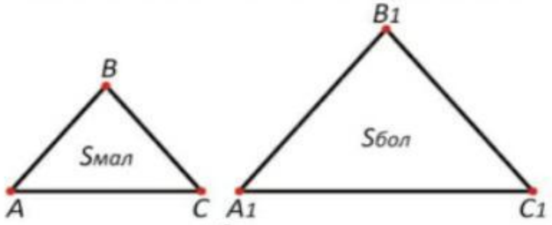
1. По двум равным углам.
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. По трём пропорциональным сторонам.

Отношения в подобных треугольниках

Отношение периметров, биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия.

(периметры) $\frac{P_{бол}}{P_{мал}} = k$ | (медианы) $\frac{m_{бол}}{m_{мал}} = k$ | (биссектрисы) $\frac{l_{бол}}{l_{мал}} = k$ | (высоты) $\frac{h_{бол}}{h_{мал}} = k$ | (сер. перпендикуляр) $\frac{h_{сер.бол}}{h_{сер.мал}} = k$

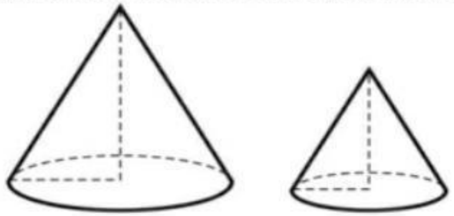
ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ



$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2$$

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ОБЪЁМОВ



$$\frac{V_{бол}}{V_{мал}} = k^3$$

Отношение объёмов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия.

ПЛАНИМЕТРИЯ В ФОРМУЛАХ

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Треугольники

Произвольный

(a, b, c – стороны, h_a – высота, опущенная на сторону a, p – полупериметр, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности)

Периметр $P = a + b + c$ | $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр

Площадь $S = \frac{1}{2} \cdot ah_a = \frac{1}{2} \cdot bh_b = \frac{1}{2} \cdot ch_c$ | $S = \frac{1}{2} \cdot ab \sin C$ | $S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$ | $S = \frac{abc}{4R}$

Высота $h_a = b \sin C$ | $h_a = \frac{2S}{a}$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{2S}{a+b+c}$ | $r = \frac{S}{p}$

Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ | $R = \frac{a}{2 \sin A}$ | $R = \frac{b}{2 \sin B}$ | $R = \frac{c}{2 \sin C}$

Дополнительные формулы $MN = \frac{1}{2} a$ – средняя линия, параллельная стороне a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ – теорема косинусов

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ – теорема синусов

Правильный (равносторонний)

Периметр $P = 3a$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$

Площадь $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ***Радиус описанной окружности*** $R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$

Высота $h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ ***Дополнительные формулы*** $R = 2r = \frac{2}{3} h$

Равнобедренный (a – основание, b – боковая сторона)

Периметр $P = a + 2b$ ***Высота*** $h_a = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}$

Площадь $S = \frac{1}{4} a\sqrt{4b^2 - a^2}$ ***Дополнительные формулы*** $h_b = a \sin B = a \sin C$

Прямоугольный

(a, b – катеты, c – гипотенуза, hc – высота, проведенная к гипотенузе, ac, bc – проекции катетов на гипотенузу)

Периметр $P = a + b + c$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{a+b-c}{2}$

Площадь $S = \frac{1}{2} ab$ | $S = \frac{1}{2} ch_c$ ***Радиус описанной окружности*** $R = \frac{c}{2}$

Высота $h_c = \frac{ab}{c}$ | $h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$

Дополнительные формулы $a^2 + b^2 = c^2$ – теорема Пифагора | $a = \sqrt{a_c \cdot c}$ | $b = \sqrt{b_c \cdot c}$

Четырёхугольники

Ромб

(a – сторона, h – высота, r – радиус вписанной окружности, α – острый угол ромба, d_1, d_2 – диагонали)

Периметр $P = 4a$ ***Площадь*** $S = a^2 \cdot \sin A$ | $S = a \cdot h$ | $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

Высота $h = a \cdot \sin A$ | $h = 2 \cdot r$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{h}{2}$ | $r = \frac{1}{2} a \cdot \sin\alpha$

Дополнительные формулы $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ | $d_1 = 2a \cos\frac{\alpha}{2}$ | $d_2 = 2a \sin\frac{\alpha}{2}$

Трапеция

(a, b – основания, c, d – боковыестороны, h – высота, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями, MN – средняя линия)

Периметр $P = a + b + c + d$ ***Высота*** $h = c \cdot \sin A$

Площадь $S = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$ | $S = MN \cdot h$ | $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$

Радиус вписанной окружности

В трапецию можно вписать окружность если $a + b = c + d$, тогда $r = \frac{h}{2}$

Радиус описанной окружности

Около р/б трапеции можно описать окружность.

Дополнительные формулы $MN = \frac{a+b}{2}$

Квадрат (правильный четырехугольник)
(a – сторона, d – диагональ)

Периметр $P = 4 \cdot a$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2}$

Площадь $S = a^2$ | $S = \frac{1}{2} \cdot d^2$

Радиус описанной окружности $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ | $R = \frac{d}{2}$

Дополнительные формулы $d = a\sqrt{2}$

Прямоугольник
(a, b – стороны, d – диагональ, φ – угол между диагоналями)

Периметр $P = 2 \cdot (a + b)$

Радиус описанной окружности $R = \frac{d}{2}$ | $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Площадь $S = a \cdot b$ | $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$

Дополнительные формулы $a^2 + b^2 = d^2$

Параллелограмм
(a, b – стороны, h_a, h_b – высоты, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями)

Периметр $P = 2 \cdot (a + b)$

Площадь $S = a \cdot b \sin A$ | $S = ah_a = bh_b$ | $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

Высота $h_a = b \cdot \sin A$ | $h_b = a \cdot \sin C$ | $h_a = \frac{S}{a}$ | $h_b = \frac{S}{b}$

Доп. формулы $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

Шестиугольник правильный
(a – сторона, $d_{большая}$, $d_{меньшая}$ – диагонали)

Периметр $P = 6 \cdot a$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$

Площадь $S = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Радиус описанной окружности $R = a$

Дополнительные формулы $d_{бол} = 2a$ | $d_{мал} = a\sqrt{3}$

ОКРУЖНОСТЬ и КРУГ

Окружность, круг
(R – радиус, d – диаметр, α – центральный угол, AB, CD – хорды, AB ∩ CD = M)

Длина окружности $C = 2\pi R$ | $C = \pi d$

Площадь круга $S = \pi R^2$ | $S = \frac{\pi d^2}{4}$

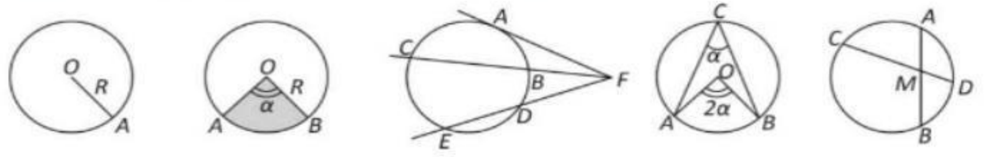
Длина дуги окружности $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$

Площадь кругового сектора $S_{кр.сек.} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

Касательная и секущие $FB \cdot FC = FD \cdot FE$ | $FA^2 = FB \cdot FC = FD \cdot FE$

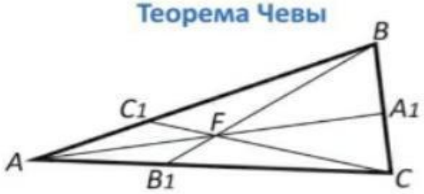
Вписанный и центральный углы $\angle AOB = 2\angle ACB$ | $\angle ACB = 90°$, если AOB – диаметр

Дополнительные формулы $d = 2R$ | $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

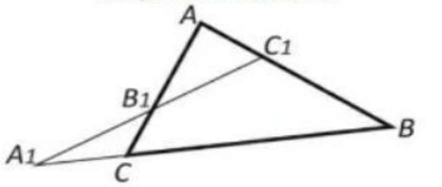
Теорема Чевы



Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

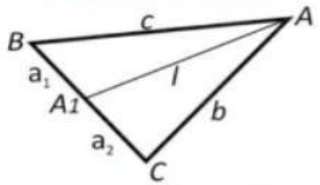
Теорема Менелая



Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда:

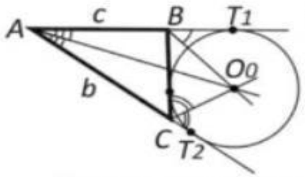
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$$

Теорема Стюарта



$AA_1 = l$, тогда $l^2 = \frac{b^2 \cdot a_1 + c^2 \cdot a_2}{a_1 + a_2} - a_1 \cdot a_2$

Центры вневписанных окружностей



$AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = p$

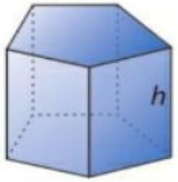
$BK = p - c$; $CK = p - b$

Центры вневписанных окружностей лежат в точках пересечения биссектрисы внутреннего и двух биссектрис внешних углов треугольника.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

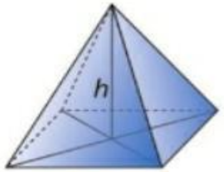
МНОГОГРАННИКИ

Обозначения: a – сторона основания, h – высота многогранника, l – апофема (высота боковой грани пирамиды), $P\perp$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, d – длина бокового ребра призмы, $S\perp$ – площадь перпендикулярного сечения призмы.



Призма

	Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Произвольная призма	—	$S_{бок} = P\perp \cdot d$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot h$ $V = S\perp \cdot d$
Прямая призма	—	$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$	$S_{полн} = P_{осн} \cdot h + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot h$
Правильная треугольная призма	$S_{осн} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$S_{бок} = 3 \cdot a \cdot h$	$S_{полн} = 3 \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$
Правильная четырех-угольная призма (прямоугольный параллелепипед)	$S_{осн} = a^2$	$S_{бок} = 4 \cdot a \cdot h$	$S_{полн} = 4 \cdot a \cdot h + 2 \cdot a^2$	$V = a^2 \cdot h$
Правильная шести-угольная призма	$S_{осн} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$S_{бок} = 6 \cdot a \cdot h$	$S_{полн} = 6 \cdot a \cdot h + 3 \cdot a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$

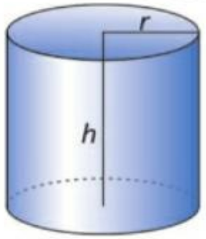


Пирамида

	Площадь основания	Площадь боковой поверх-ности	Площадь полной поверхности	Объем
Произвольная пирамида	—	—	$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$
Правильная треугольная пирамида	$S_{осн}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$	$S_{бок}=\frac{3\cdot a\cdot l}{2}$	$S_{полн}=\frac{3\cdot a\cdot l}{2}+\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{12}\cdot h$
Правильная четырех-угольная пирамида	$S_{осн}=a^2$	$S_{бок}=2\cdot a\cdot l$	$S_{полн}=2\cdot a\cdot l+a^2$	$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h$
Правильная шести-угольная пирамида	$S_{осн}=\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$S_{бок}=3\cdot a\cdot l$	$S_{полн}=3\cdot a\cdot l+\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot h$

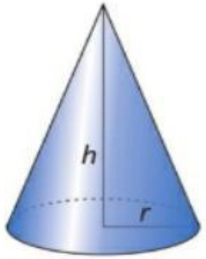
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Обозначения: r, R – радиусы оснований, h – высота, l – образующая



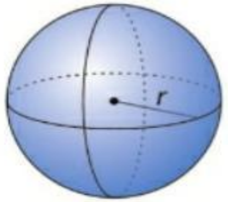
Цилиндр

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
$S_{осн}=\pi r^2$	$S_{бок}=2\pi rh$	$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$ $S_{полн}=2\pi rh+2\pi r^2$	$V=S_{осн}\cdot h$ $V=\pi r^2\cdot h$



Конус

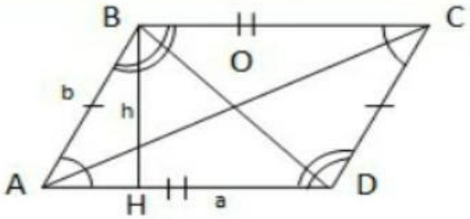
Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
$S_{осн}=\pi r^2$	$S_{бок}=\pi rl$	$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$ $S_{полн}=\pi rl+\pi r^2$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$ $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$
усечённый конус			
$S_{осн1}=\pi r^2$ $S_{осн2}=\pi R^2$	$S_{бок}=\pi\cdot(r+R)\cdot l$	$S_{полн}=\pi r^2+\pi R^2+\pi(r+R)l$	$V=\frac{1}{3}\pi(r^2+$ $+rR+R^2)\cdot h$



Шар

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
—	—	$S_{пов}=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\cdot\pi r^3$

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

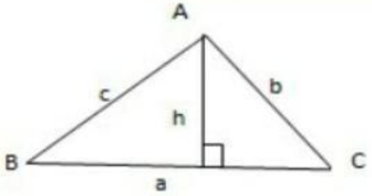


Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
1) AB=CD; BC=AD $\angle A=\angle C$; $\angle B=\angle D$ В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны 2) $AC\cap BD=O$, $AO=OC$, $BO=OD$ Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам. 3) $\angle A+\angle B=180^0$ В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180^0 4) $d_1^2+d_2^2=a^2+b^2+c^2+d^2$ где $d_1=AC$; $d_2=BD$ – диагонали; $a=AD$; $b=AB$; $c=BC$; $d=CD$ – стороны 5) $P=2(a+b)$ – периметр параллелограмма, где $a=AD$; $b=AB$	1) ($AB\parallel CD$; $AB=CD$) $\Longrightarrow$ (ABCD-параллелограмм) Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм. 2) ($AB=CD$; $BC=AD$) $\Longrightarrow$ (ABCD-параллелограмм) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм 3) ($AO=OC$; $BO=OD$, где $O=AC\cap BD$) $\Longrightarrow$ (ABCD-параллелограмм) Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

$S=ah$, где $a=AD$ – основание $h=BH$ – высота	$S=ab\cdot\sin\alpha$, где $a=AD$, $b=AB$, $\angle\alpha=\angle BAD$	$S=\frac{AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB}{2}$	$S=4\cdot S_{\Delta AOB}$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту к этой стороне:

$S = \frac{1}{2} ah$

Другие формулы:

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} cb \sin A$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр

$S = pr$,

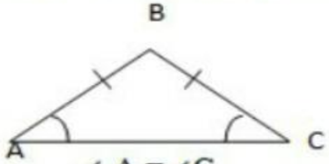
где r- радиус вписанной в треугольник окружности

$S = \frac{abc}{4R}$,

где R – радиус описанной окружности

СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕНННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны

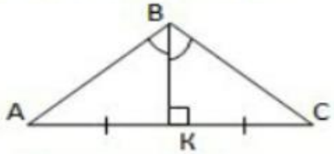


$\angle A = \angle C$,

AC – основание

AB и BC – боковые стороны

Биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой



BK – биссектриса

BK – медиана

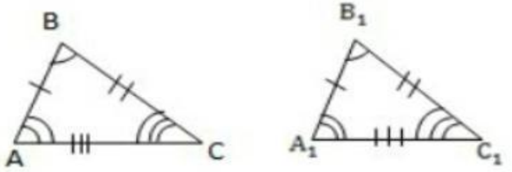
BK - высота

РАВНЫЕ И ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, значит,

$AB = A_1B_1$ $\quad CB = C_1B_1$ $\quad CA = C_1A_1$

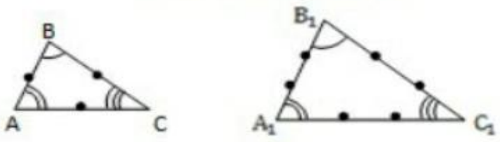
$\angle A = \angle A_1$ $\quad \angle B = \angle B_1$ $\quad \angle C = \angle C_1$.



ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$, значит,

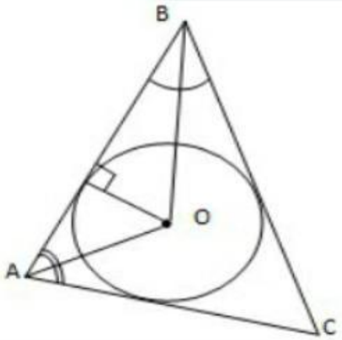
$\angle A = \angle A_1$ $\quad \angle B = \angle B_1$ $\quad \angle C = \angle C_1$

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$



vk.com/oge_ege_matematika

ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



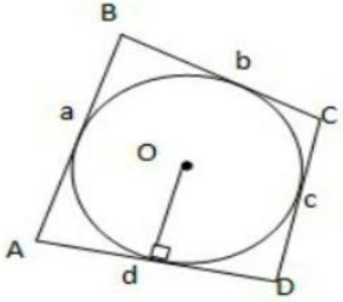
В любой треугольник можно вписать окружность.

Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.

$r = \frac{2S}{a+b+c}$ - радиус вписанной окружности

a, b, c – стороны треугольника

S – площадь треугольника

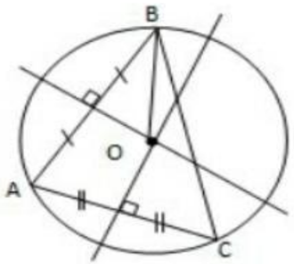


В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, только если:

$a + c = b + d$,

где a, b,c, d- стороны четырехугольника

ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



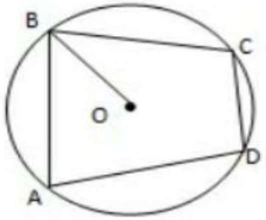
Около любого треугольника можно описать окружность.

Её центр – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

$R = \frac{abc}{4S}$ - радиус описанной окружности

a, b, c – стороны треугольника

S – площадь треугольника



Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность, только если:

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

Справочник по геометрии 7-9

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

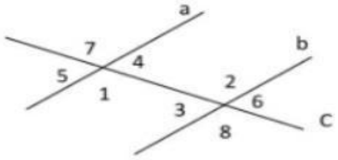
Прямые a и b пересечены секущей c

$\angle 1$ и $\angle 2$; $\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие углы

$\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 5$ - соответственные углы

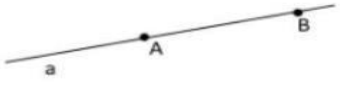
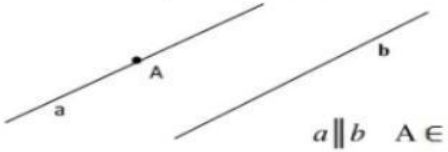
$\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 6$ - соответственные углы

$\angle 1$ и $\angle 3$; $\angle 2$ и $\angle 4$ - односторонние углы

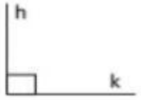
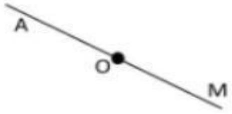


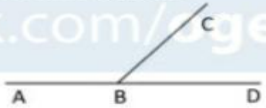
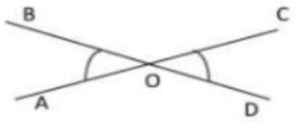
Признаки параллельности прямых	**Свойства углов при параллельных прямых**
$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \parallel b$ Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.	$a \parallel b \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.
$\angle 1 = \angle 8 \Rightarrow a \parallel b$ Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.	$a \parallel b \Rightarrow \angle 1 = \angle 8$ Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.
$\angle 1 + \angle 3 = 180° \Rightarrow a \parallel b$ Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.	$a \parallel b \Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180°$ Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.
$a \parallel b,\ a \parallel c \Rightarrow c \parallel b$ $\quad$ $a \perp b,\ a \perp c \Rightarrow c \parallel b$	

НЕКОТОРЫЕ АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

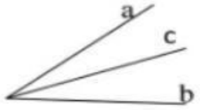
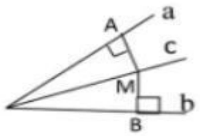
Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.	Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.
 $A \in a \quad B \in a$	 $a \parallel b \quad A \in a$

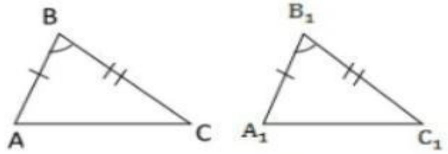
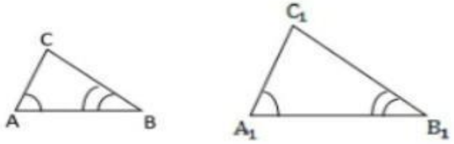
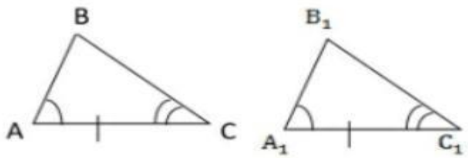
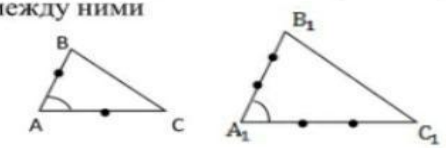
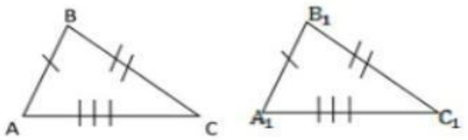
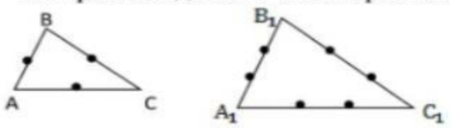
УГЛЫ

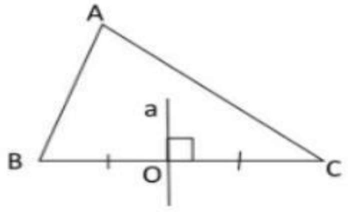
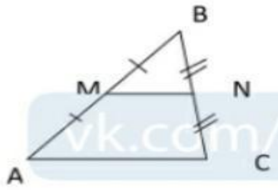
Острый угол *меньше прямого угла*	Тупой угол *больше прямого угла*	Прямой угол	Развернутый угол
 $\angle CDA < 90°$	 $90° < \angle ab < 180°$	 $\angle hk = 90°$	 $\angle AOM = 180°$

Смежные углы 	$\angle ABC$ и $\angle CBD$ – смежные углы $\angle ABC + \angle CBD = 180°$ Сумма смежных углов равна 180°.
Вертикальные углы 	$\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные $\angle AOB = \angle COD$ Вертикальные углы равны.

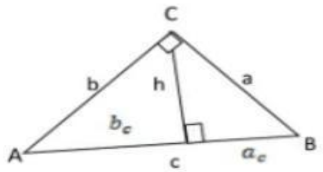
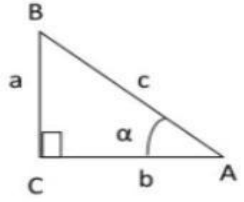
БИССЕКТРИСА УГЛА

	c – биссектриса $\angle ab$ $\angle ac = \angle cb$ Луч c делит угол $\angle ab$ пополам
	**Свойство биссектрисы** $AM = BM$ Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от сторон угла.

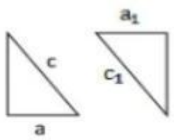
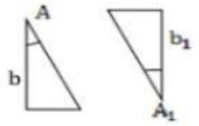
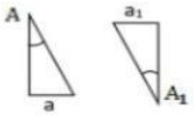
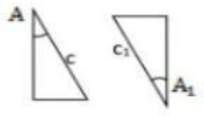
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ	ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
По двум сторонам и углу между ними  $AB = A_1B_1$ $CB = C_1B_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	По двум углам  $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
По стороне и двум прилежащим углам  $AC=A_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	По двум сходственным сторонам и углу между ними  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ $\angle A = \angle A_1$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
По трем сторонам  $AB = A_1B_1$ $CB = C_1B_1$ $AC=A_1C_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	По трем сходственным сторонам  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

 	Прямая a – серединный перпендикуляр $O \in a$ $OC = OB$ $a \perp BC$ **Свойство серединных перпендикуляров** Серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке (центре описанной окружности)
 	MN – средняя линия ΔABC точка M - середина AB, N – середина BC **Свойство средней линии треугольника** $MN \parallel AC$; $MN = \frac{1}{2}AC$ Средняя линия параллельна одной из сторон и равна её половине.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Основные соотношения в прямоугольном треугольнике		
 	**Теорема Пифагора** $c^2=a^2+b^2$ Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.	Пропорциональные отрезки $h^2=a_cb_c$ $a^2=a_c c$ $b^2=b_c c$ $h=\frac{ab}{c}$
 $\angle C = 90^0$ $\angle A = \alpha$ c = AB – гипотенуза a = BC – катет, противолежащий к α b = AC – катет, прилежащий к углу α	СИНУС Отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
	КОСИНУС Отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
	ТАНГЕНС Отношение противолежащего катета к прилежащему	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
	КОТАНГЕНС Отношение прилежащего катета к противолежащему	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Свойства прямоугольного треугольника			
$\angle A + \angle B = 90^\circ$ Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°	$\angle A = 30^\circ \Rightarrow a = \frac{1}{2}c$ Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы	$a = \frac{1}{2}c \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°	$m = \frac{1}{2}c = R$ Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине и является радиусом описанной окружности

Признаки равенства прямоугольных треугольников			
По гипотенузе и катету  $a = a_1 \quad c = c_1$	По катету и прилежащему острому углу  $\angle A = \angle A_1 \quad b = b_1$	По катету и противолежащему острому углу  $\angle A = \angle A_1 \quad a = a_1$	По гипотенузе и острому углу  $\angle A = \angle A_1 \quad c = c_1$

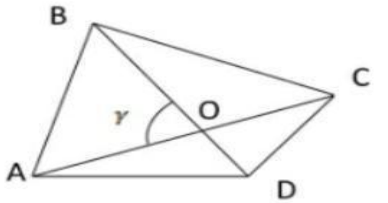
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{ctg}\alpha = 1$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – **основное тригонометрическое тождество** $\left.\begin{array}{l} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \end{array}\right\}$ формулы приведения

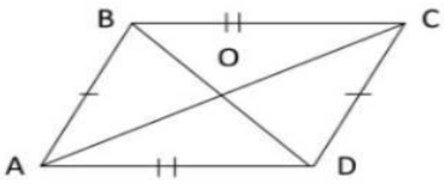
ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ABCD – четырехугольник $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ 	$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\gamma}{2}$ AC, BD - диагонали

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

	ABCD- параллелограмм AB ∥ CD BC ∥ AD Параллелограммом называется четырехугольник, у которого стороны попарно параллельны.