



# **Дробово-раціональні вирази та дії над ними. Раціональні та дробово-раціональні рівняння та нерівності. Системи раціональних та дробово-раціональних рівнянь**

Поняття рівняння. Лінійне та квадратне рівняння. Дискримінант. Квадратний тричлен та його розклад на множники.

Теорема Безу. Застосування схеми Горнера, як алгоритму ділення многочленів та розклад многочленів на множники.

Означення алгебраїчного дробу. Дробово-раціональні вирази.

Правила виконання дій з алгебраїчними дробами.

Методи розв'язування дробово-раціональних рівнянь. Область допустимих значень.

Системи раціональних та дробово-раціональних рівнянь.

# Поняття рівняння.

1. Що називають рівнянням?

**Рівняння** – це рівність двох функцій.

2. Що називають коренем рівняння?

**Корінь рівняння** – це значення змінної, за якої рівняння перетворюється на вірну числову рівність.

3. Які рівняння називають еквівалентними?

**Еквівалентні (рівносильні) рівняння** – це рівняння, що мають однакові множини коренів (з однаковою кратністю).

4. Яке рівняння називають однорідним?

**Однорідне рівняння** – рівняння, у якому в правій частині стоїть нуль.

# Поняття рівняння.

5. Що означає “розв’язати рівняння”?

**Розв’язати рівняння** – знайти множину його коренів, або показати, що їх не існує.

6. Чи будь-яке рівняння можна розв’язати?

**Так.**

7. Які існують способи розв’язання рівнянь?

**Аналітичний та графічний.**

8. Що таке еквівалентні перетворення рівняння?

**Еквівалентні перетворення рівняння** – це перетворення, у результаті яких отримують рівносильне до вихідного рівняння.

# Поняття рівняння.

9. Чи може рівняння містити більше однієї невідомої?

**Так.**

10. Чи можна розв'язати рівняння, у якому більше однієї невідомої?

**Так, воно матиме безліч розв'язків.**

11. Які існують типи рівнянь залежно від функціональної залежності змінної?

**Алгебраїчні, дробово-раціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні.**

12. Що таке алгебраїчні рівняння?

**Алгебраїчне рівняння – рівняння, яке містить у собі поліном невідомої (лінійне, квадратне, тощо).**

# Лінійні рівняння

$$y = ax + b = 0$$

1. Один розв'язок:

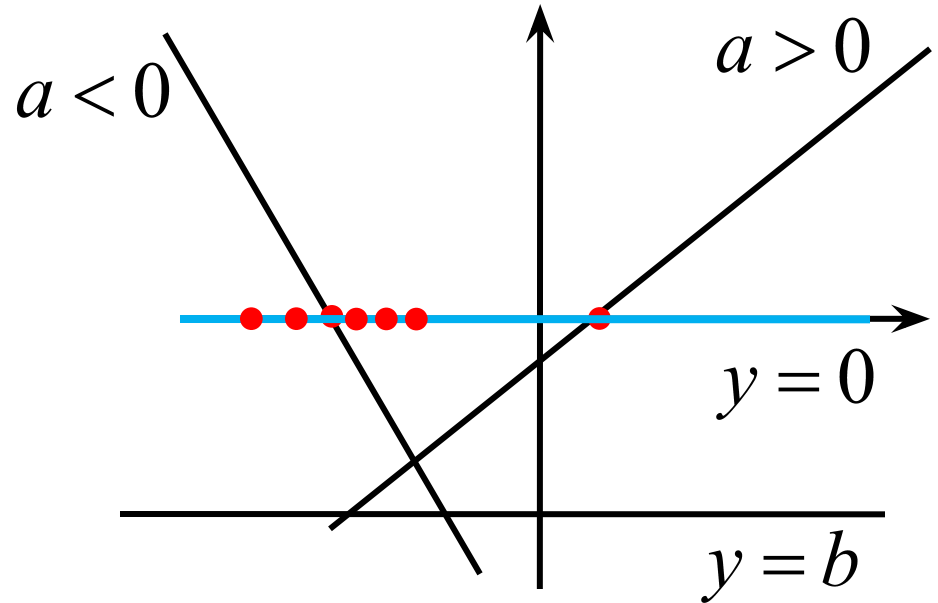
$$x = -\frac{b}{a}$$

2. Безліч розв'язків:

$$x \in R; a = b = 0$$

3. Жодного розв'язку:

$$x \in \emptyset; a = 0; b \neq 0$$



# Квадратні рівняння

$$y = ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_n = a_1(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

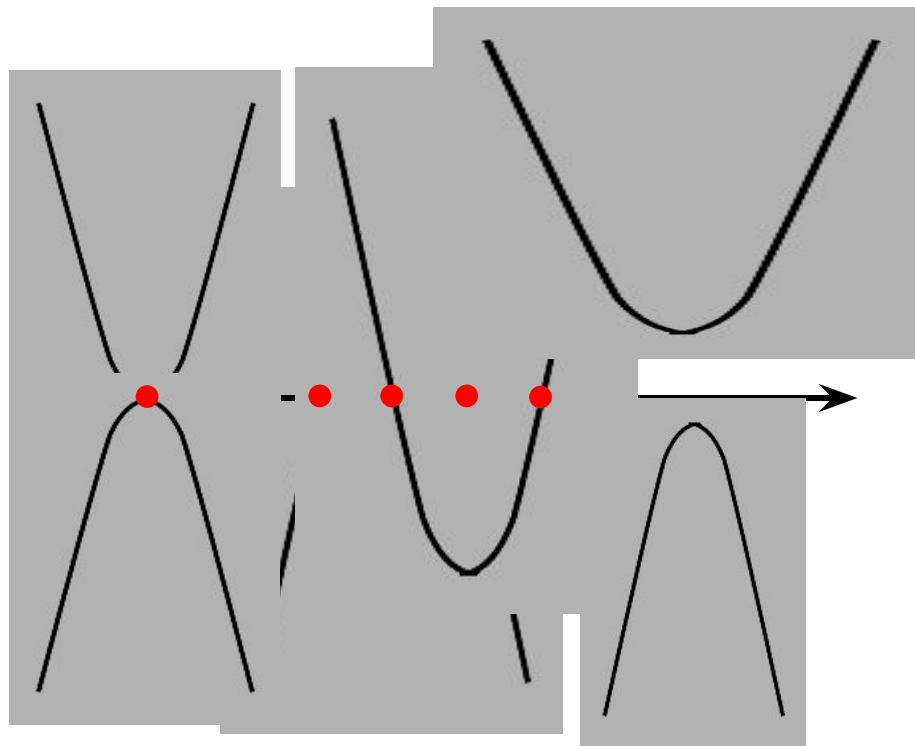
1. Два різних дійсних корені:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

2. Жодного дійсного розв'язку.

3. Два однакових дійсних корені (один корінь кратності 2):

$$x = \frac{-b}{2a}$$



# Квадратний тричлен

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Вершина (максимум при  $a < 0$  або мінімум при  $a > 0$ ):

$$x = \frac{-b}{2a}; \quad y = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Теорема Вієта: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$



# Квадратний тричлен

1. Знайдіть суму коренів усіх квадратних тричленів виду  $x^2 + px - 2016$ , де  $p$  набуває усіх цілих значень від -100 до 100?

А	Б	В	Г
0	100	-100	2016

2. Чому дорівнює відношення коренів квадратного рівняння, коефіцієнти якого поєднані співвідношенням:  $2b^2 - 9ac = 0$  ?

А	Б	В	Г
1	2	3	4

# Методи розв'язку алгебраїчних рівнянь

1. Що стверджує теорема Безу?

**Остача від ділення многочлена  $P(x)$  на  $(x-a)$  дорівнює  $f(a)$ .**

2. Якою буде остача від ділення многочлена  $P(x)$  на  $(x-a)$ , де  $a$  є його коренем?

**Нуль.**

3. Як називається спосіб швидкого ділення многочлена на  $(x-a)$ ?

**Схема Горнера.**

# Схема Горнера $P(x):(x-a)$

$$\frac{x^3 - x^2 + 4x - 1}{x - 4} =$$

У СТОВПЧИК

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - x^2 + 4x - 1 & x - 4 \\
 \hline
 -x^3 + 4x^2 & \\
 \hline
 3x^2 + 4x - 1 & \\
 -3x^2 + 12x & \\
 \hline
 16x - 1 & \\
 -16x + 64 & \\
 \hline
 63 & 
 \end{array}$$

Схема Горнера

	1	-1	4	-1
$a = 4$	1	3	16	63
	$x^2$	$x$	$x^0$	
	$4 \cdot 1 + (-1)$	$4 \cdot 3 + 4$	$4 \cdot 16 - 1$	

# Методи розв'язку алгебраїчних рівнянь

1. Пошук кореня рівняння методом підбору

**Вільний член алгебраїчного рівняння дорівнює добутку усіх його коренів.**

**Цілі корені рівняння є дільниками вільного члена.**

2. Зниження степеня рівняння: біквадратне рівняння, використання заміни змінної.

3. Особливі типи рівнянь:

зворотне рівняння (коефіцієнти симетричні) парного степеня  $2n$  шляхом ділення на  $x^n$  та введенням заміни

$$t = x + \frac{1}{x}$$

зворотне рівняння непарного степеня має корінь  $x = -1$  та шляхом ділення на  $(x+1)$  зводиться до зворотного рівняння парного степеня.

# Вправи

$$1. \frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13}$$

$$2. \frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \cdot \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6}$$

$$3. \left( \frac{z-2}{6z+(z-2)^2} + \frac{(z+4)^2-12}{z^3-8} - \frac{1}{z-2} \right) : \frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$$

$$4. \left( \frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}$$

$$5. (x^4 - 7x^2 + 1)^{-2} \left( \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 14 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 77 \right); x = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$$

# Вправи

$$6. \left( \frac{bx + 4 + \frac{4}{bx}}{2b + (b^2 - 4)x - 2bx^2} + \frac{(4x^2 - b^2)\frac{1}{b}}{(b + 2x)^2 - 8bx} \right) \frac{bx}{2}$$

$$7. \left( \frac{2-n}{n-1} + 4 \frac{m-1}{m-2} \right) : \left( n^2 \frac{m-1}{n-1} + m^2 \frac{2-n}{m-2} \right); m = \sqrt[4]{400}, n = \sqrt{5}$$

$$8. \frac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2}$$

$$9. \frac{a^4 - a^2 - 2a - 1}{a^3 - 2a^2 + 1} : \frac{a^4 + 2a^3 - a - 2}{1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}}$$

# Вправи

$$10. \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

$$11. \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$$

$$12. \frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23$$

$$13. \frac{ax^2}{x-1} = (a+1)^2$$

# Вправи

$$14. \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2$$

$$15. \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+6}{x+3} + \frac{x+10}{x+5} = 6.$$

$$16. \frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)} = -2.$$

$$17. \left( \frac{x^2+6}{x^2-4} \right)^2 = \left( \frac{5x}{4-x^2} \right)^2$$



# Вправи

$$18. (x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$$

$$19. 8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$$

$$20. \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15}$$

$$21. \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$$

# Вправи

$$22. \frac{(x-a)^2 + x(x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x(x-a) + x^2} = \frac{19}{7}$$

$$23. \frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$$

$$24. \frac{1}{x^3+2} - \frac{1}{x^3+3} = \frac{1}{12}$$

$$25. \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$$

$$26. \frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6$$

$$27. \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2,9$$

$$28. x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$$

$$29. 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$$

# Вправи

$$30. \begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ (x + y)xy = 120 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} u^2 + uv = 15, \\ v^2 + uv = 10. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x^2 y^3 = 13, \\ x^3 y^2 = 2. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3 y^3 = -8. \end{cases}$$

# **Множини та операції над ними. Раціональні та дробово-раціональні нерівності та їх системи**

Поняття множини. Об'єднання, перетин та різниця множин.

Поняття нерівностей та їх властивості.

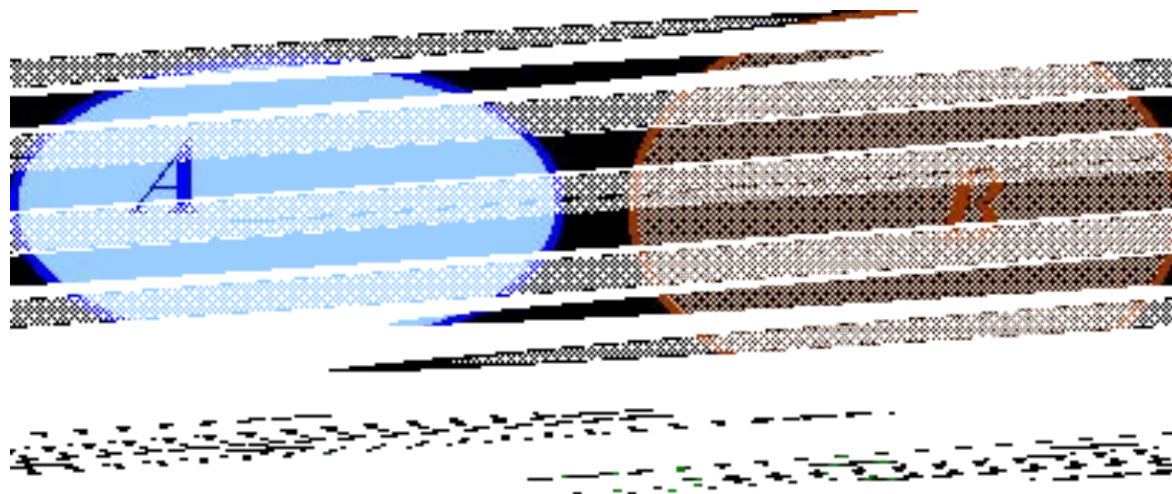
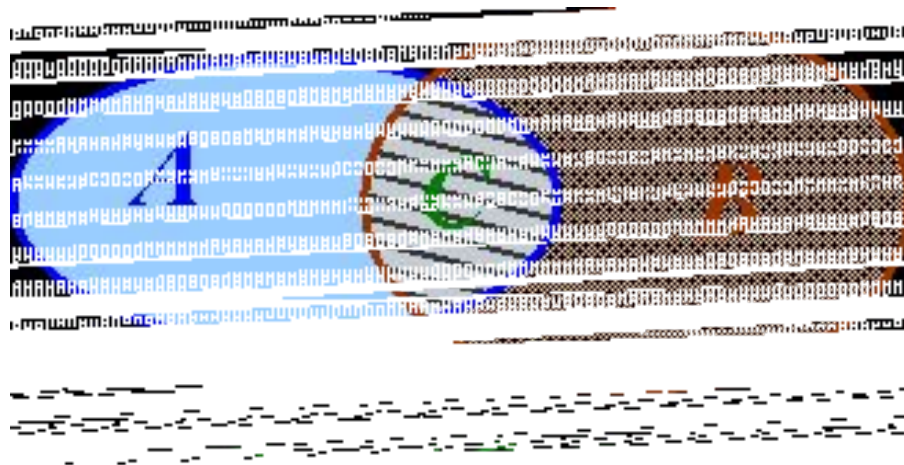
Розв'язування лінійних, раціональних та дробово-раціональних нерівностей. Метод інтервалів.

Системи алгебраїчних нерівностей з одним невідомим.

# Множини та дії над ними

1. Що таке множина?
2. Які можна виконувати дії над множинами?
3. Які множини ви знаєте?
4. Яку нерівність називають однорідною?
5. Як виконати об'єднання множин?
6. Як знайти перетин множин?
7. Як виконати віднімання множин?

# Перетин множин



# Перетин множин

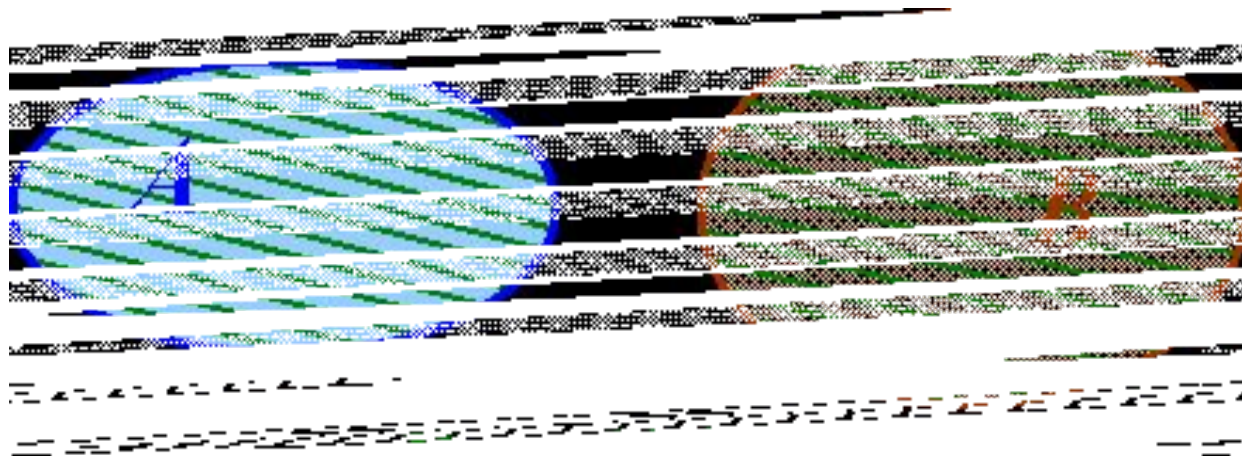
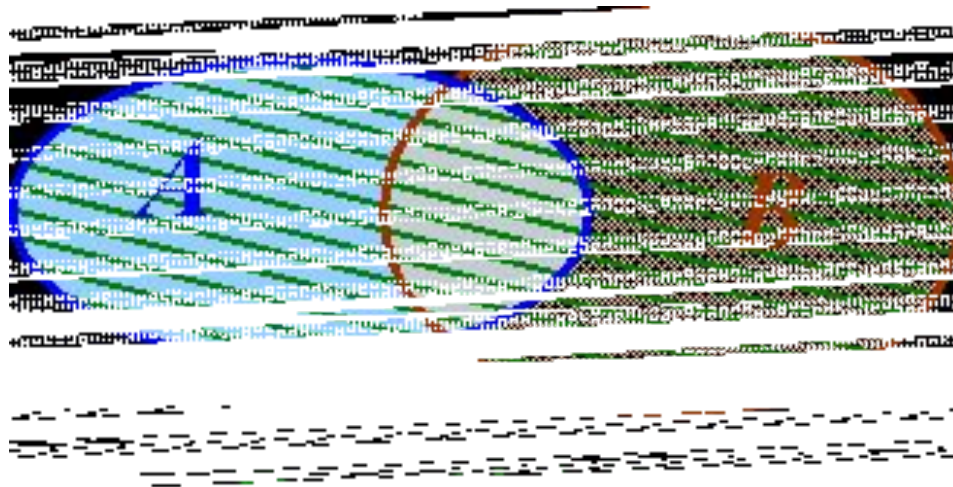
Нехай  $A$  - множина всіх дільників числа 32,  $B$  - множина всіх дільників числа 24. Знайти перетин множин  $A$  та  $B$ .

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$C = A \cap B, \quad C = \{1, 2, 4, 8\}.$$

# Сума (об'єднання) множин





# Сума (об'єднання) множин

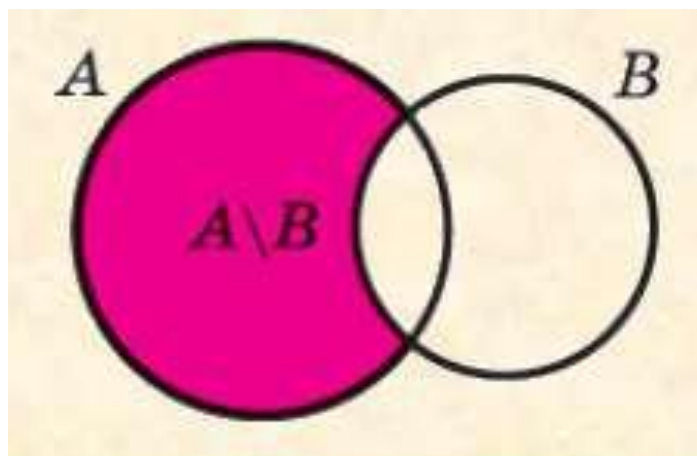
Нехай  $A$  - множина всіх дільників числа 32,  $B$  - множина всіх дільників числа 24. Знайти суму множин  $A$  та  $B$ .

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

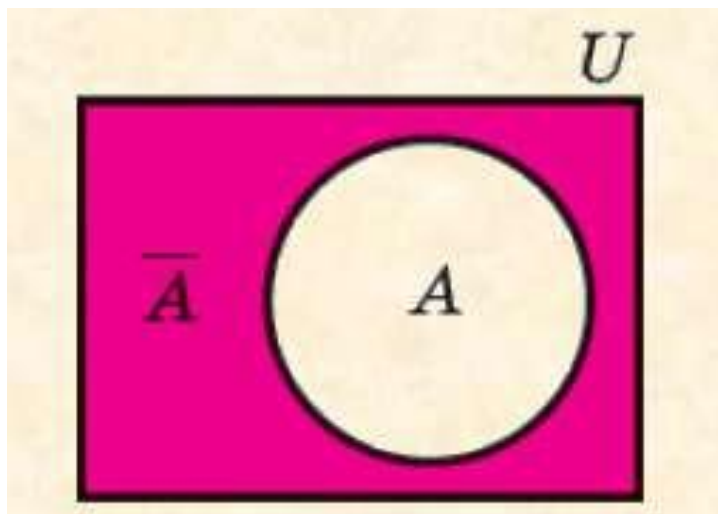
$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$C = A \cup B, C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32\}.$$

# Різниця множин



# Доповнення множин



# Різниця (доповнення) множин

Нехай  $A$  - множина всіх дільників числа 32,  $B$  - множина всіх дільників числа 24. Знайти різницю множин  $A$  та  $B$ .

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$C = A \setminus B, \quad C = \{16, 32\}.$$

# Різниця (доповнення) множин

Нехай  $A$  - множина всіх дільників числа 32,  $B$  - множина всіх дільників числа 16. Знайти різницю множин  $A$  та  $B$ .

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

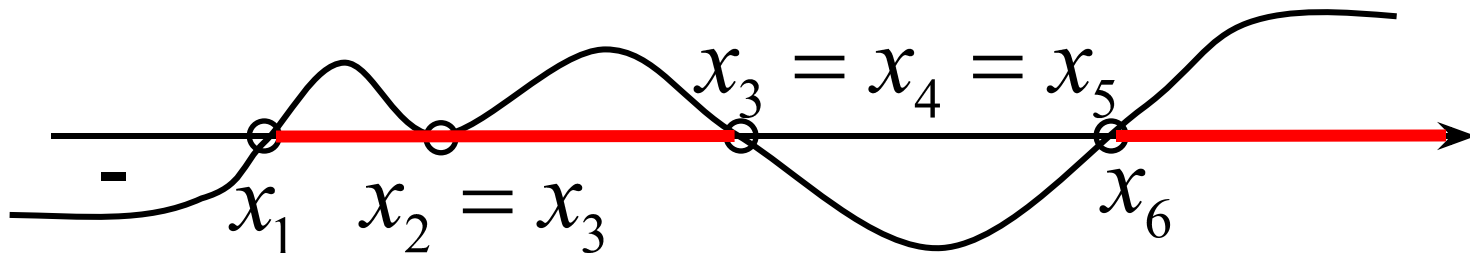
$$B \subset A; C = A/B = D_A B; C = \{32\}.$$

# Розв'язання раціональних та дробово-раціональних нерівностей

1. Що таке нерівність?
2. Що називають розв'язком нерівності?
3. Як розв'язати нерівність типу:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_n > 0$$

$$a_1(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) > 0$$



# Вправи

$$1. \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$$

$$2. (x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$$

$$3. \frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$$

$$4. \frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} > 0.$$

$$5. x^6 - 9x^3 + 8 > 0$$

# Вправи

$$6. \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0.$$

$$7. \frac{3}{6x^2 - x - 12} < \frac{25x - 47}{10x - 15} - \frac{3}{3x + 4}.$$

$$8. \frac{2 - x}{x^3 + x^2} > \frac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}. \quad 11. (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0.$$

$$9. \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - x + 1} \leq \frac{1 - 2x}{x^3 + 1}.$$

$$10. \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{4}{2x^2 + 7x + 6} \leq \frac{1}{2x + 3} + \frac{4}{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12}.$$