АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ

Определение автокорреляции

Автокорреляция (последовательная корреляция) – это корреляция между наблюдаемыми показателями во времени (временные ряды) или в пространстве (перекрестные данные).

Автокорреляция остатков характеризуется тем, что не выполняется предпосылка 3^0 использования МНК:

$$3^0.\ \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}$$

Виды автокорреляции

Причины чистой автокорреляции

1. Инерция.

Трансформация, изменение многих экономических показателей обладает инерционностью.

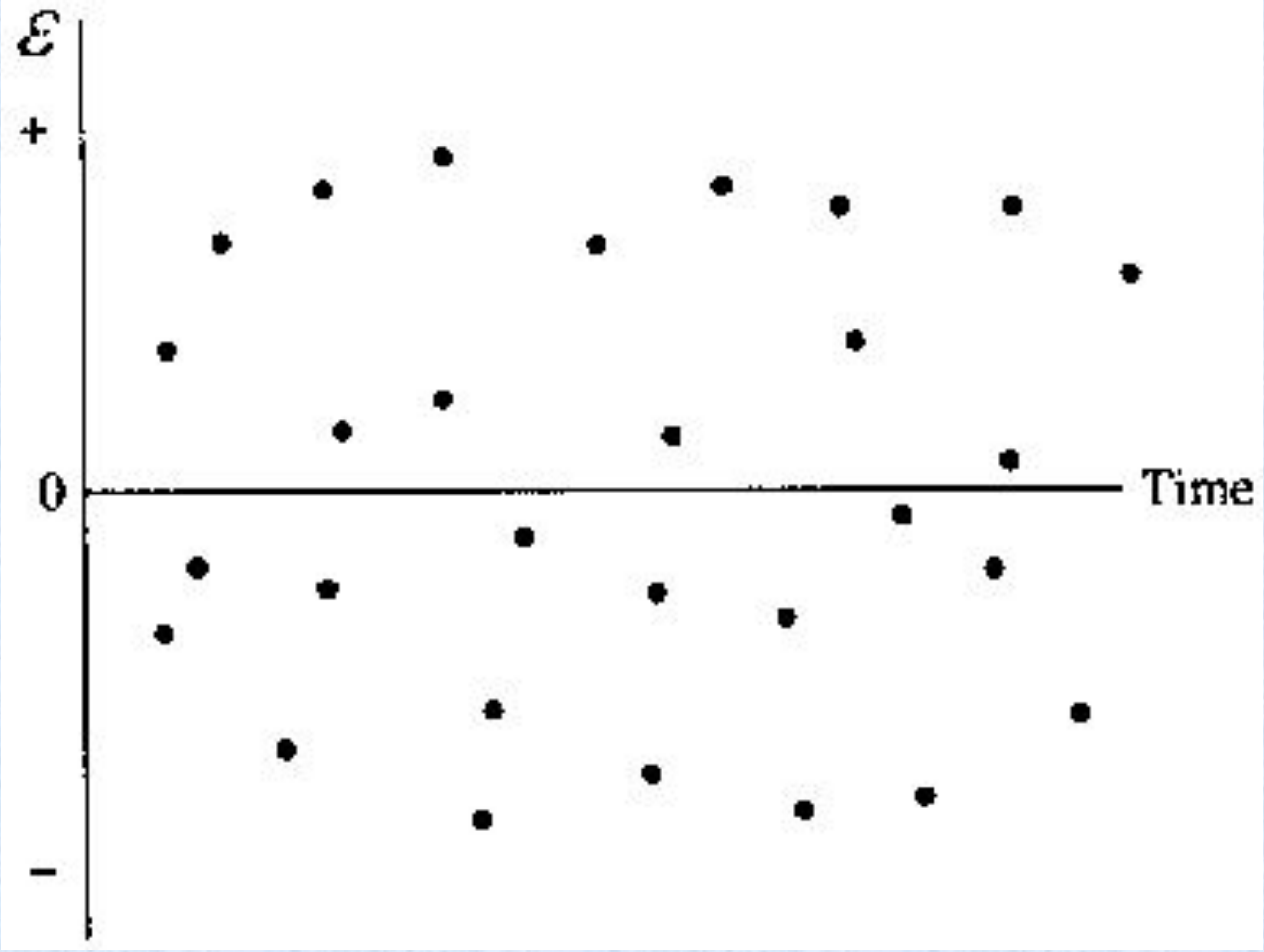
2. Эффект паутины.

Многие экономические показатели реагируют на изменение экономических условий с запаздыванием (временным лагом)

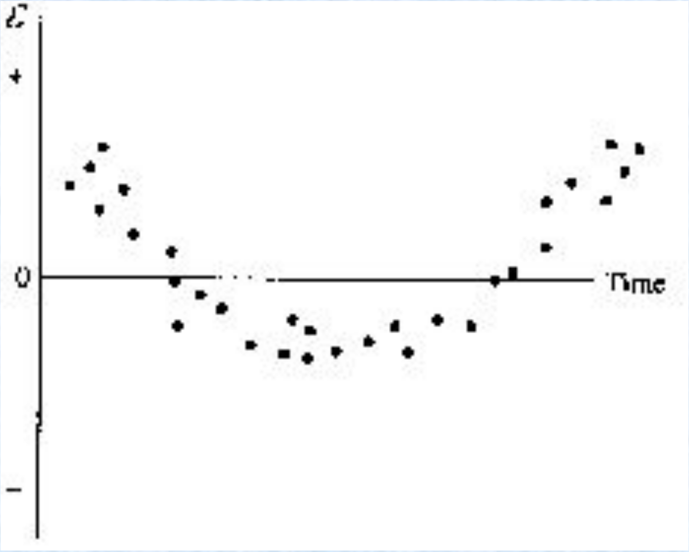
3. Сглаживание данных.

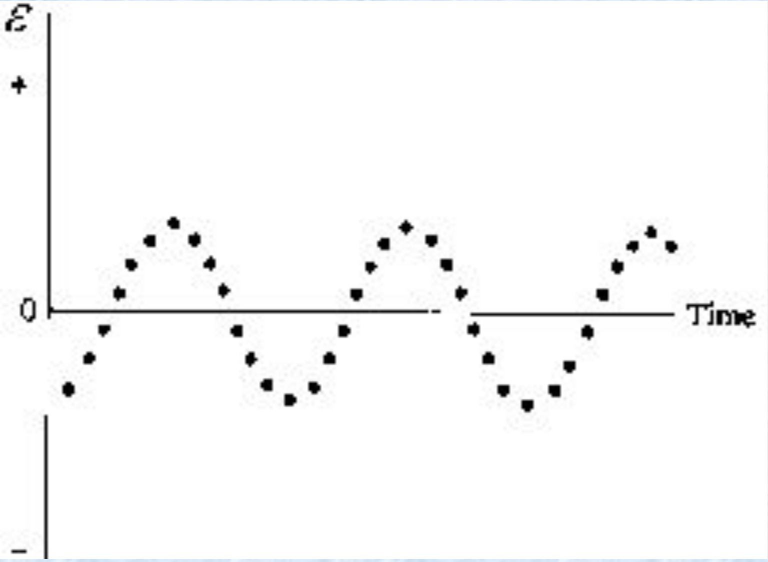
Усреднение данных по некоторому продолжительному интервалу времени.

Классический случайный член ε (автокорреляция отсутствует)



Положительная автокорреляция

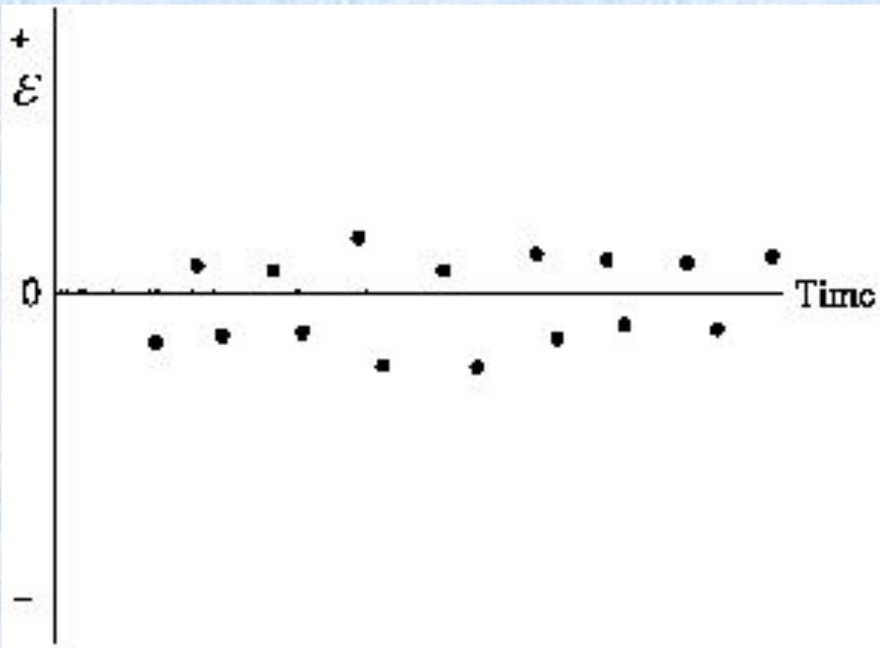


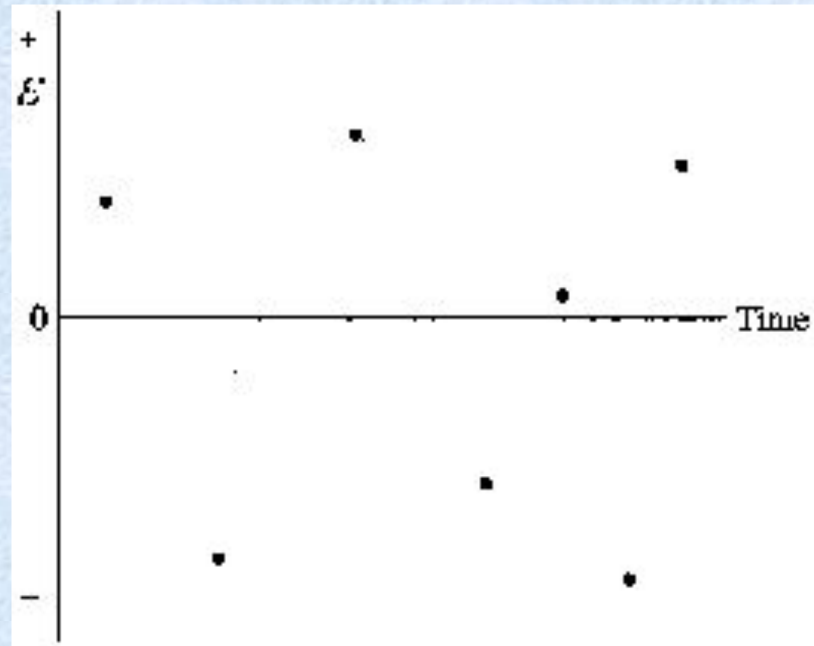


$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t \quad \rho > 0$$

Положительная автокорреляция – наиболее важный для экономики случай

Отрицательная автокорреляция





$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t$$

$$\rho < 0$$

Ложная автокорреляция

(автокорреляция, вызванная ошибочной спецификацией)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$$

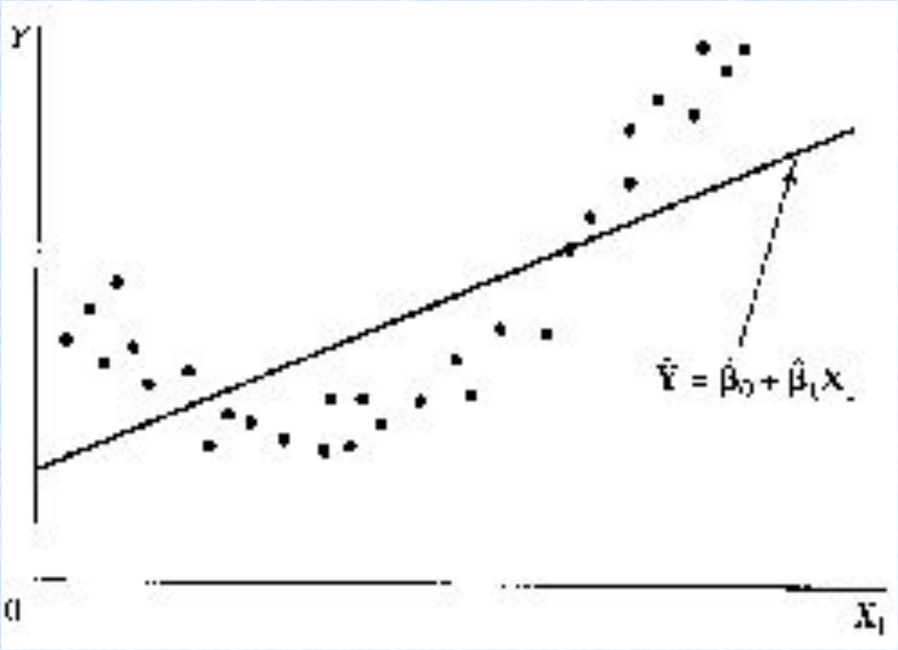
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \varepsilon_t^*$$

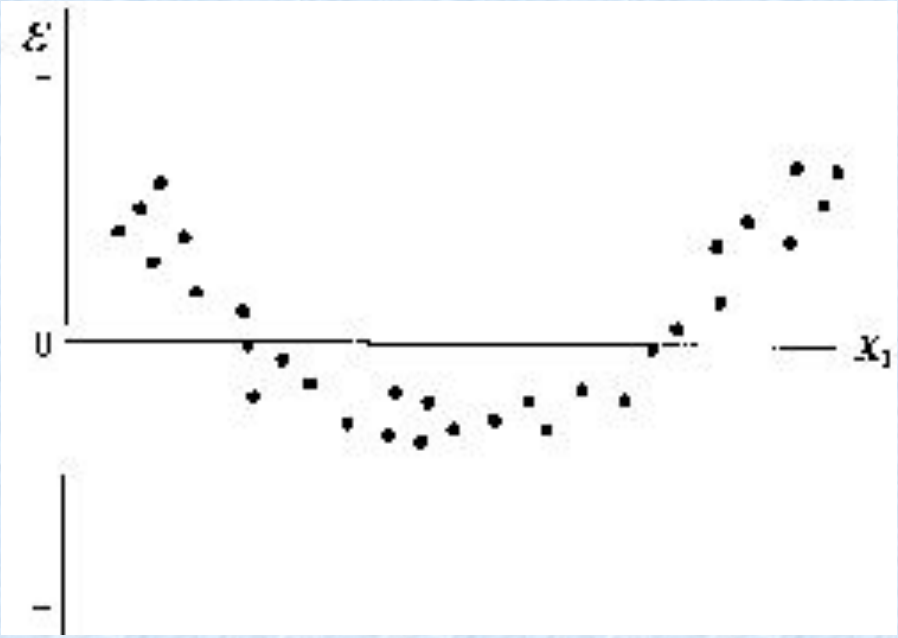
$$\varepsilon_t^* = f(\beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t)$$

X_2 − сама является автокоррелированной переменной,
Значение ε мало по сравнению с величиной $\beta_2 \overline{X}_2$

Ложная автокорреляция как результат неправильного выбора функциональной формы

$$\ln Y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln X_{t1} + \varepsilon_t \qquad Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t1} + \varepsilon_t^*$$





Последствия автокорреляции

1. Истинная автокорреляция не приводит к смещению оценок регрессии, но оценки перестают быть эффективными.
2. Автокорреляция (особенно положительная) часто приводит к уменьшению стандартных ошибок коэффициентов, что влечет за собой увеличение *t*-статистик.
3. Оценка дисперсии остатков S_e^2 является смещенной оценкой истинного значения σ_e^2, во многих случаях занижая его.
4. В силу вышесказанного выводы по оценке качества коэффициентов и модели в целом, возможно, будут неверными. Это приводит к ухудшению прогнозных качеств модели.

Обнаружение автокорреляции

1. Графический метод.
2. Метод рядов.
3. Специальные тесты.

Критерий
восходящих и нисходящих серий

Проверяемая гипотеза:

H0: автокорреляция отсутствует

Последовательность проведения критерия

1. Вычислить остатки
2. Вычислить разницу между соседними остатками, $\Delta_t = e_{t+1} - e_t$
3. Приписать каждой разнице у знак (+/-)
4. Построить ряд знаков

При отсутствии автокорреляции ряд должен носить случайный характер

5. Подсчитать общее количество серий (последовательностей постоянного знака) - ν(n)
6. Подсчитать длину самой длинной серии - τ(n)
7. Сравнить полученные значения с критическими

Критерий восходящих и нисходящих серий

Проверяемая гипотеза:

H0: автокорреляция отсутствует

Приблизительный критерий проверки гипотезы на уровне значимости ~ 2,5% ÷ 5,0% :

При истинности гипотезы должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} \nu(n) > \left[\dfrac{1}{3} \cdot (2n-1) - 1.96\sqrt{\dfrac{16n-29}{90}} \right] \\ \tau(n) < \tau_0(n), \end{cases}$$

n	$n \le 26$	$26 < n \le 153$	$153 < n < 1170$
$\tau_0(n)$	5	6	7

Обнаружение автокорреляции. Тест Дарбина-Уотсона

Критерий Дарбина-Уотсона предназначен для обнаружения автокорреляции первого порядка.

Он основан на анализе остатков уравнения регрессии.

Тест Дарбина-Уотсона. Ограничения

Ограничения:

1. Тест не предназначен для обнаружения других видов автокорреляции (более чем первого) и не обнаруживает ее.
2. В модели должен присутствовать свободный член.
3. Данные должны иметь одинаковую периодичность (не должно быть пропусков в наблюдениях).
4. Тест не применим к авторегрессионным моделям, содержащих в качестве объясняющей переменной зависимую переменную с единичным лагом:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_1 X_{tj} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Статистика Дарбина-Уотсона

Статистика Дарбина-Уотсона имеет вид:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

T − число наблюдений (обычно временных периодов)

e_t − остатки уравнения регрессии

Границы для статистики Дарбина-Уотсона

Можно показать, что: $DW \approx 2(1 - r_{e_t e_{t-1}})$

Отсюда следует: $0 \le DW \le 4$

При положительной корреляции: $r_{e_t e_{t-1}} \approx 1 \;\Rightarrow\; DW \approx 0$

При отрицательной корреляции: $r_{e_t e_{t-1}} \approx -1 \;\Rightarrow\; DW \approx 4$

При отсутствии корреляции: $r_{e_t e_{t-1}} \approx 0 \;\Rightarrow\; DW \approx 2$

Критические точки распределения Дарбина-Уотсона

Для более точного определения, какое значение *DW* свидетельствует об отсутствии автокорреляции, а какое – о ее наличии, построена таблица критических точек распределения Дарбина-Уотсона.

По этой таблице для заданного уровня значимости α, числа наблюдений n и количества объясняющих переменных m определяются два значения:

d_l – нижняя граница, d_u – верхняя граница

Критические точки распределения Дарбина-Уотсона

d-статистика Дарбина-Уотсона: d_l и d_u ,уровень значимости в 5%

N	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78

Расположение критических точек распределения Дарбина-Уотсона

При положительной корреляции: $d \to 0$

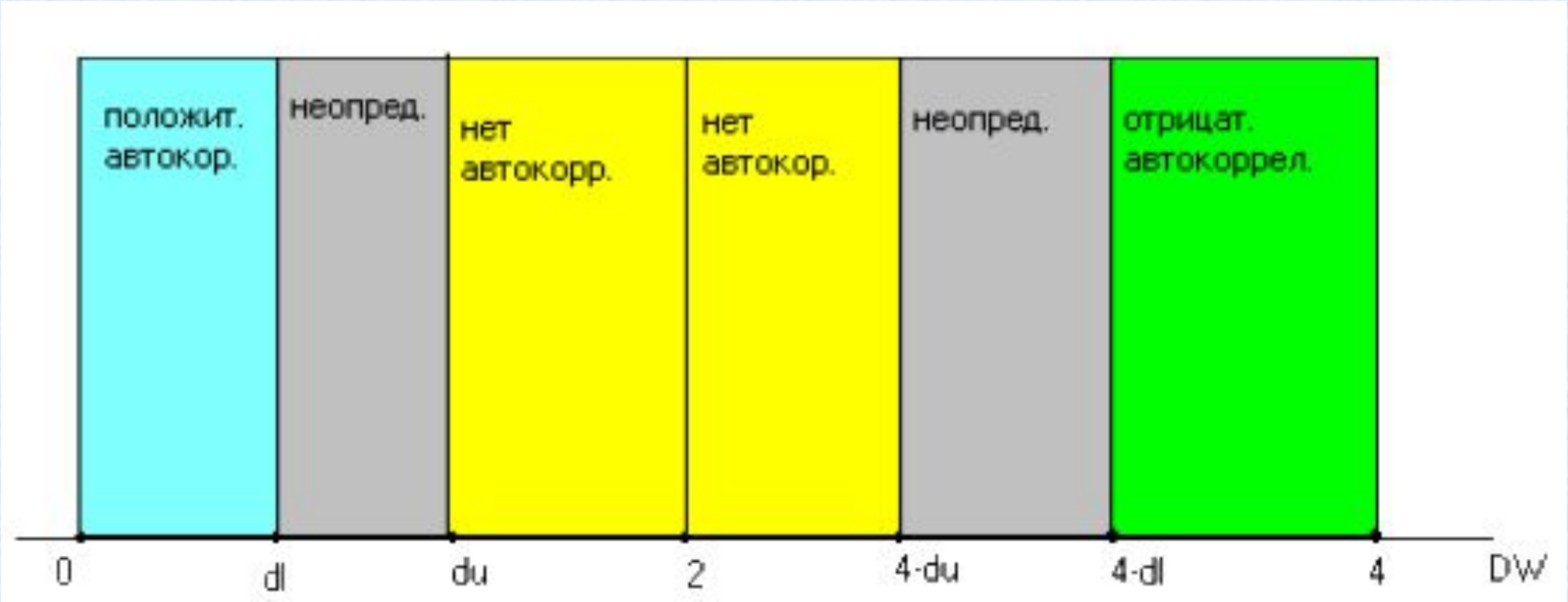
При отрицательной корреляции: $d \to 4$

При отсутствии корреляции: $d \to 2$

Практическое использование теста Дарбина-Уотсона

Величина статистики DW	**Результат**
$4-d_l<DW<4$	В модели с некоторой вероятностью существует отрицательная автокорреляция первого порядка
$4-d_u<DW<4-d_l$	Результат неопределенный.
$2<DW<4-d_u$	В модели с некоторой вероятностью нет автокорреляции первого порядка
$d_u<DW<2$	В модели с некоторой вероятностью нет автокорреляции первого порядка
$d_l<DW<d_u$	Результат неопределенный.
$0<DW<d_l$	В модели с некоторой вероятностью существует положительная автокорреляция первого порядка

Интерпретация результата теста Дарбина-Уотсона при некотором уровне значимости



Устранение автокорреляции первого порядка
(при известном коэффициенте автокорреляции)

Пусть имеем: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t$
(ρ − известно)

Процедура устранения автокорреляции остатков:

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, \quad X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}, \quad \beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$$

Отсюда: $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \upsilon_t$

Проблема потери первого наблюдения преодолевается с помощью поправки Прайса-Винстена:

$$Y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,Y_1, \quad X_t^* = \sqrt{1-\rho^2}\,X_1$$

Устранение автокорреляции первого порядка. Обобщения

Рассмотренное авторегрессионное преобразование может быть обобщено на:

1) Произвольное число объясняющих переменных
2) Преобразования более высоких порядков *AR*(2), *AR*(3) и т.д.:

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \eta_t \qquad \varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + \eta_t$$

Однако на практике значения коэффициента автокорреляции ρ обычно неизвестны и его необходимо оценить. Существует несколько методов оценивания.

Способы оценивания коэффициента автокорреляции *ρ*

1. На основе статистики Дарбина-Уотсона.
2. Процедура Кохрейна-Оркатта.
3. Процедура Хилдрета-Лу.
4. Процедура Дарбина
5. Метод первых разностей.

Определение коэффициента ρ на основе статистики Дарбина-Уотсона

$$\begin{cases} DW \approx 2(1 - r_{e_t e_{t-1}}) \\ \hat{\rho} = r_{e_t e_{t-1}} \end{cases} \Rightarrow \quad \hat{\rho} \approx 1 - \frac{DW}{2}$$

Этот метод дает удовлетворительные результаты при большом числе наблюдений.

Итеративная процедура Кохрейна-Оркатта
(на примере парной регрессии)

1. Определение уравнения регрессии и вектора остатков:

$$(*) \qquad \hat{Y}_t = b_0 + b_1 X_t \quad \Rightarrow \quad b_0,\ b_1,\ e_i, i = \overline{1,n}$$

2. В качестве приближенного значения *ρ* берется его МНК-оценка:

$$e_t = \rho^* e_{t-1} + \upsilon_t$$

3. Для найденного *ρ** оцениваются коэффициенты α_0 α_1:

$$(Y_t - \rho^* Y_{t-1}) = \alpha_0 (1 - \rho^*) + \alpha_1 (X_t - \rho^* X_{t-1}) + (e_t - \rho^* e_{t-1}) + \eta_t$$

4. Подставляем $b_0 = \alpha_0 (1 - \rho^*), \quad b_1 = \alpha_1$ в (*) и вычисляем $e_i, i = \overline{1,n}$

Возвращаемся к этапу 2.

Критерий остановки: разность между текущей и предыдущей оценками *ρ** стала меньше заданной точности.

Итеративная процедура Хилдрета-Лу
(поиск по сетке)

1. Определение уравнения регрессии и вектора остатков:

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 X_t \quad \Rightarrow \quad b_0,\ b_1,\ e_i, i = \overline{1,n}$$

2. Оцениваем регрессию

$$(Y_t - \rho^* Y_{t-1}) = \alpha_0 (1-\rho) + \alpha_1 (X_t - \rho X_{t-1}) + (e_t - \rho e_{t-1}) + \eta_t$$

для каждого возможного значения $\rho \in [-1,1]$ с некоторым достаточно малым шагом, например 0,001; 0,01 и т.д.

3. Величина ρ^*, обеспечивающая минимум стандартной ошибки регрессии принимается в качестве оценки автокорреляции остатков.

Итеративные процедуры оценивания коэффициента ρ. Выводы

1. Сходимость процедур достаточно хорошая.
2. Метод Кохрейна-Оркатта может «попасть» в локальный (а не глобальный) минимум.
3. Время работы процедуры Хилдрета-Лу значительно сокращается при наличии априорной информации об области возможных значений ρ.

Процедура Дарбина

(на примере парной регрессии)

Пусть имеет место автокорреляция остатков:

$$\begin{array}{l} Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \\ \quad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t \end{array} \quad \Rightarrow \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \rho Y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \eta_t$$

$$Y_t = \beta_0(1-\rho) + \beta_1 X_t - \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \eta_t$$

Процедура Дарбина

(на примере парной регрессии)

Процедура Дарбина представляет собой традиционный МНК снелинейными ограничениями типа равенств:

$$Y_t = \beta_0^* + \beta_1^* X_t + \beta_2^* X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \eta_t$$

$$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho); \quad \beta_2^* = -\rho\beta_1^*$$

<u>Способы решения</u>:

1. Решать задачу нелинейного программирования.

2. Двухшаговый МНК Дарбина (полученный коэффициент автокорреляции используется в поправке Прайса-Винстена).

3. Итеративная процедура расчета.

Итеративная процедура метода Дарбина

1. Считается регрессия и находятся остатки.
2. По остаткам находят оценку коэффициента автокорреляции остатков.
3. Оценка коэффициента автокорреляции используется для пересчета данных и цикл повторяется.

Процесс останавливается, как только обеспечивается достаточная точность (результаты перестают существенно улучшаться).

Обобщенный метод наименьших квадратов. Замечания

Не следует применять обобщенный МНК автоматически

1. Значимый коэффициент DW может указывать просто на ошибочную спецификацию.
2. Последствия автокорреляции остатков иногда бывают незначительными.
3. Качество оценок может снизиться из-за уменьшения числа степеней свободы (нужно оценивать дополнительный параметр).
4. Значительно возрастает трудоемкость расчетов.

Конец лекции