Векторная алгебра

Основные понятия

Математическая величина

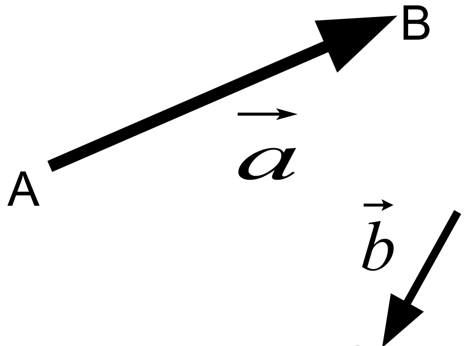
Скалярная величина
(характеризуется численным
значением)

Векторная величина
(Характеризуется численным
значением и направлением)

Основные понятия

- **Определение 1.**

  Вектором называется отрезок, имеющий определенную длину и направление.



Обозначения:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{AB},\ldots$$

- **Определение 2.**

  Модулем вектора (длиной вектора) называется длина отрезка :

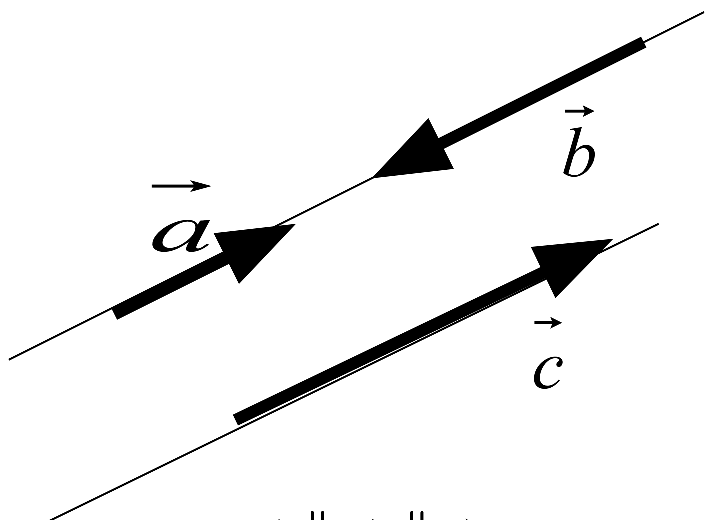
$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Основные понятия

- $\vec{0}$ - вектор, у которого начало и конец совпадают. $\left|\vec{0}\right| = 0$

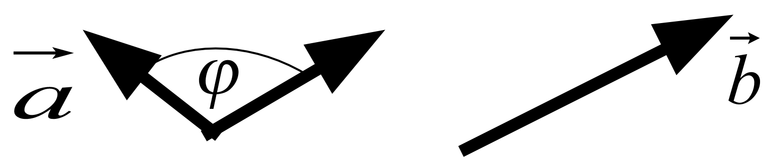
- **Определение 3.**

  Коллинеарными называются векторы, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Обозначение: $\vec{b} \parallel \vec{a} \parallel \vec{c}$

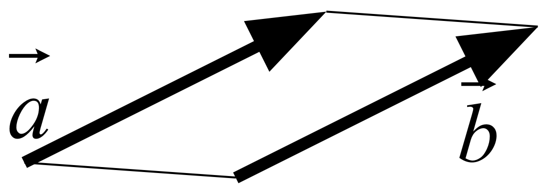
Определение 4.
Углом φ **между векторами** называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы их направления совпали.



Основные понятия

- **Определение 5.**

  Два вектора называются **равными**, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.



$$\boxed{\vec{a} = \vec{b}}$$

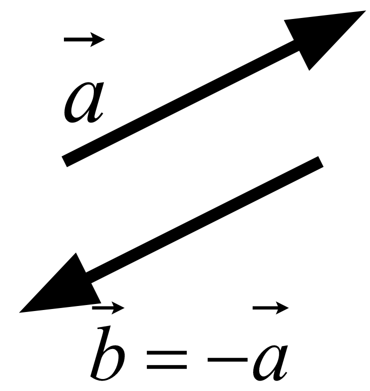
- **Следствие.**

  При параллельном переносе получаются равные векторы.

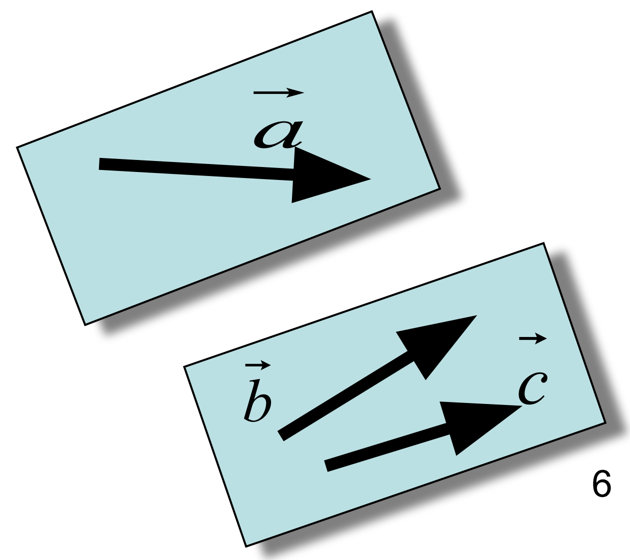
Основные понятия

- **Определение 6.**
  Два вектора называются **противоположными**, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и противоположное направление.

$$\boxed{\vec{b} = -\vec{a}}$$



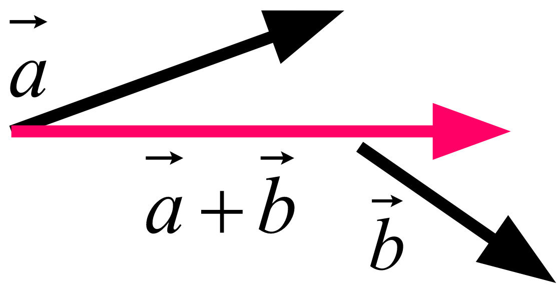
- **Определение 7.**
  Компланарными называются векторы, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.



- Замечание. Два вектора всегда компланарны.

Операции с векторами

- **Сумма векторов.**

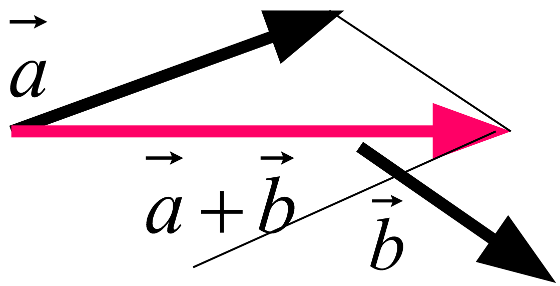


- **Определение 1 (правило треугольника).**

  Пусть начало второго вектора совпадает с концом первого. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется **суммой** этих векторов.

Операции с векторами

- **Сумма векторов.**



- **Определение 2 (правило параллелограмма).**

  Пусть начала первого и второго векторов совпадают.

  Построим на этих векторах параллелограмм.

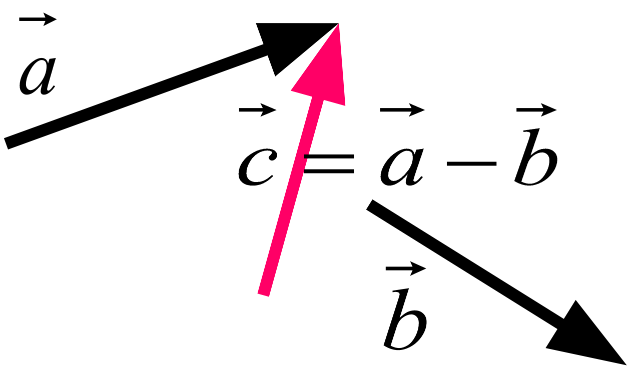
  Тогда вектор, совпадающий с диагональю, проходящей через общее начало, называется **суммой** этих векторов.

Операции с векторами

- **Разность векторов.**
- **Определение 1.**

Разностью векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что сумма $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$

Определение 2.



Пусть начала первого и второго векторов совпадают.

Тогда **разностью** векторов называется вектор, соединяющий их концы и направленный из конца вычитаемого в конец уменьшаемого вектора.

Операции с векторами

- **Произведение вектора на число.**
- **Определение.**

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{a}\lambda = \lambda\vec{a}$,

коллинеарный вектору $\vec{a}$,

равный по модулю $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$,

направленный при $\lambda > 0$ в ту же сторону, что и $\vec{a}$,

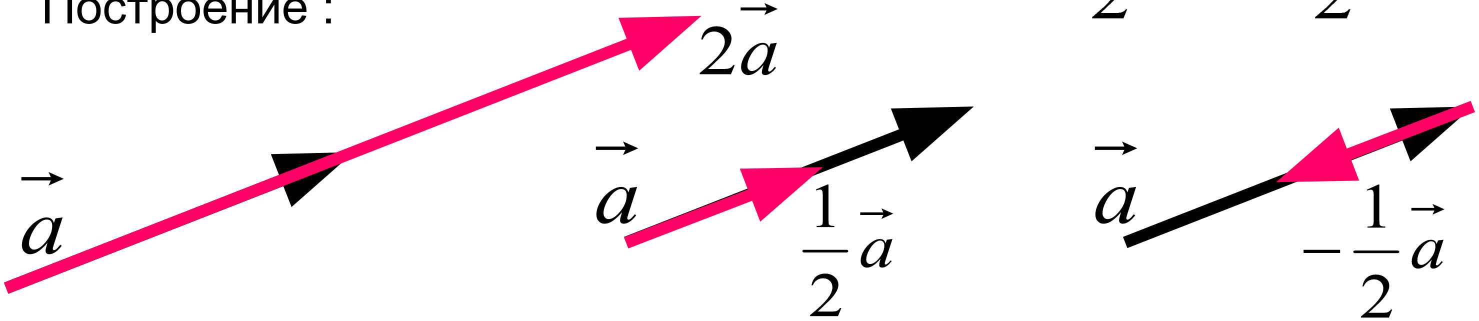
и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.

Операции с векторами

- **Пример.**

  Задан вектор $\vec{a}$. Построить векторы $2\vec{a},\ \frac{1}{2}\vec{a},\ -\frac{1}{2}\vec{a}$.

  Построение :



- **Теорема.**

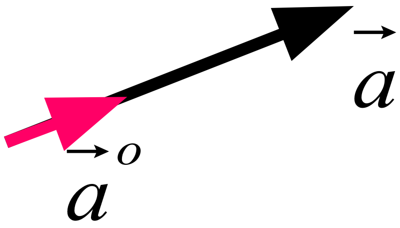
  Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда найдется такая постоянная λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

$$\boxed{\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \vec{b} = \lambda\vec{a}}$$

Разложение векторов

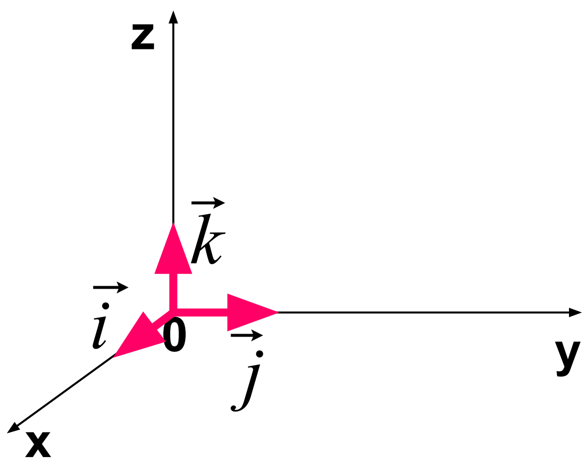
- **Разложение векторов по ортам.**
- **Определение 1.**

Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^{\,o}$, имеющий единичную длину и то же направление, что и вектор $\vec{a}$.



Разложение векторов

- Рассмотрим прямоугольную систему координат.



Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ -единичные (орты), направленные по осям **x, y, z** (соответственно)

Определение 2.
Тройка векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называется **ортонормированным базисом** в пространстве.

- **Теорема 3.**
  В пространстве любой вектор $\vec{d}$ можно разложить по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\boxed{\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

Такое разложение единственное.

Разложение векторов

- **Определение 3.**

  Коэффициенты x, y, z разложения

  $$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

  называются **прямоугольными координатами вектора** $\vec{d}$: $\vec{d} = \{x, y, z\}$

- **Частный случай.**

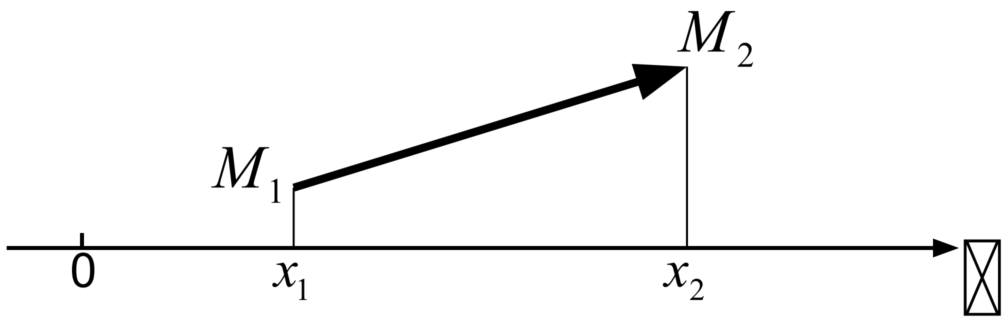
  Если вектор $\vec{d}$ расположен на координатной плоскости xoy,

  то разложение будет иметь вид $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j}$

  Коэффициенты x, y называются **прямоугольными координатами вектора на плоскости** : $\vec{d} = \{x, y\}$

Проекции вектора

- Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ и ось $\boxtimes$



- **Определение.**

Проекцией вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ **на ось** $\boxtimes$ называется разность проекций конца M_2 и начала M_1 вектора на эту ось;

$$\boxed{Пр_{\boxtimes} \overrightarrow{M_1 M_2} = x_2 - x_1}$$

Проекции вектора

- **В пространстве:**

$$\vec{d} = \{x, y, z\} = \{Пр_x \vec{d},\ Пр_y \vec{d},\ Пр_z \vec{d}\}$$

- **Следствие.**

Если вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ задан двумя точками, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - начало, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - конец, то

$$\boxed{\overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}}$$

Действия с векторами в координатной форме

- **Сумма и разность векторов, произведение вектора на число.**

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ *и* $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Тогда

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$
2. $\lambda \vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$

Модуль вектора

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Орт вектора

$$\vec{a}^{\,o} = \left\{\frac{x_1}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{y_1}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{z_1}{\left|\vec{a}\right|}\right\}$$

Действия с векторами в координатной форме

- **Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов, заданных в координатной форме.**

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда соответствующие координаты пропорциональны.

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Тогда

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

- Доказательство.

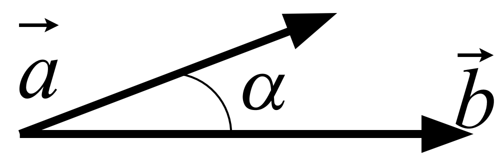
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Скалярное произведение

- **Определение.**

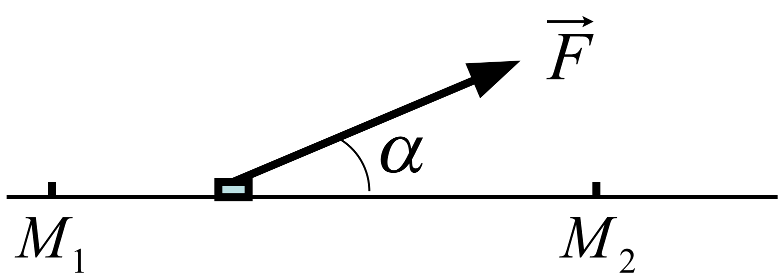
Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha}$$



Обозначения : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})$

- **Физический смысл.**



$$\boxed{A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}}$$

Пусть материальная точка под действием силы $\vec{F}$ перемещается из положения M_1 в положение M_2. Работа силы по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Скалярное произведение

- **Свойства скалярного произведения.**

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2. $(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}$

- **Следствия из формулы 4 :**

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\qquad Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}$$

Скалярное произведение

5. $$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

6. $$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \qquad (\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a})$$

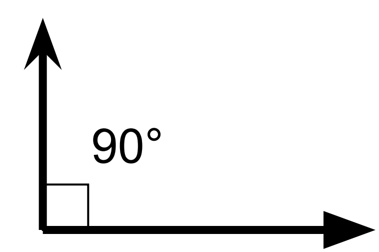
Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

7. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов.

Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Определение перпендикулярных векторов:



Скалярное произведение

- **Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме.**

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Тогда

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение векторов равно

сумме произведений соответствующих координат.

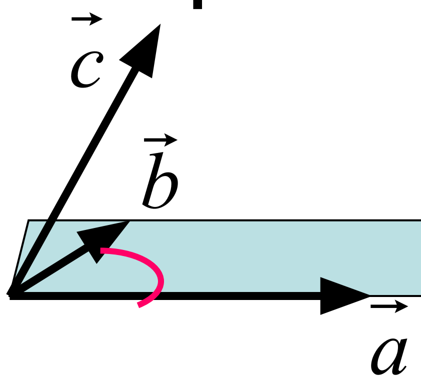
- **Условие перпендикулярности векторов**

в координатной форме :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Векторное произведение

- **Ориентированные тройки векторов.**

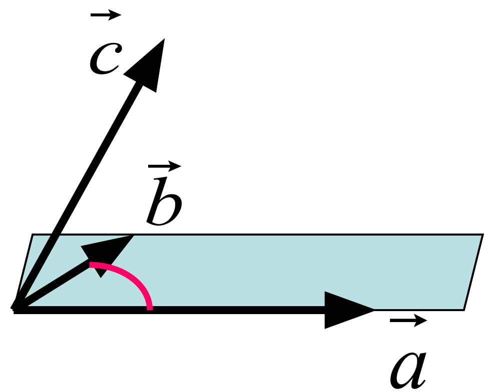


Рассмотрим три упорядоченных некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Определение 1.

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет **правую ориентацию**, когда смотришь с конца третьего вектора и кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит **против** часовой стрелки.

Векторное произведение



Поменяем порядок векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$

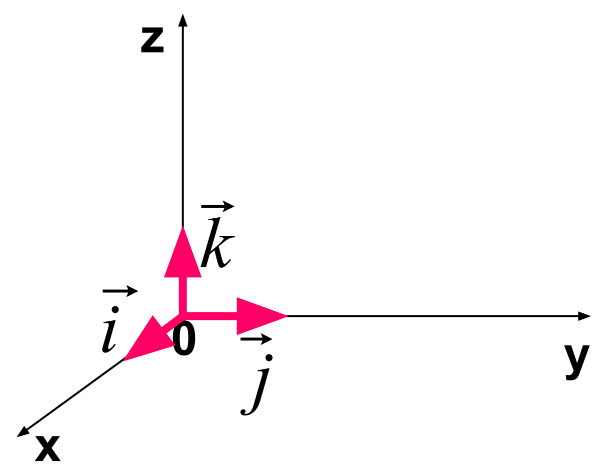
Изменится ориентация тройки.

Определение 2.
Упорядоченная тройка векторов имеет **левую ориентацию**, когда смотришь с конца третьего вектора и кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит **по часовой стрелке.**

Пример.
Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет правую ориентацию.

⇩

Система координат **x, y, z** имеет правую ориентацию.



Векторное произведение

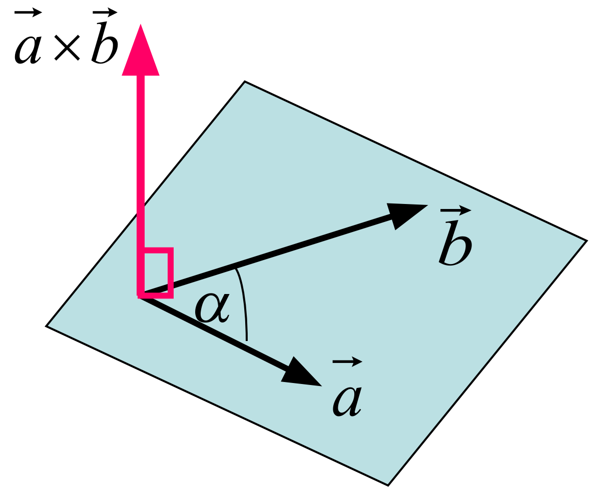
- **Определение 3.**

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям :

1. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha$

2. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ и $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

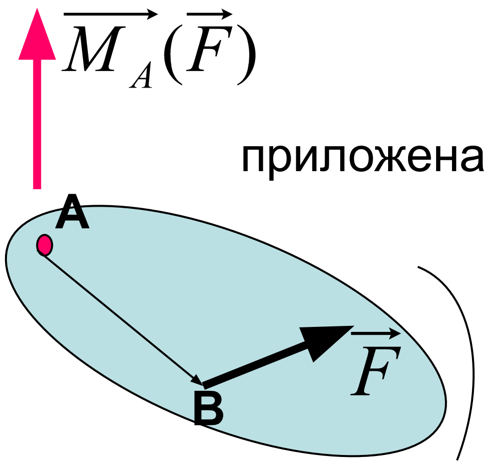
3. Тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ имеет правую ориентацию.



- Обозначения : $\vec{a}\times\vec{b} = [\vec{a},\vec{b}]$

Векторное произведение

- **Физический смысл.**



Пусть к твердому телу, закрепленному в точке А, приложена в точке В сила $\vec{F}$

Момент силы $\vec{F}$, приложенной в точке **В,** относительно точки **А** равен **векторному произведению** вектора $\overrightarrow{AB}$ и силы $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}}$$

Векторное произведение

- **Свойства векторного произведения.**

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

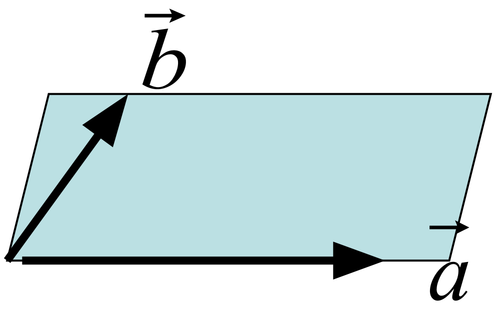
2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

4. Геометрический смысл .

Модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

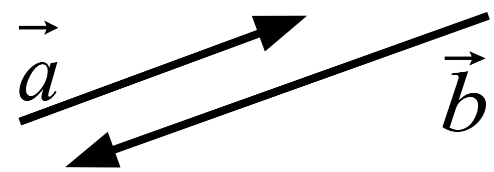
$$\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S_{\square}}$$



Векторное произведение

5. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов.

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору:



$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$$

6. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Векторное произведение

- **Векторное произведение векторов, заданных в координатной форме.**

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Тогда

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\left(\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)}$$

Смешанное произведение

- **Определение.**

  Смешанным произведением трех векторов называется векторное произведение первых двух векторов, умноженное скалярно на третий вектор:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

- Обозначения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

- **Замечание.**

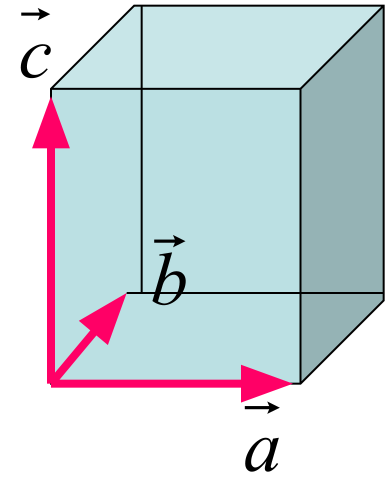
  Результат смешанного произведения трех векторов является скалярной величиной.

Смешанное произведение

- **4. Геометрический смысл.**

  Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах :

$$\boxed{\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = V_{параллелепипеда}}$$



- Знак смешанного произведения определяет ориентацию тройки векторов :
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ имеет правую ориентацию;
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ имеет левую ориентацию.

Смешанное произведение

- **5. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.** Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

Смешанное произведение векторов, заданных в координатной форме.

Пусть

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$$
$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$$
$$\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

Тогда

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$