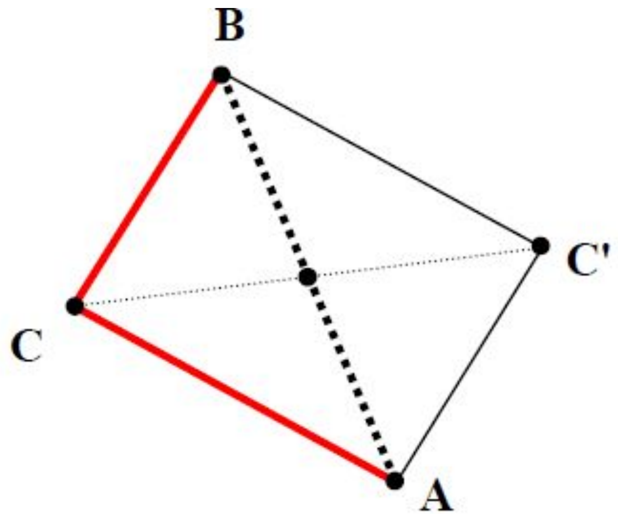
Симплекс метод розв’язання задачі лінійного програмування

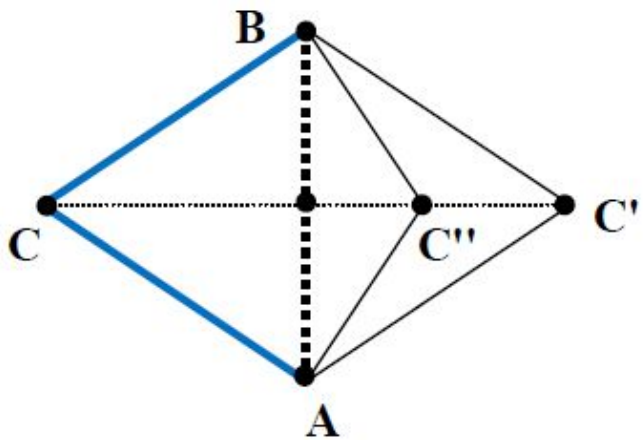
Поняття про симплекс метод

Термін "**симплекс**" означає *n*-вимірний тетраедр, або *n*-вимірний трикутник. Симплекс-метод знаходження локального мінімуму будь-якої функції декількох змінних лінійної або нелінійної запропоновано Нелдером і Мідом. Цей метод хоча і містить у своїй назві слово «симплекс» не має нічого спільного із симплекс методом розв’язання задачі лінійного програмування. **Суть методу Нелдера–Міда** полягає у спеціальній процедурі обчислення координат вершин цього *n*- вимірного трикутника для наступної ітерації (наближення) в залежності від результату порівняння значень показника ефективності у вершинах *n*-вимірного трикутника, координати яких можуть бути обчислені у попередній ітерації. "**Найгірша**" вершина, в якій показник ефективності приймає найбільше значення, якщо відбувається пошук мінімального значення показника ефективності, відкидається і замінюється новою.

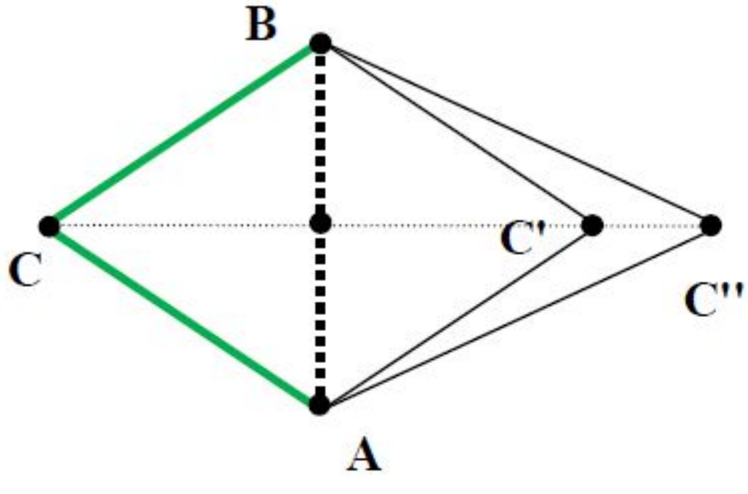
Координати нової вершини отримують, наприклад, наступним прийомом: «відображенням» старої вершини відносно прямої, що проходить через дві інші вершини. Окрім «відображення» для пошуку координат нової вершини використовуються так звані процедури "продовження", "стискання" або "скорочення". В результаті застосування означених прийомів та процедур значення показника ефективності у вершинах трикутників на кожній ітерації зменшується і при цьому зменшується «розмір» самого *n*-вимірного трикутника, стискаючись поступово до точки мінімального значення показника ефективності (див. рис.).



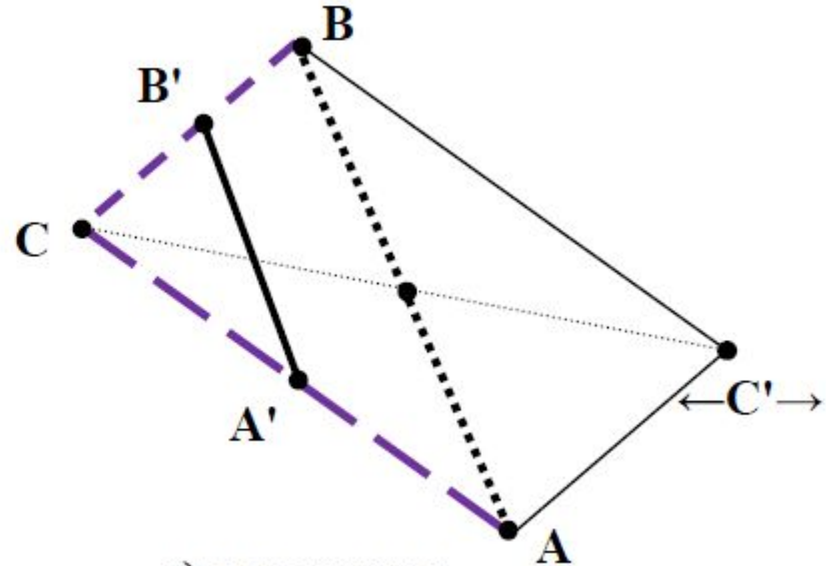
а) відображення



б) стиснення



в) розтягнення



г) стиснення

Графічна ілюстрація прийомів симплекс методу Нелдера-Міда

Приведення стандартної форми обмежень нерівностей до обмежень рівностей (рівнянь обмежень) основної задачі лінійного програмування

Стандартною формою обмежень нерівностей вважається система обмежень вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

де $x_j \geq 0 \;\; j = (1, n)$. Усі нерівності системи лінійно незалежні.

Цю систему можливо перетворити в обмеження рівності за допомогою додаткових невід'ємних змінних, а саме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n, \end{cases}$$

де $x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right); \ y_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right).$

Якщо до записаних обмежень рівностей додати показник ефективності:

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min_{\substack{x_j \geq 0\left(j=\overline{1,n}\right) \\ y_i \geq 0\left(i=\overline{1,m}\right)}},$$

який необхідно мінімізувати за невід’ємними змінними $x_j \geq 0$ $j=(1,n)$ та $y_j \geq 0$ $j=(1,m)$, то отримаємо основну задачу лінійного програмування.

Отже, в результаті переходу до основної задачі лінійного програмування маємо:

1) Рівняння обмежень задані у формі, де базисні (залежні) змінні $y_j \geq 0$ $j=(1,m)$ виражені через незалежні (вільні) $x_j \geq 0$ $j=(1,n)$ змінні.
2) Загальна кількість змінних дорівнює «$n+m$», де n–кількість початкових, m–додаткових змінних.
3) Показник ефективності явно залежить від початкових змінних. Вважаємо, що усі коефіцієнти при додаткових змінних показника ефективності дорівнюють 0.

Приклад

Дана задача лінійного програмування:

$$W = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min_{x_1, x_2, x_3 \geq 0}$$

за умови виконання обмежуючих нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_3 - 2x_2 \leq -1, \\ x_5 - 2x_4 + x_1 \leq -1, \\ x_5 - x_1 \leq 0, \\ x_3 + 2x_1 + x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Потрібно привести цю задачу до вигляду основної задачі лінійного програмування.

1. Приведемо обмеження нерівності до стандартної форми

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ x_3 - 2x_2 \le -1, \\ x_5 - 2x_4 + x_1 \le -1, \\ x_5 - x_1 \le 0, \\ -x_3 - 2x_1 - x_5 \le 0. \end{cases}$$

2. Використовуємо для отримання обмежень рівностей додаткові змінні

$$\begin{cases} y_1 = 5 - (2x_1 - x_2 + x_3), \\ y_2 = -1 - (x_3 - 2x_2), \\ y_3 = -1 - (x_5 - 2x_4 + x_1), \\ y_4 = 0 - (x_5 - x_1), \\ y_5 = 0 - (-x_3 - 2x_1 - x_5); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 2x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = -1 - x_3 + 2x_2, \\ y_3 = -1 - x_5 + 2x_4 - x_1, \\ y_4 = -x_5 + x_1, \\ y_5 = x_3 + 2x_1 + x_5. \end{cases}$$

3. Постановка задачі набуває вигляду

$$W = x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min_{\substack{x_{1,2,3} \ge 0 \\ y_{1,2,3} \ge 0}}$$

Основні прийоми та способи симплекс методу розв’язання задач лінійного програмування

Для розв’язання основної задачі лінійного програмування використовуємо принципи побудови оптимального розв’язку.

Прийоми та способи симплекс-методу розв’язання задачі лінійного програмування викладені у припущенні, що в задачі лінійного програмування використовується n змінних та m незалежних лінійних рівнянь-обмежень.

Прийом 1. Вибір вільних змінних.

Оберемо будь-які k змінних $k=n-m$ ($r=m$- ранг системи обмежень рівностей) в якості вільних і представимо через них m базисних змінних, що залишилися. Припустимо, що у якості вільних обрані перші k змінних, тобто x_1, x_2,…, x_k, а інші m представимо через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad x_n = \alpha_{n,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n,k}x_k + \beta_n, \end{cases}$$

Тобто маємо

$$\underbrace{1, 2, \ldots, k,}_{k\text{ вільних змінних}} \quad \underbrace{k+1, \ldots, n}_{m\text{ базисних змінних}}.$$

Якщо припустити, що всі вільні змінні дорівнюють $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$, то отримаємо координати вершини симплексу:

$$x_{k+1}=\beta_{k+1},\ldots,x_n=\beta_n\,.$$

Цей розв'язок може бути допутимим, якщо всі вільні коефіцієнти – невід'ємні, або недопустимим, якщо серед коефіцієнтів є хоча б одне від'ємне число.

Припустимо, що розв'язок є допустимий, тобто знайдено опорний розв'язок. При цьому виникає питання, чи є розв'язок оптимальним? Для перевірки опорного розв'язку на оптимальність, представимо показник ефективності як функцію, яка залежить від вільних змінних:

$$W=c_1x_1+\ldots+c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1}+\ldots+c_nx_n \Leftrightarrow$$
$$W=\gamma_0+\gamma_1x_1+\ldots+\gamma_kx_k\rightarrow \min_{x_j\geq 0,\ \left(j=\overline{1,k}\right)}\,.$$

Враховуючи, що в опорному розв'язку $x_j=0$ (j=1,k), тоді $W=\gamma_0$.

Проаналізуємо, чи можливо зменшити показник ефективності, збільшивши які-небудь змінні $x_1,\ldots, x_k$ (зменшувати їх неможливо, тому що всі ці змінні, при отриманні оптимального розв'язку дорівнюють 0, а від'ємні значення недопустимі).

Якщо всі коефіцієнти $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ додатні, то збільшуючи будь-які змінні $x_1,\ldots, x_k$ порівняно із 0 неможливо зменшити показник ефективності. Тому знайдений опорний розв'язок є оптимальним.

Прийом 2. Покращення опорного розв'язку.

Якщо серед коефіцієнтів $\gamma_1,\ldots, \gamma_k$ є від'ємні, то збільшуючи ті змінні, при яких *коефіцієнти від'ємні*, досягаємо покращення розв 'язку, тобто *зменшення показника ефективності*.

Припустимо, що є єдиний від'ємний коефіцієнт γ_1. Необхідно виконати дві дії:

1) Збільшити x_1, але так, щоб жодна із базисних змінних $x_{k+1},\ldots, x_n$ не стала від'ємною, якщо деякий із коефіцієнтів $\alpha_{k+11},\ldots,\alpha_{n1}$ при x_1 від'ємний. Збільшувати x_1 можливо без обмежень, якщо всі коефіцієнти при x_1 у виразах для обчислення базисних змінних додатні. Але в цьому випадку показник ефективності W прямує до $-\infty$ при $x_1 \to +\infty$, тобто оптимального розв'язку, який має фізичний зміст, не існує. Існує абстрактний розв'язок.

Розв'язання задачі припиняється, необхідно переформулювати постановку задачі.

2) Виключити x_1 із списку вільних змінних і вставити у список базисних, а із списку базисних виключити ту змінну, припустимо x_L, яка першою досягне значення 0 при збільшенні x_1 . Випишемо рівняння для x_L:

$$x_L = \alpha_{L1} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{Lk} \cdot x_k + \beta_L$$

в якому покладемо, що $x_2=0,\ldots,x_k=0$, $x_L=0$. Тоді

$$x_1 = -\frac{\beta_L}{\alpha_{L1}} \geq 0$$

тому, що $\alpha_{L1}<0$, $\beta_L \geq 0$.

Отримане значення x_1 – це те значення, при якому $x_L=0$. Взагалі першою досягне нуля та змінна із складу $x_{k+1},\ldots, x_n$ для якої $-\frac{\beta_L}{\alpha_{L1}}$ або $\left|\frac{\beta_L}{\alpha_{L1}}\right|$ буде найменшим ($L \in [k+1,n]$, $L \in N$). Припустимо, що це x_r, $r \in [k+1,n]$, $r \in N$.

Прийом 3. Зміна складу вільних змінних.

Обираємо новий склад вільних змінних $x_2, x_3, \ldots, x_k, x_r$ та базисних $x_1, \ldots, x_{k+1}, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$. Обчислимо нові базисні змінні через нові вільні та перевіряємо умову невід'ємності базисних змінних при нульових вільних змінних, тобто з'ясуємо чи є розв'язок опорним.

Перевіряємо отримані опорні розв'язки на оптимальність, використовуючи прийоми 1 та 2.

Висновок: практична реалізація симплекс методу потребує розробки двох алгоритмів:

1. Визначення опорного розв'язку основної задачі лінійного програмування.
2. Визначення оптимального розв'язку основної задачі лінійного програмування.

Приклад 2

Пошук оптимального розв’язку шляхом поступового покращення результату із використанням трьох, описаних вище прийомів.

Постановка задачі:

$$W = 5x_1 - 2x_3 \to \min_{X \in G}$$

при умові виконання обмежень G :

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5, \\ 3x_1 + 5x_4 \le 7, \\ x_i \ge 0, (i = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T .$$

Методика розв’язання задачі

1) виконати перехід до стандартного виду основної задачі лінійного програмування;

2) перевірити систему обмежень-рівностей на сумісність;

3) виконати обчислення оптимального розв’язку із використанням прийомів симплекс методу.

1. Перехід до стандартного вигляду задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 + y_1 = 2; \\ -x_1 + x_3 + x_4 + y_2 = 5; \\ 3x_1 + 5x_4 + y_3 = 7; \\ x_{1,2,3,4} \geq 0,\ y_{1,2,3} \geq 0, \end{cases}$$

2. Перевірка обмежень-рівностей на сумісність:

$$\begin{cases} -5 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + y_1 = 2, \\ -1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + y_2 = 5, \\ -3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + y_3 = 7, \end{cases}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ранг матриці А: $r_A = 3$, що дорівнює m– кількості обмежень-рівностей. Отже, система обмежень сумісна та лінійно залежних обмежень немає. Зазвичай сумісності та незалежності обмежень можливо досягти ще при побудові математичної моделі задачі, якщо враховувати фізичний зміст цих обмежень.

3. Обчислення оптимального розв'язку задачі лінійного програмування симплекс методом почнемо з вибору базисних та вільних змінних:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2, \\ y_2 = x_1 - x_3 - x_4 + 5, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0\ , \\ y_{1,2,3} \geq 0, \end{cases}$$

де система задає ОДР G , на якій оптимізується критерій

$$W = 5x_1 - 2x_3 \rightarrow \min_{\left[X^T\ Y^T\right]^T \in G}, \qquad X = \left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^T, Y = \left[y_1, y_2, y_3\right]^T.$$

Загальна кількість змінних в переформульованій задачі n=7, m=3 – кількість сумісних, лінійно незалежних обмежень-рівностей.

Кількість вільних змінних k=7−3=4.

Прийом 1.

Обираємо в якості вільних змінних $x_{1,2,3,4}$ і припускаємо, що вони дорівнюють нулю. В результаті отримаємо розв'язок:

$$X_1 = [x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0; y_1 = 2; y_2 = 5; y_3 = 7],$$

який можливо вважати опорним.

При цьому $W(X_1)=0$.

Прийом 2.

1. Коефіцієнт при x_3 виразу для обчислення показника ефективності від'ємний, тому за рахунок збільшення x_3 можливо зменшити W. Обираємо в якості нової вільної змінної ту змінну (серед $y_{1,2,3}$), для якої модуль відношення вільних коефіцієнтів до коефіцієнта при x_3 найменший:

$$\left|\frac{2}{-2}\right| = 1 < \left|\frac{5}{-1}\right|.$$

Обираємо y_1. Таким чином, вільними змінними є x_1, x_2, x_4, y_1. Обчислимо нові базисні змінні x_3, y_2, y_3:

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1, \\ y_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2x_1} - \frac{1}{2}x_2 - x_4 + 4, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases}$$

Перевіряємо знайдений розв’зок, чи є він опорним.

$$X_2 = \left[y_1 = 0; x_{1,2} = 0; x_3 = 1; y_2 = 4; y_3 = 7\right]$$

X_2– опорний розв’язок. Спостерігається зменшення значення критерію:

$$W\left(X_2\right) = y_1 - x_2 - 2 = -2.$$

2. Коефіцієнт при x_2 від'ємний. Можливо зменшити значення показника ефективності завдяки збільшенню x_2. Аналогічно викладеному у **1. визначаємо нові вільні та базисні змінні:**

$$\begin{cases} x_3 = -y_2 + x_1 - x_4 + 5, \\ x_2 = y_1 - 2y_2 - 3x_1 - 2x_1 - 2x_4 + 8, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7, \end{cases}$$

$$X_3 = \left[\underbrace{y_1 = 0; x_1 = 0; x_4 = 0; y_2 = 0}_{\text{вільні змінні}}; \underbrace{x_2 = 8; x_3 = 5; y_3 = 7}_{\text{базисні змінні}} \right],$$

$$W\left(X_3\right) = 2y_2 + 3x_1 + 2x_4 - 10 = -10.$$

Всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для обчислення показника ефективності невід’ємні, тому досягати зменшення показника ефективності за рахунок додаткових вільних змінних неможливо. Досягнуто глобального мінімуму

$$W = -10$$

в точці

$$x_1 = 0,\ x_4 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ x_2 = 8,\ x_3 = 5,\ y_3 = 7.$$

Зауваження

В наведених прикладах при застосуванні прийомів симплекс методу кожного разу виникали розв’язки, які були невід’ємними, тобто опорними. В більшості практичних випадків виникають ситуації, коли при обраних вільних змінних з нульовими значеннями виникають від’ємні значення базисних змінних, тобто не виконується умова невід’ємності змінних. Тому у наступних лекціях розглянемо спеціальний алгоритм обчислення опорного розв‘язку.