ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Електронний курс лекцій

Укладач: Данилов А.Б.

Хто ні про що не запитує,
той нічому не навчиться.

Томас Фуллер

Лекція *16*

Потенціал електростатичного поля

План лекції

- Робота сил електростатичного поля.
- Циркуляція вектора напруженості.
- Потенціальний характер електростатичного поля.
- Потенціал електростатичного поля.
- Зв'язок напруженості з потенціалом електростатичного поля.
- Еквіпотенціальні поверхні.

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Робота сил електростатичного поля

- Елементарна робота сил електростатичного поля

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{l}\right) = Fdl\cos\alpha = q_0 E\, dl\cos\alpha$$

- Для поля точкового заряду

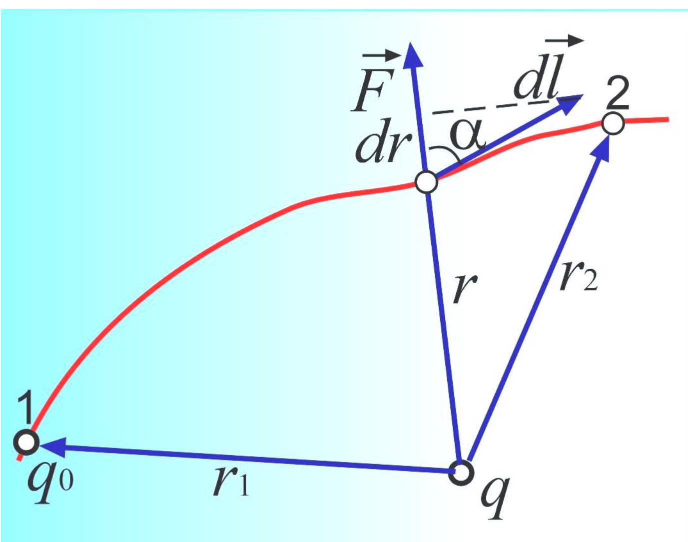
$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Робота сил електростатичного поля

Робота сил електростатичного поля точкового заряду при переміщенні в цьому полі пробного заряду з точки 1 в точку 2:

$$A_{1-2}=\int\limits_{(1)}^{(2)} dA = q_0\int\limits_{(1)}^{(2)}\left(\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\right)=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$



Робота додатна, якщо:

- однойменні заряди віддаляються;
- різнойменні заряди наближаються.

Робота від’ємна, якщо:

- різнойменні заряди віддаляються;
- однойменні заряди наближаються.

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Робота сил електростатичного поля

Робота електростатичного поля не залежить від форми шляху переміщення заряду від точки 1 до точки 2, а визначається лише положенням початкової і кінцевої точки.

Силові поля, що задовольняють таку умову, називаються ***потенціальними***, *або* ***консервативними***

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Циркуляція вектора напруженості

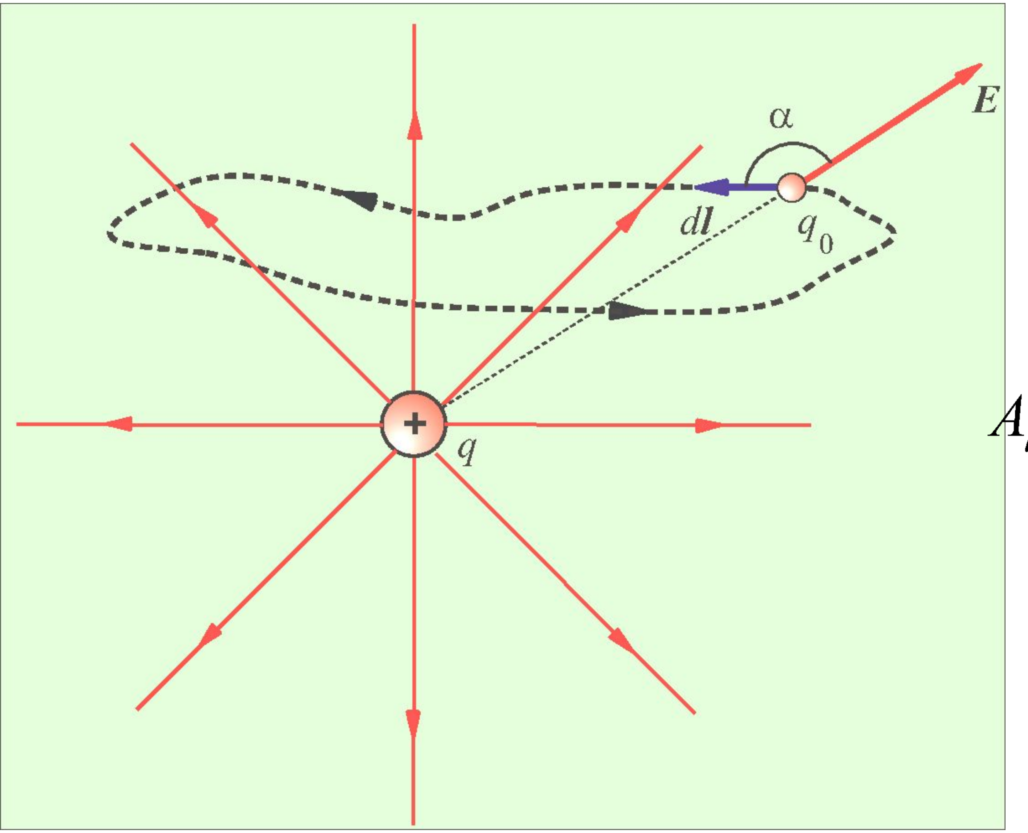
Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулеві:

$$\boxed{\oint_l (\vec{E}\,d\vec{l}\,) = 0}$$

Це рівняння називають ***інтегральною формою запису потенціальності електростатичного поля.***

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Циркуляція вектора напруженості



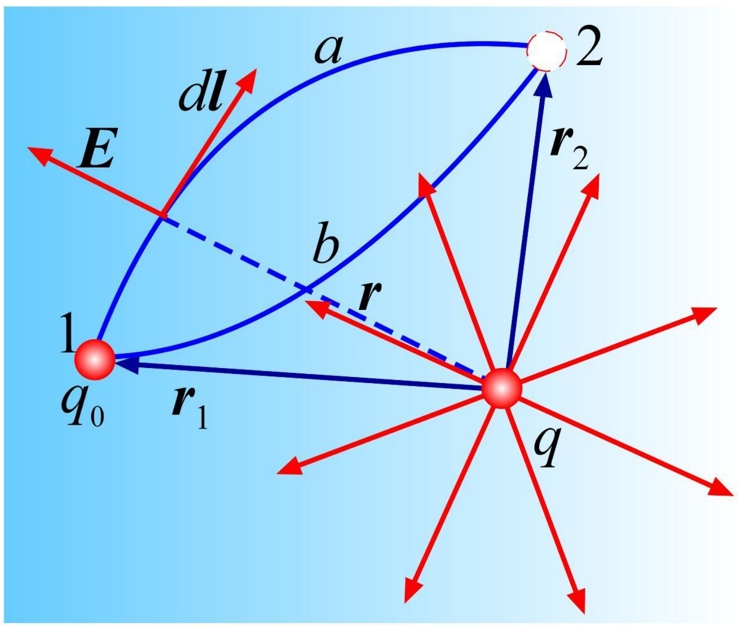
Заряд переміщається вздовж замкненого контуру l

$$A_l = \oint_l dA = q_0 \oint_l \left(\vec{E} \cdot d\vec{l}\right) =$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_l \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0}\right) = 0$$

Лекція 16
Потенціал
електростатичного
поля

Циркуляція вектора напруженості



$$\int_{12}^{(a)} E\,dl = \int_{12}^{(b)} E\,dl$$

$$\int_{12}^{(b)} E\,dl = -\int_{21}^{(b)} E\,dl$$

$$\oint_{l} E\,dl = \int_{1-2}^{(a)} E\,dl + \int_{2-1}^{(b)} E\,dl = \int_{1-2}^{(a)} E\,dl - \int_{1-2}^{(b)} E\,dl = 0$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Диференціальна форма потенціальності

- **Ротором векторного поля** $\vec{A}(\vec{r})$ називається границя відношення

$$rot\,\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l \vec{A}d\vec{l}}{\Delta S}$$

За математичною теоремою Стокса:

$$\int_S (rot\,\vec{A}\,d\vec{S}) = \oint_l (\vec{A}\,d\vec{l})$$

У декартових компонентах ротор векторного поля запишеться:

$$rot\,\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Диференціальна форма потенціальності

Теорема Стокса для електростатичного поля

$$\boxed{\int_S (rot\,\vec{E}\,d\vec{S}) = \oint_l (\vec{E}\,d\vec{l}) = 0}$$

Диференціальна форма **потенціальності електростатичного поля:**

$$\boxed{rot\,\vec{\boldsymbol{E}} = 0}$$

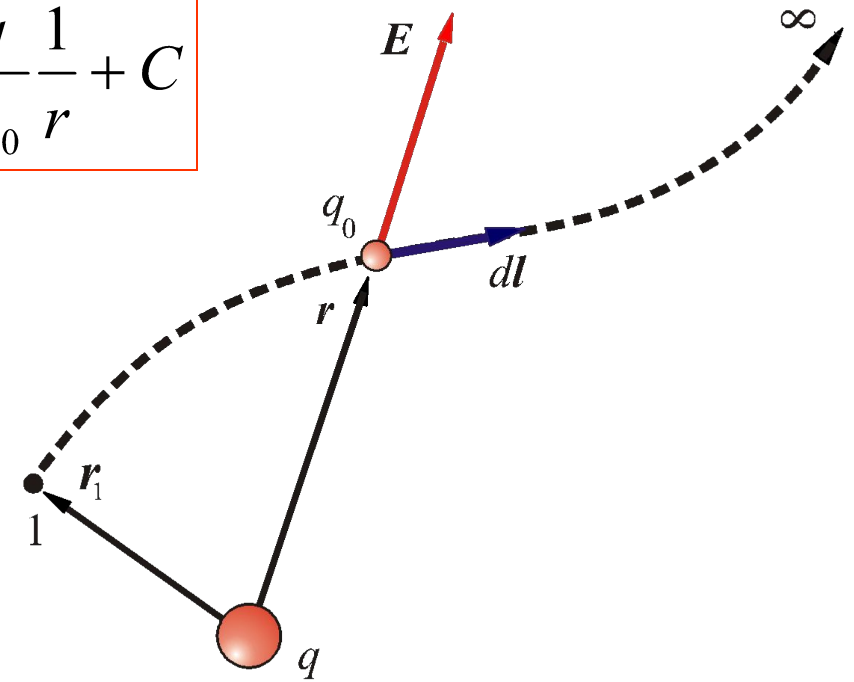
Електростатичне поле є *безвихровим*.

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Потенціальна енергія точкового заряду

Потенціальна енергія точкового заряду q_0 в полі іншого заряду q

$$\boxed{W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C}$$



Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Потенціал електростатичного поля – скалярна фізична величина, що чисельно дорівнює роботі, яку виконують сили електростатичного поля при переміщенні пробного одиничного заряду із заданої точки на нескінченність (або в точку, потенціал якої можна вважати нульовим).

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{A_{1-\infty}}{q_0} = \frac{W_1}{q_0} = \int_1^\infty E\,dl\cos\alpha}$$

Потенціал електростатичного поля

Потенціал 1 В приписують точці поля, при переміщенні з якої заряду 1 Кл виконується робота 1 Дж:

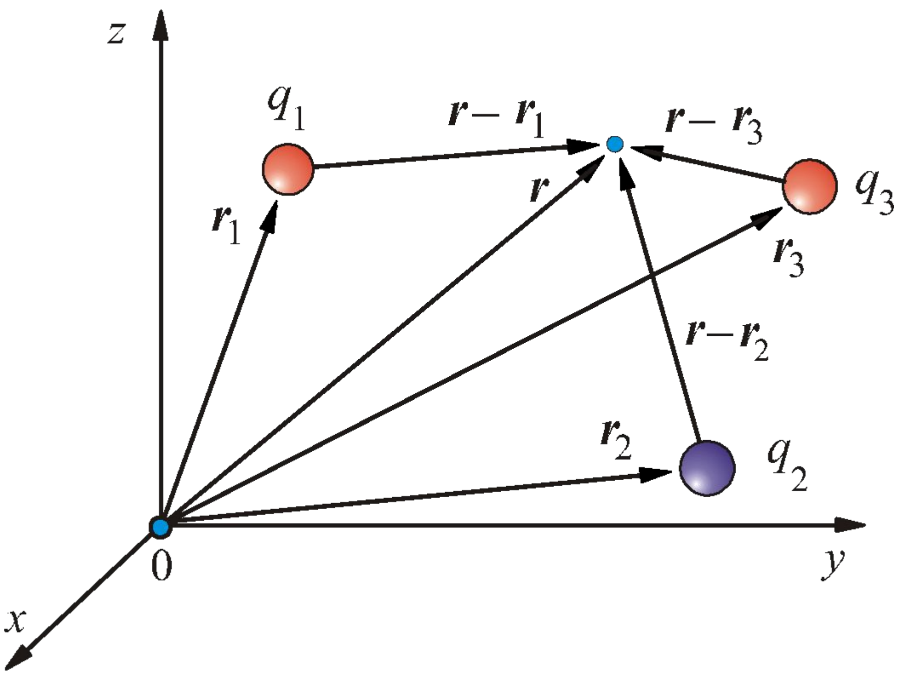
$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q_0]} = \frac{1\,Дж}{1\,Кл} = 1\,B$$

Потенціал поля точкового заряду:

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Потенціал поля системи зарядів



Потенціал поля системи точкових зарядів:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Потенціал електростатичного поля

При ***неперервному*** розподілі заряду

по *об'єму*:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,dx'dy'dz'$$

по *поверхні*:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{\boldsymbol{r}}')dS}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}$$

по *лінії*:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\tau(\vec{\boldsymbol{r}}')dl}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Різниця потенціалів

Різниця потенціалів *– скалярна фізична величина, що визначається роботою переміщення одиничного пробного заряду* q_0 *з точки поля з потенціалом* φ_1 *у точку з потенціалом* φ_2

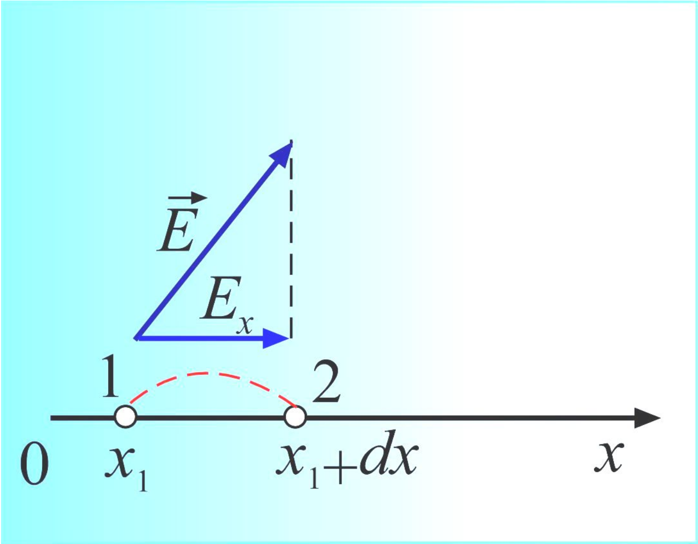
$$U = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}}{q_0}$$

Різниця потенціалів між двома довільними точками поля

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}\,d\vec{l}\,)}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Зв'язок напруженості з потенціалом



$$dA = q_0 E_x dx$$

$$dA = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = -q_0\, d\varphi$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right) = -\,grad\,\varphi}$$

Вектор градієнта спрямований у бік найшвидшого зростання потенціалу

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Зв'язок напруженості з потенціалом

Для однорідного поля $$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}$$

Рівняння Пуассона → $$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

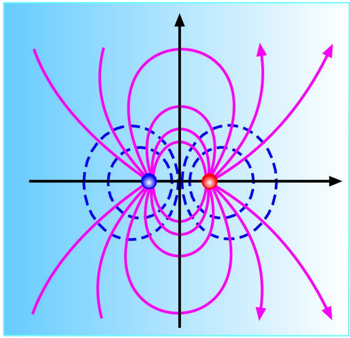
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ - оператор Лапласа

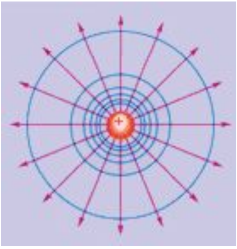
Рівняння Лапласа → $$\boxed{\Delta\varphi(x, y, z) = 0}$$

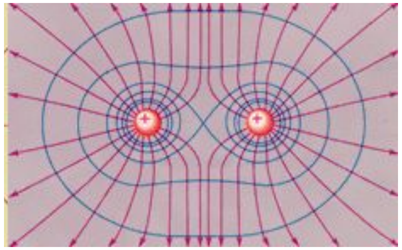
Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Еквіпотенціальні поверхні

Геометричне місце точок, потенціали яких є однаковими, називають ***еквіпотенціальними поверхнями***, або *поверхнями однакового потенціалу*.







- Лінії електричного поля і лінії еквіпотенціальної поверхні взаємно перпендикулярні;
- Чим густіше проходять лінії, тим різкіше змінюється потенціал.

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Розрахунок потенціалу електростатичного поля

Потенціал поля рівномірно зарядженої нескінченної площини

$$\Delta\varphi = \int_0^x E\,dx = \int_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

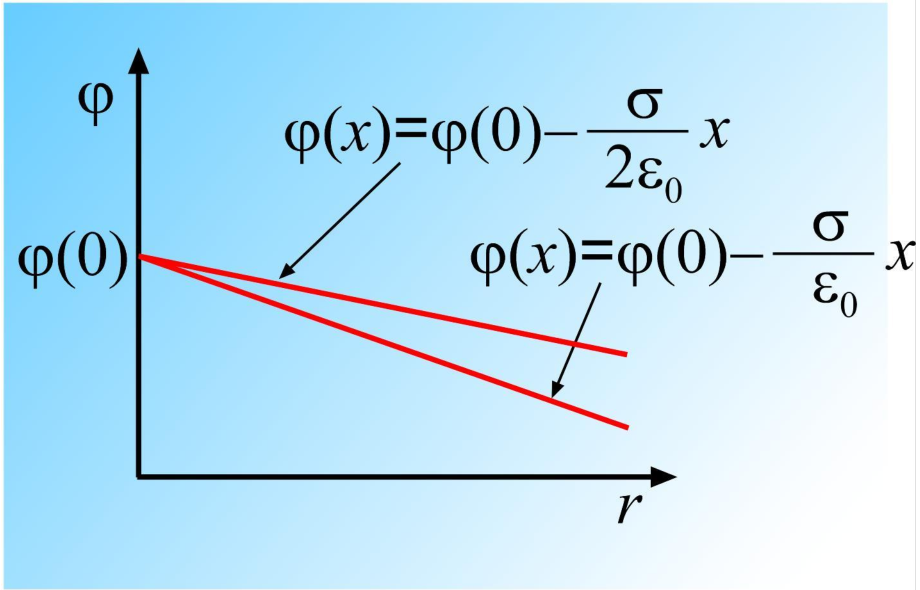
$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x}$$

Потенціал поля між рівномірно зарядженими нескінченними площинами

$$\Delta\varphi = \int_0^x E\,dx = \int_0^x \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x}$$

Потенціал поля рівномірно зарядженої нескінченної площини та двох різнойменно заряджених площин



Розрахунок потенціалу електростатичного поля

Потенціал поля провідної сфери

Назовні: $$\varphi(R) - \varphi(r) = \int_R^r \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \varphi(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$$

Всередині:

$$\varphi(r) = \varphi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Потенціал поля діелектричної кулі

Назовні:

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Всередині:

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^r r dr = \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0}(r^2 - R^2)$$

$$\varphi(r) == \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Розрахунок потенціалу електростатичного поля

Потенціал поля нескінченно довгого провідного циліндра

$$\varphi(R)-\varphi(r)=\int_{R}^{r}E\,dr=\int_{R}^{r}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}ln\frac{r}{R}$$

Лекція 16 Потенціал електростатичного поля

Приклад 1

- *Знайти потенціал на відстані r від довгого провідного циліндра радіуса R з лінійною густиною заряду τ.*

Якщо потенціал на нескінченності дорівнює нулеві, то

$$\varphi(R)-\varphi(r)=\varphi(R)-0=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{R}$$?!!!

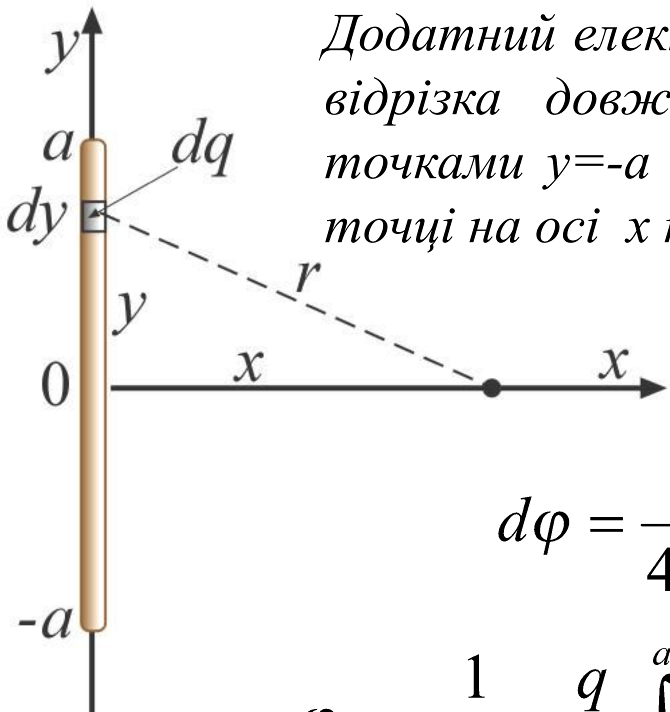
Потенціал точки на поверхні циліндра

$$\varphi(R)-\varphi(r)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}ln\frac{R}{R}=0$$?

$$\boxed{\varphi(R)-\varphi(r_0)=\varphi(R)-0=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{R}}$$

Лекція 16
Потенціал електростатичного поля

Приклад 2



Додатний електричний заряд , розподілений однорідно вздовж відрізка довжиною 2a, розташований уздовж осі між точками y=-a і y=a. Знайти потенціал електричного поля в точці на осі x на відстані x від початку координат.

$$dq = (q/2a)\,dy$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}-a}\right)}$$


2
ЗАЧЕТКА
О.Паньков

- Він теж радий, що лекція завершилася!

- Він теж радий, що лекція завершилася!