Сложение гармонических колебаний. Волновые процессы

1. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одной частоты. Пусть колебания вдоль оси x происходят с нулевой начальной фазой, а вдоль оси y со сдвигом по фазе на $\Delta\varphi$. Тогда уравнения колебаний примут вид:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos(\omega t + \Delta\varphi) = b\cos(\omega t)\cos\Delta\varphi - b\sin(\omega t)\sin\Delta\varphi.$$

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде исключим время t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a} \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя синус и косинус в формулу для y, получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\Delta\varphi \mp \sin\Delta\varphi\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi,$$

уравнение эллипса. Полуоси этого эллипса в общем случае не совпадают с осями координат.

2. ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

Определим форму траектории результирующего колебания для некоторых частных случаев.

1.Пусть $\Delta\varphi = 0$. В этом случае общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$

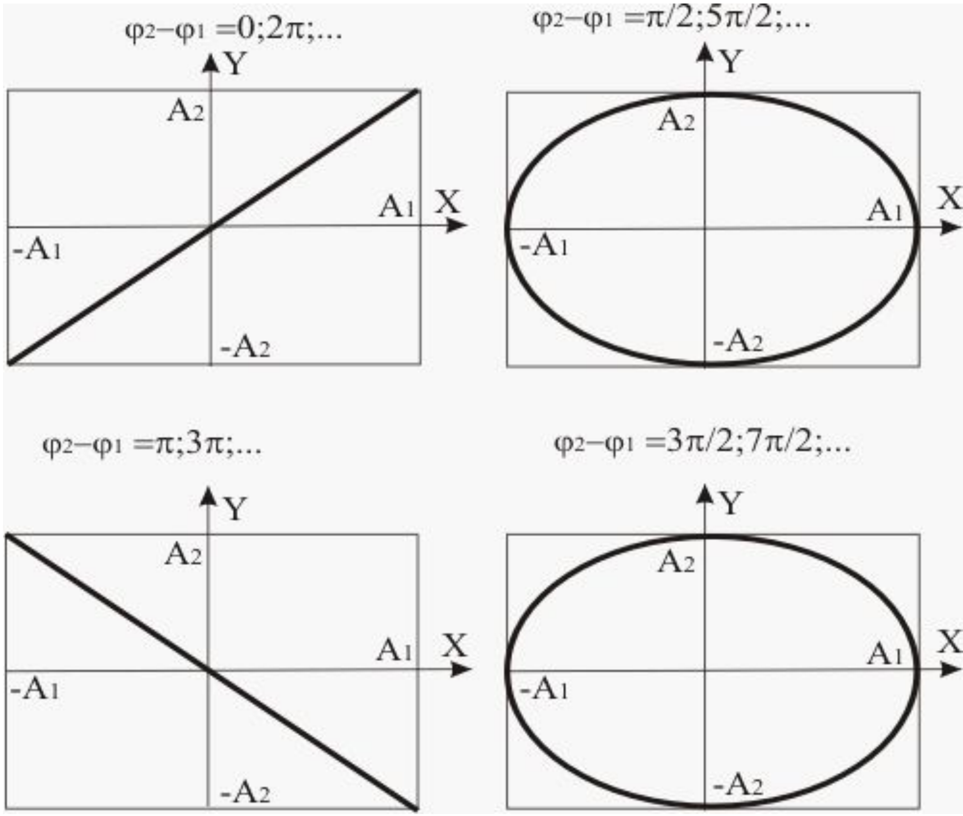
принимает вид $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0\Rightarrow$

Движение является гармоническим колебанием вдоль прямой $y=\frac{b}{a}x$ с амплитудой $\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Пусть $\Delta\varphi = \pm\pi$. В этом случае

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0\Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Траектория является прямой, лежа-щей во 2-м и 4-м квадрантах.



3. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ

При $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

принимает вид $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

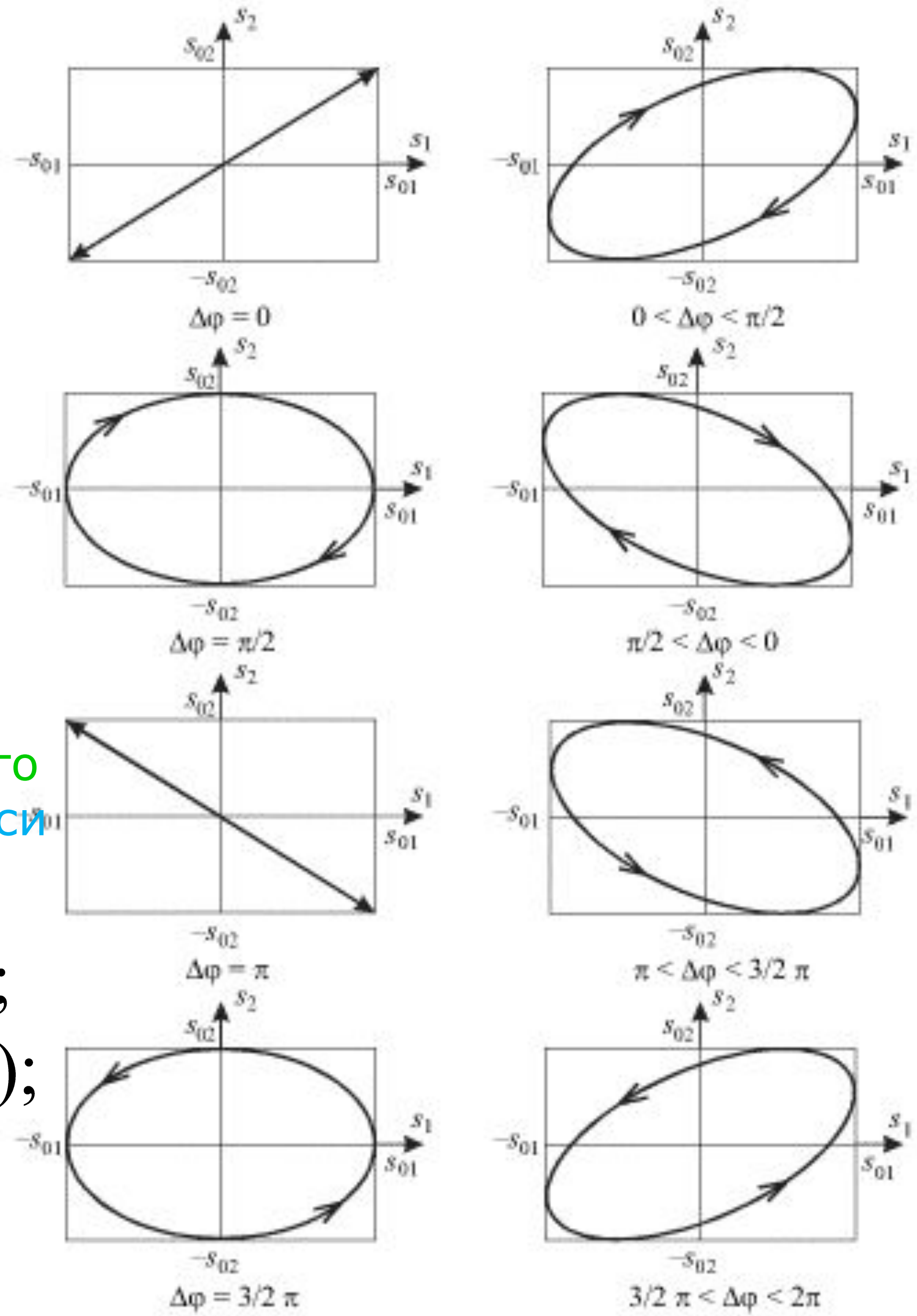
Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При $\Delta\varphi = +\pi/2$ движение по часовой стрелке

$$x = a\cos(\omega t);$$
$$y = -b\sin(\omega t);$$

При $\Delta\varphi = -\pi/2$ движение против часовой стрелки.

$$x = a\cos(\omega t);$$
$$y = b\sin(\omega t);$$



4. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

Если $\Delta\varphi = \pm\pi/2,\ a = b = r,$
то уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

принимает вид $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1.$

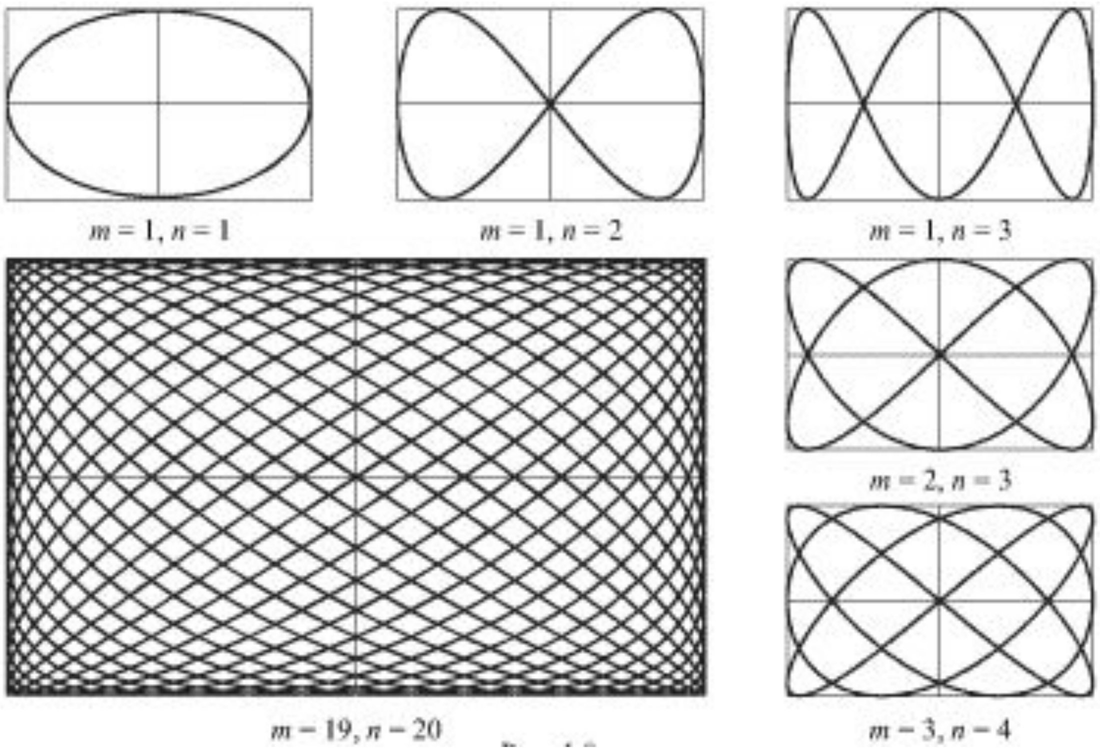
При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

Это означает что равномерное движение по окружности радиуса r с угловой скоростью ω может быть представлена как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний $x = r\cos(\omega t);$

$$y = \pm r\sin(\omega t).$$

Знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «–» – движению по часовой стрелке.

5. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ

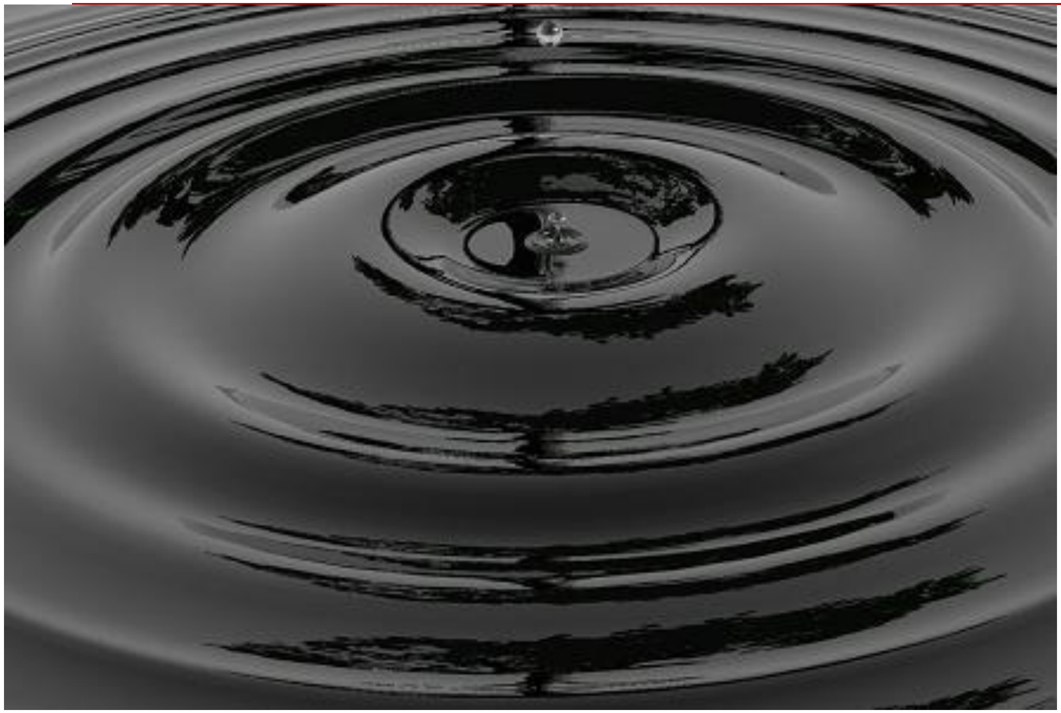


Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Наиболее простой вид имеют фигуры Лиссажу для случая, если отношение частот – это простая рациональная дробь.

Пусть, частоту колебаний вдоль оси x можно представить в виде $\omega_x = m\omega$, а вдоль оси y – $\omega_y = n\omega$, где m и n – натуральные числа. За то время, пока вдоль оси x точка успевает переместится из одного крайнего положения в другое m раз, вдоль оси y она совершит n таких перемещений.

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.

6. ВИДЫ ВОЛН

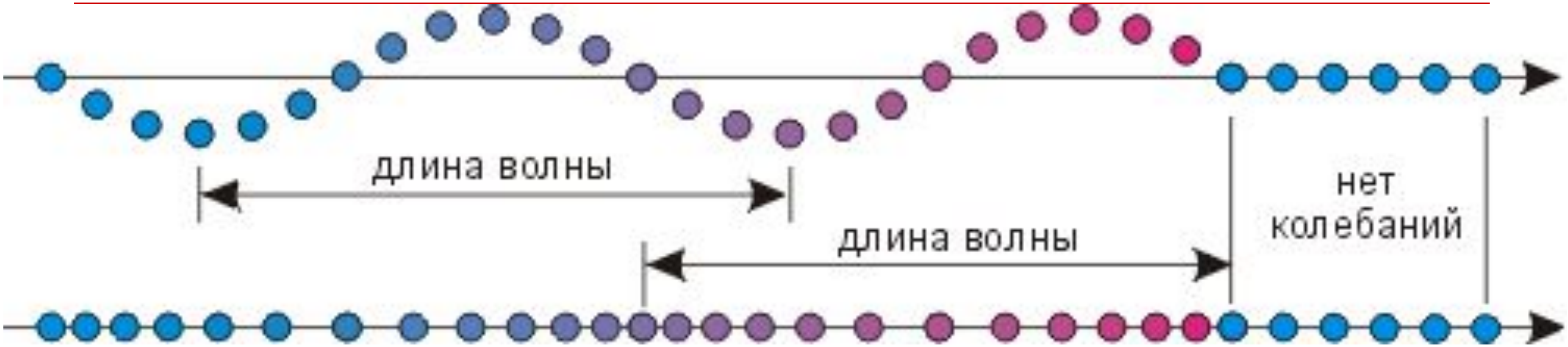


Волнами называется процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.

Характерное свойство волн состоит в том, что перенос энергии волной происходит без переноса вещества.

Основными видами волн являются механические (упругие) волны: в частности, звуковые и сейсмические волны, волны на поверхности воды; и электромагнитные волны: в частности, световые волны и радиоволны.

7. ПОПЕРЕЧНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ



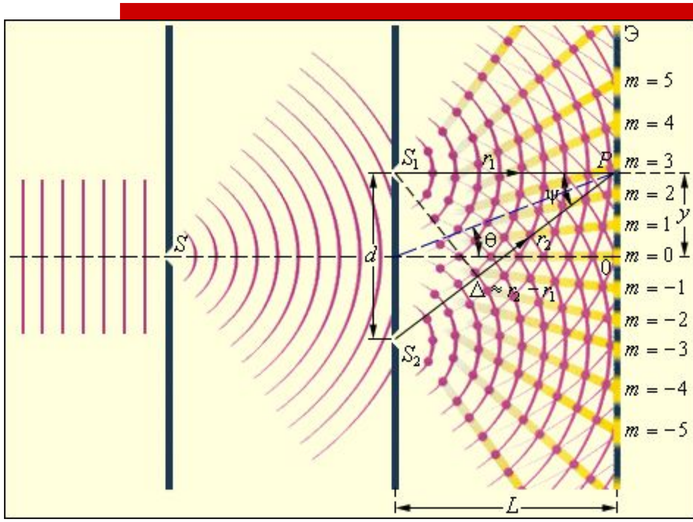
В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна различают продольные и поперечные волны.

В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Упругие поперечные волны могут возникать лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

8. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ВОЛН



Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга.

Это утверждение называется принципом суперпозиции волн.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами, обладают в каждой из точек среды постоянной разностью фаз, волны называются когерентными.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга.

9. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

$\xi = \xi_1 + \xi_2$ (принцип суперпозиции волн)

$\xi_1 = a\cos(\omega t - kx)$ $\xi_2 = a\cos(\omega t + kx)$

$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a\cos kx \cos\omega t$

$$\boxed{\xi = 2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\omega t}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{пучности} &= \pm n\frac{\lambda}{2} \\ x_{узла} &= \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \quad n = 0,1,2\ldots$$

Колебания, возникающие при наложении двух плоских встречных волн с одинаковой амплитудой, называются стоячей волной.

Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

В каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн. Амплитуда колебаний является периодической функцией

$$A = \left|2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|.$$