

# Математическое и имитационное моделирование

Этапы имитационного  
моделирования



# Этапы имитационного моделирования

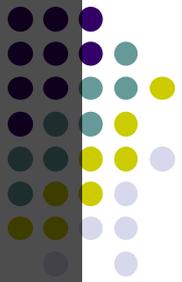


1. Постановка проблемы и ее качественный анализ
2. Формализация модели
3. Подготовка данных: спецификация, идентификация, сбор данных
4. Программная реализация модели
5. Верификация
6. Проверка адекватности и точности

# Этапы имитационного моделирования



7. Оценка устойчивости и чувствительности модели
8. Калибровка модели
9. Планирование и проведение имитационного эксперимента
10. Анализ результатов
11. Оптимизация модели
12. Документирование и эксплуатация модели

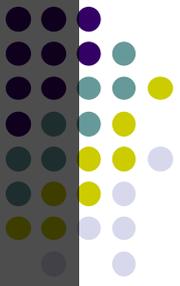


# Постановка задачи на моделирование

## ПОДЭТАПЫ:

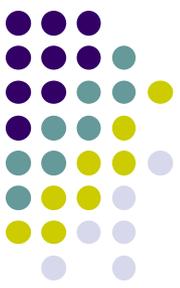
- ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ;
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛИ МОДЕЛИРОВАНИЯ;
- **АНАЛИЗ ОБЪЕКТА.**

# Пример. Постановка задачи на моделирование

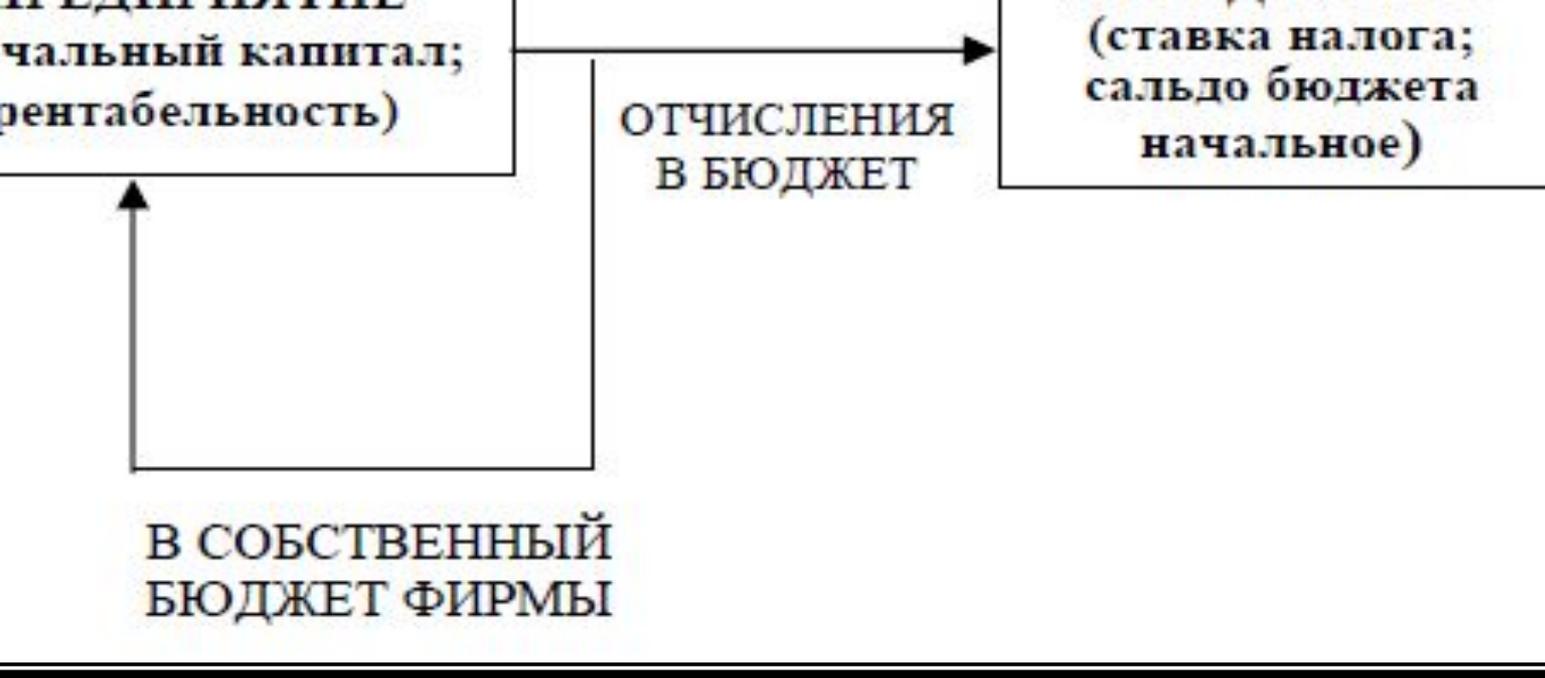


Исследовать зависимость поступлений в бюджет от величины налоговой ставки и обосновать величину налоговой ставки.

# Разработка концептуальной модели:



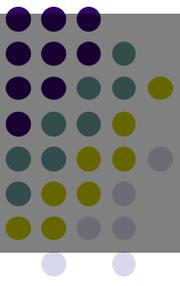
Концептуальная модель — это модель предметной области, состоящая из перечня взаимосвязанных параметров, используемых для описания этой области, вместе со свойствами, характеристиками, причинно-следственными связями.



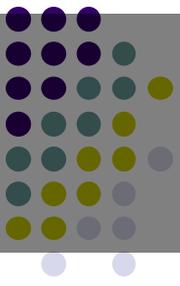
**Вся прибыль распределяется только на два потока:**

- в бюджет;
- в собственный капитал предприятия (фирмы).

# Этапы построения концептуальной модели



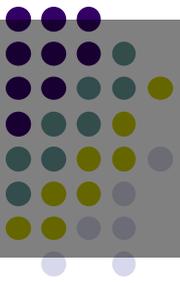
- 1) Определение типа системы :  
(дискретная, непрерывная)
- 2) Декомпозиция системы
- 3) Описание рабочей нагрузки



## II. Математическая модель

**Определяются функциональные зависимости между переменными, и для каждого варианта входных данных находят выходные данные системы.**

# Математическая модель



## Исходные данные:

- налоговая ставка;
- рентабельность;
- начальный капитал предприятия;
- интервал моделирования.

# Требования к исходной информации



Порядок описания каждого параметра:

- 1) определение и краткая характеристика;
- 2) символ обозначения и единица измерения;
- 3) диапазон изменения;
- 4) место применения в модели.

# Требования к выходной информации



- 1) определение и краткая характеристика;
- 2) символ обозначения и единица измерения;
- 3) диапазон изменения;
- 4) перечень вычисляемых статистических характеристик



# Математическая модель

Сумма налоговых поступлений от предприятий в бюджет за моделируемый период:

$$BD(t) = \int_{t=tb}^{t=tf} PRF(t) \cdot TXRT \cdot dt,$$

Где

**BD(t)** – сумма поступивших в бюджет средств от начала моделирования к моменту t, руб.;

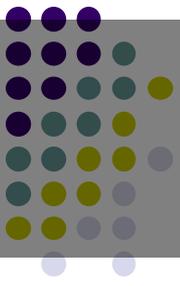
**PRF(t)** – доналоговая прибыль (profit), получаемая предприятием в момент t, руб./год;

**TXRT** – ставка налога на прибыль (tax rate);

**t** – текущее время;

**tb** – начальный момент моделирования (begin);

**tf** – последний момент моделирования (final).



# Математическая модель

Капитализируемый  
предприятием за время  
моделирования остаток  
прибыли:

$$CP(t) = \int_{t=tb}^{t=tf} PRF(t) \cdot (1 - TXRT) \cdot dt.$$

Прибыль в момент t:

$$PRF(t) = CP(t) \times RN,$$

где RN – рентабельность капитала  
предприятия.



## 3 Этап. Подготовка данных

- **Системные спецификации модели**— перечень и характеристики задач, необходимые для их решения исходные данные и выходные результаты, формулировка исходных предпосылок, ограничений.

# Пример. «Спецификация модели»



- A. Внешние факторы – спрос на продукцию, план поставок
- В. Внутренние – затраты на производство, существующие и планируемые производственные возможности.

# Идентификация модели



— это определение значений внешних характеристик ИМ путем:

- измерения характеристик функционирующей системы;
- измерения на прототипах;
- экспертных оценок.

# 4 этап. Программная реализация

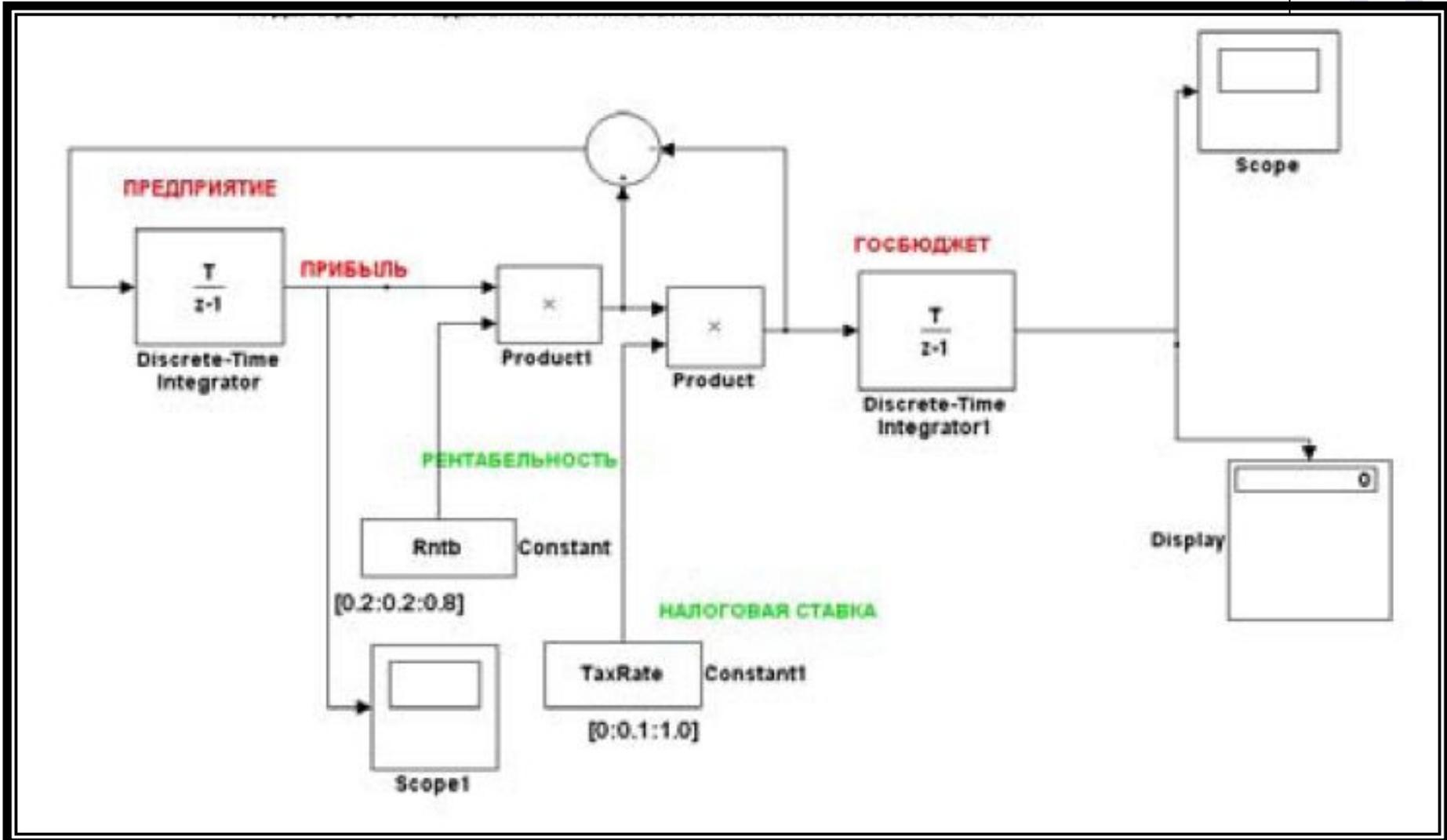


Два подхода к созданию компьютерной модели:

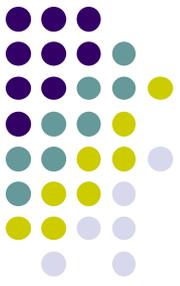
- 1) Создание алгоритма решения задачи и его кодирование на одном из языков программирования.
- 2) Формирование компьютерной модели с использованием программного приложения: (электронных таблиц, СУБД, спец. Средства имитационного моделирования(GPSS, Vensim, др.).



# Пример. Программная реализация



# 5 Этап. Верификация модели



— доказательство соответствия алгоритма

функционирования модели цели

моделирования, выяснение границ ее

применимости.

- Все ли существенные параметры включены в модель?
- Нет ли в модели несущественных параметров?

# 5 Этап. Верификация модели

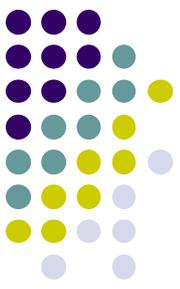


- Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами?
- Правильно ли определены ограничения на значения параметров?

Используются:

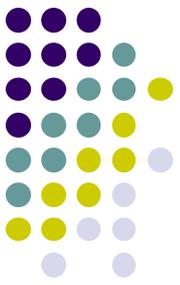
- Методы комплексной отладки
- Замена стохастических элементов детерминированными
- Тест на непрерывность моделирования

# 6 этап. Проверка адекватности и точности модели (валидация).



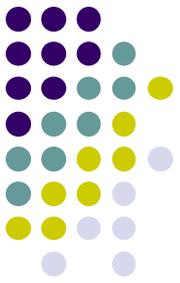
- Анализ результатов пробных прогонов (обычно  $N_0 \geq 10$ ):
  - по средним значениям откликов модели и системы
  - по дисперсиям отклонений откликов
  - по максимальному значению абсолютных отклонений откликов
  - по доверительному интервалу мат. ожидания отклика

# 7 этап. Оценка устойчивости и чувствительности модели



- - степень нечувствительности к изменению входных условий
- путем оценки дисперсии значений отклика (проверяют увеличивается ли она с ростом интервала моделирования)

## 8 этап. Калибровка модели



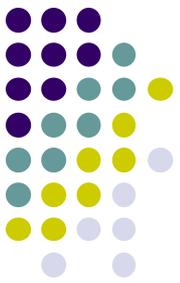
- изменение типов событий;
- введение новых процессов;
- изменение закона распределения моделируемых величин

## 9 этап. Планирование и проведение имитационного эксперимента



- Составляют план проведения эксперимента;
- Определяется количество прогонов;
- Определяется способ представления параметров тестирования, результатов и их обработки.

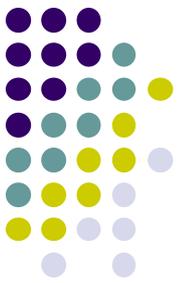
**Количество реализаций  $N$ ,  
обеспечивающих заданную  
точность получения оценок.**



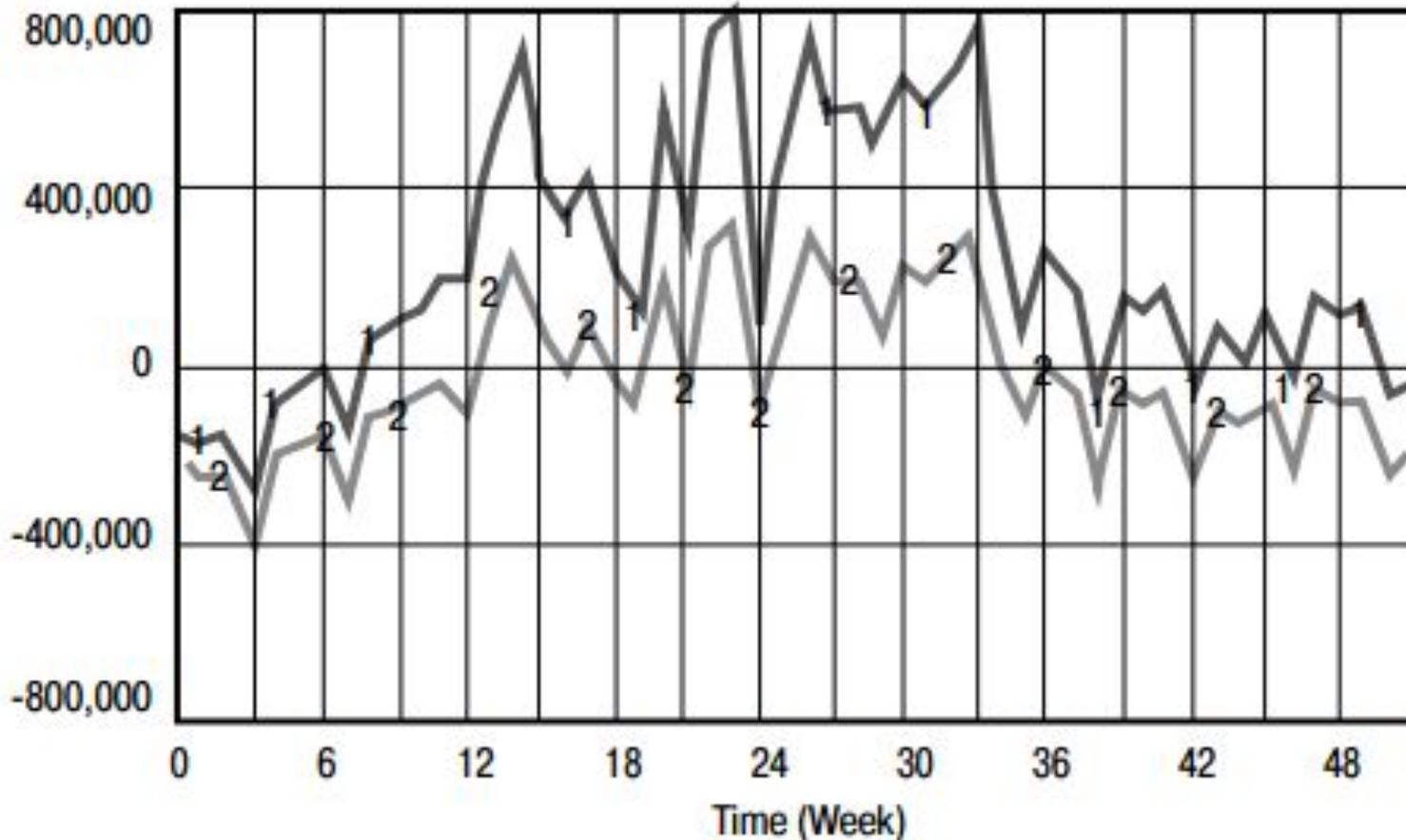
$$N \approx N_0 \frac{d_0^2}{d^2}$$

**Для оценки длительности переходного периода  
применяют статистические критерии.**

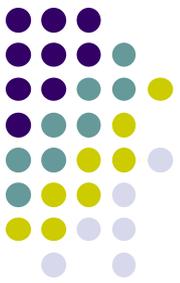
# График изменения балансовой прибыли при увеличении стоимости выпускаемой продукции на 50%.



БАЛАНСОВАЯ ПРИБЫЛЬ

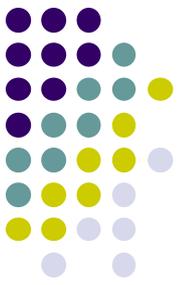


# Анализ и обработка результатов моделирования.



- Оценка вероятности.
- Гистограмма.
- Оценка математического ожидания.
- Оценка дисперсии.
- Оценка корреляционного момента.
- Оценка характеристик случайного процесса.
- Количество реализаций, обеспечивающих заданную точность.

# 10 этап. Оптимизация модели

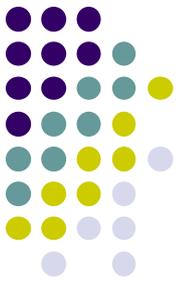


- Упрощение модели при заданном уровне адекватности.

Основные показатели, по которым возможна оптимизация модели, - время и затраты средств для проведения исследований на ней.

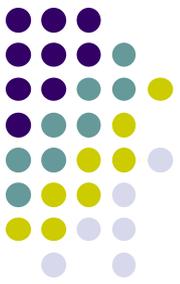
В основе оптимизации лежит возможность преобразования моделей из одной формы в другую. Преобразование может выполняться либо с использованием математических методов, либо эвристическим путем.

# 11 этап. Эксплуатация модели



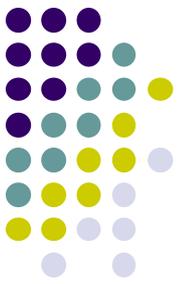
Создание пакета сопроводительной документации

# Отличительные особенности ИМ



- приближенно воспроизводится сам изучаемый процесс, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.
- при создании ИС законы функционирования всей системы могут быть неизвестны (достаточно знания алгоритмов, описывающих поведение отдельных элементов системы и связей между ними)

# Отличительные особенности ИМ



- В ИМ связи между параметрами и характеристиками системы выявляются, а значения исследуемых характеристик определяются в ходе имитационного эксперимента.
- ИМ в качестве входных данных требует использование случайных параметров и задание распределений сл. величин.

ИМ представляет собой статистический эксперимент, результаты которого анализируются на основе стат. тестов.

# Отличительные особенности ИМ



- ИМ (для одних и тех же значений входных параметров) генерирует разные значения изменяемых характеристик.
- Увеличение числа испытаний ИМ обычно ведет к увеличению точности получаемых оценок статистических характеристик наблюдаемых величин.
- Результаты ИМ достигают стационарных значений только после многократного повторения эксперимента.

# Примеры применения имитационных моделей



- ***модели роста численности популяции.***  
Простейшая модель такого рода (закон экспоненциального роста) была использована в XIX веке Т. Мальтусом.
- **Недостаток:** модель не учитывала, что общий объем жизненных ресурсов накладывает естественные ограничения на динамику развития процесса.

# Примеры применения имитационных моделей



- Модели позволяют не только углубить понимание сложных, развивающихся систем, но и прогнозировать их развитие, например:
  - модель Форрестера, имитирующая развитие американской экономики и демонстрирующая наличие коротких и длинных циклов (развитие этой модели касалось уже глобальных процессов);
  - модель Н. Моисеева для анализа последствий ядерной войны (эффект "ядерной зимы").



# Примеры моделей

- Если динамических переменных больше одной, тогда и уравнений (дифференциальных или разностных) должно быть несколько, т.е. это система уравнений.
- **Пример:** модель Лотки-Вольтерра (в биологии известна как модель "хищник-жертва", в политологии – как модель "народ-правительство", в истории – как модель "бароны и крестьяне", в экономике как модель конкуренции фирм).



# Модель «Хищник-Жертва»

$Y$  — число фирм, находящихся на рынке, а  $X$  — число фирм, решающих задачу захвата рынка и вытеснения с них  $Y$  фирм.

$$\frac{dy}{dt} = \mu \times Y \left(1 - \frac{Y}{Y_m}\right) - kXY \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = k'XY - mX \quad (2)$$

При оценке рыночной ситуации в условиях кризиса с периодом можно использовать модель Лотки — Вольтерры:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mu \times Y(t - \tau) \left(1 - \frac{Y(t)}{Y_m}\right) - c \times Y(t) \quad (3) \longrightarrow \frac{dY}{dt} = -\mu \times Y(t) + c \times Y(t - \tau) \quad (4)$$