СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

- 1. Принцип относительности Галилея. Закон сложения скоростей
- 2. Постулаты Эйнштейна
- 3. Преобразования Лоренца
- 4. Следствия из преобразований Лоренца
- 5. Релятивистская механика
- 6. Взаимосвязь массы и энергии покоя

Принцип относительности Галилея. Закон сложения скоростей

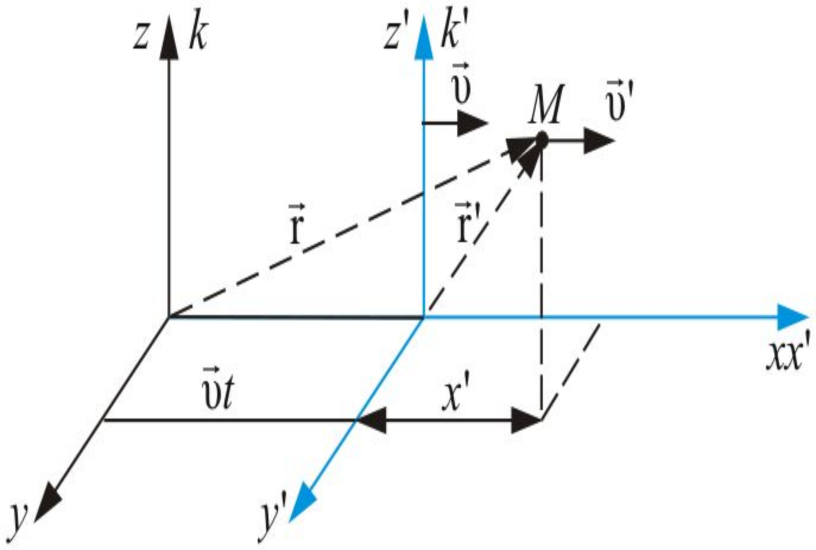
Принцип относительности Галилея:

Все механические явления протека-ют одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

- *Это есть принцип относительности Галилея*

Преобразования Галилея координат, скорости и времени

- **Рассмотрим две инерциальные системы отсчета k и k'. Система k' движется относительно k со скоростью вдоль оси x. Точка M движется в двух системах отсчета**



Преобразования Галилея координат, скорости и времени

- **Найдем связь между координатами точки *M* в обеих системах отсчета. Отсчет начнем, когда начала координат систем – совпадают, то есть $t = t^1$. Тогда:**

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\}$$

- **Совокупность уравнений называется *преобразованиями Галилея.***

Преобразования Галилея координат, скорости и времени

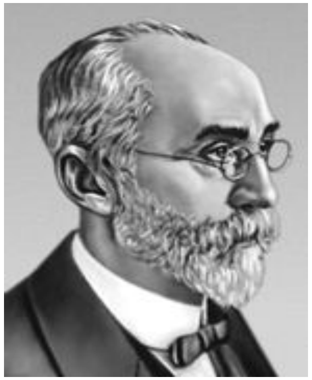
- В векторной форме преобразования Галилея можно записать так: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\boldsymbol{\upsilon}}\mathbf{t}.$
- Продифференцируем это выражение по времени, получим: $\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}'}{\mathbf{dt}} + \vec{\boldsymbol{\upsilon}}$
- Или $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}$
- Это выражение определяет ***закон сложения скоростей*** в классической механике.

Специальная теория относительности

- В 1905 г. в журнале «*Анналы физики*» вышла знаменитая статья А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», в которой была изложена специальная теория относительности (СТО).
- В основе СТО лежат ***два постулата*** выдвинутых Эйнштейном.
- 1. ***Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.***
- 2. ***Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника и приемника света.***

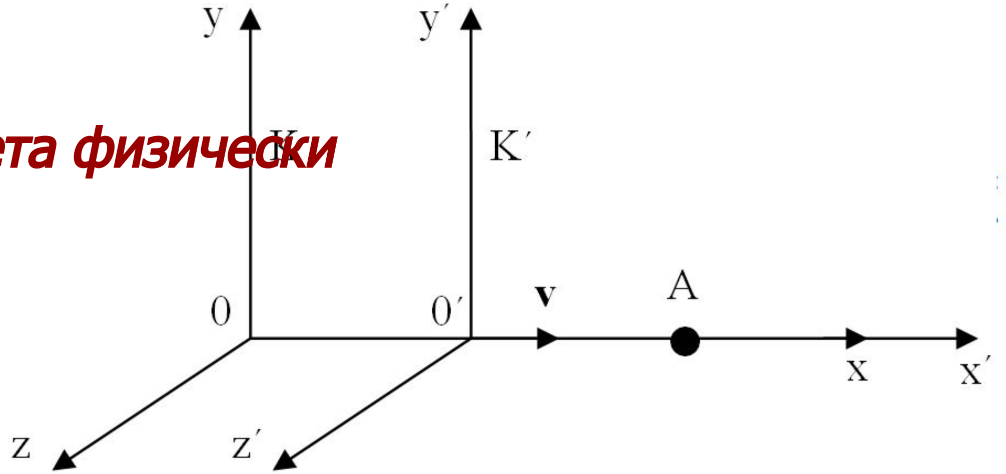
Преобразования Лоренца

- Формулы преобразования при переходе из одной инерциальной системы в другую с учетом постулатов Эйнштейна предложил Лоренц в 1904 г. **Лоренц Хендрик Антон** (1853 – 1928) – нидерландский физик-теоретик, член многих академий наук, в том числе и АН СССР, лауреат Нобелевской премии.



Преобразования Лоренца

- **Лоренц установил связь между координатами и временем события в системах отсчета *k* и *k'* основываясь на тех экспериментальных фактах, что:**



- ***все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны;***

- ***скорость света в вакууме постоянна и конечна, во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости движения источника и наблюдателя.***

Преобразования Лоренца

- **Таким образом, при больших скоростях движения сравнимых со скоростью света, Лоренц получил:**

Прямые преобразования	*Обратные преобразования*
$x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$t = \dfrac{t' + \dfrac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\beta^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2}$$

Преобразования Лоренца

- **Истинный физический смысл этих формул был впервые установлен Эйнштейном в 1905 г. в СТО.**

- **В теории относительности время иногда называют четвертым измерением. Точнее говоря, величина *ct*, имеющая ту же размерность, что и *x*, *y*, *z* ведет себя как четвертая пространственная координата.**

- **В теории относительности *ct* и *x* проявляют себя с математической точки зрения сходным образом.**

Преобразования Лоренца

- **При малых скоростях движения или при бесконечной скорости распространения взаимодействий (теория дальнодействия) преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (*принцип соответствия*).**

Следствия из преобразований Лоренца
Одновременность событий в СТО

1. **Относительность одновременности**.

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят 2 события.

В системе K' им соответствуют координаты x'_1 и x'_2, время t'_1 и t'_2.

Относительность одновременности

- Если $x_1 = x_2$, т.е. события происходят в одной точке и являются одновременными $t_1 = t_2$. Из преобразований Лоренца следует:

$x'_1 = x'_2$, $t'_1 = t'_2$, т.е. эти события в системе K' происходят в одной точке и являются одновременными. Следовательно, эти события для любых ИСО являются *одновременными и пространственно совпадающими*.

Относительность одновременности

- Если в системе K события: $x_1 \neq x_2$ – пространственно разобщены,

  но $t_1 = t_2$ – одновременны.

В системе K':

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_1' = \frac{t - \frac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_2' = \frac{t - \frac{\upsilon x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т.е. $x'_1 \neq x'_2$, $t'_1 \neq t'_2$, события остаются пространственно разобщенными и оказываются неодновременными.

Относительность одновременности

События одновременные в одной системе отсчёта *не одновременны* в другой СО.

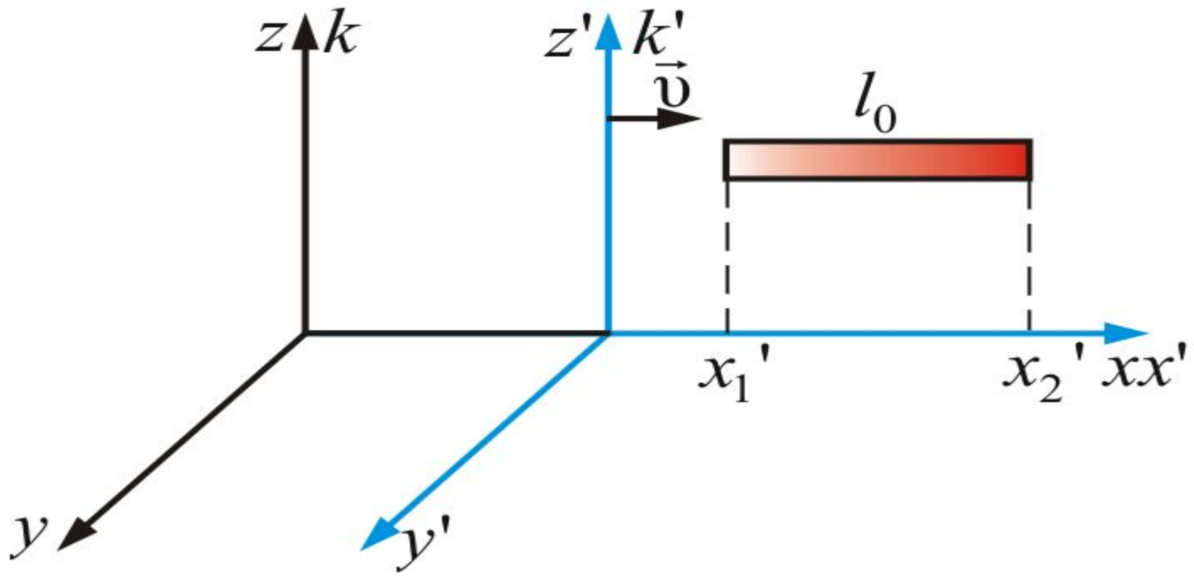
$$t_2' - t_1' = \frac{t - \frac{\upsilon x_2}{c^2} - t + \frac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\upsilon\left(x_1 - x_2\right)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0.$$

Знак определяется знаком выражения

$$\upsilon\left(x_1 - x_2\right).$$

Лоренцево сокращение длины (длина тел в разных системах отсчета)

- **Рассмотрим рисунок, на котором изображены две системы координат** k **и** k'



Лоренцево сокращение длины
(длина тел в разных системах отсчета)

- **Пусть – *собственная длина тела* в системе, относительно которого тело неподвижно (например: в ракете движущейся со скоростью мимо неподвижной системы отсчета *k* (Земля)).**
- **Измерение координат x_1 и x_2 производим одновременно в системе *k*, т.е.** $t_1 = t_2 = t.$

Лоренцево сокращение длины
(длина тел в разных системах отсчета)

- **Используя преобразования Лоренца, для координат получим:**

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - \upsilon t) - (x_1 - \upsilon t)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

- **т.е.**

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

- **Формула называется** *Лоренцевым сокращением длины*. **Собственная длина тела, есть максимальная длина. Длина движущегося тела короче, чем покоящегося. Причем, сокращается только проекция на ось** ***x*****, т.е. размер тела вдоль направления движения.**

Сокращение длины

Две частицы движутся друг за другом по одной прямой со скоростями $V = 0{,}75 \cdot c$ относительно лабораторной системы отсчета и попадают в неподвижную мишень с интервалом времени, равным $\Delta t = 50$ нс по лабораторным часам. Найдите собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

Решение

В лабораторной системе отсчета расстояние между частицами $\Delta l = V\Delta t$. Тогда собственное расстояние между частицами

$$\Delta l_0 = \frac{\Delta l}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{V\Delta t}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \approx 17 \text{ м.}$$

Замедление времени
(*длительность событий в разных системах отсчета*)

- Пусть вспышка лампы на ракете длится $\tau = t'_2 - t'_1$, где τ - *собственное время*, измеренное наблюдателем, движущимся вместе с часами.
- Чему равна длительность вспышки ($t_2 - t_1$) с точки зрения человека находящегося на Земле, мимо которого пролетает ракета?

Замедление времени (длительность событий в разных системах отсчета)

- Из преобразований Лоренца имеем:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- или

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Из этого уравнения следует, что собственное время – минимально (*движущиеся часы идут медленнее покоящихся*). Таким образом, вспышка на Земле будет казаться длиннее.
- Этот вывод имеет множество экспериментальных подтверждений.

Замедление времени

Собственное время жизни некоторой частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Найдите длину пути, который пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни составляет $\Delta t = 20$ нс.

Решение

Время жизни частицы в лабораторной СО:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

За это время в лабораторной СО частица пролетит путь

$$l = \Delta t \cdot V.$$

Из этих уравнений найдем

$$l = c\sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2} \approx 5{,}2 \text{ м}.$$

В системе К` покоится стержень (собственная длина $l_0$ = 1,5 м), ориентированный под углом ψ` = 30 градусов к оси Ох`. Система К` движется относительно системы К со скоростью v = 0,6с. Определить в системе К: 1) длину стержня l; 2) соответствующий угол ψ.

Дано

$l_0 = 1{,}5$ м

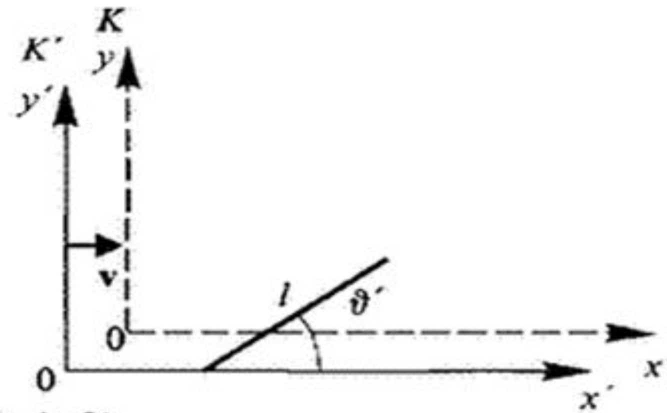
$\vartheta' = 30°$

$v = 0{,}6c$

1) l — ?

2) ϑ — ?

Решение



$l_{0x} = l_0 \cos\vartheta'$, $\quad l_{0y} = l_0 \sin\vartheta'$,

$l_x = l_{0x}\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\quad l_y = l_{0y}$, $\quad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$,

$$l = \sqrt{l_0^2(\cos\vartheta')^2(1 - v^2/c^2) + l_0^2(\sin\vartheta')^2},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l_{0y}}{l_{0x}\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ответ 1) $l = 1{,}28$ м; 2) $\vartheta = 35{,}8°$.

Сложение скоростей в релятивистской механике

- **Пусть тело внутри космического корабля движется со скоростью**

$$\upsilon = 200\,000\ \frac{км}{с}$$

- **Сам корабль движется с такой же скоростью .**
- **Чему равна скорость тела относительно Земли** υ_x **?**

Сложение скоростей в релятивистской механике

- **Классическая механика**

$$\upsilon_x = \upsilon' + V = 4 \cdot 10^5 \text{ км/с},$$

- *Но скорость света является предельной скоростью переноса информации, вещества и взаимодействий:* $c = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$
- *Оценим скорость тела, используя преобразования Лоренца.*

Сложение скоростей в релятивистской механике

- **Внутри корабля перемещение d*x*′ за время d*t*′ равно** $\mathrm{d}x' = \upsilon_x' \mathrm{d}t'.$
- **Найдем dx и d*t* с точки зрения наблюдателя на Земле, исходя из преобразований Лоренца:**

$$\mathrm{d}x = \frac{\upsilon_x' dt' + V \mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d*y* = d*y*′; **d*z* = d*z*′;**

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{V \upsilon_x' \mathrm{d}t'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Сложение скоростей в релятивистской механике

- Так как $\upsilon_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, то: $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon_x'\mathrm{d}t' + V\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \dfrac{V\upsilon_x'\mathrm{d}t'}{c^2}}$;

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \dfrac{V\upsilon_x'}{c^2}}.$$

- Эта формула выражает **правило сложения скоростей** в релятивистской кинематике для x – вой компоненты.

Сложение скоростей в релятивистской механике

- **Для y – вой компоненты скорости, если движение частицы происходит не параллельно оси x, правило преобразования для υ_y и $\upsilon_y^{'}$ следующее:**

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon_y^{'} \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1-\upsilon_x^{'} \cdot V / c^2}$$

- **Тогда скорость частицы в системе К:**

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость 0,4c, где c – скорость света в вакууме. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β - частицу со скоростью 0,75c относительно ускорителя. Определите скорость частицы относительно ядра. Ответ представьте в мегаметрах за секунду.

Дано:	**Решение:**
$\upsilon = 0{,}4\ c$ $c = 3\cdot 10^8$ м/с $\upsilon_x = 0{,}75\ c$	Используем релятивистский закон сложения скоростей.
$\upsilon_{x'} = ?$	$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_{x'} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon_{x'}\cdot\upsilon}{c^2}}.$$

Здесь υ_x – скорость β - частицы в системе отсчета, связанной с ускорителем; $\upsilon_{x'}$ – скорость β - частицы в системе отсчета, связанной с ядром; υ – скорость инерциальной системы, связанной с ядром, относительно системы отсчета, связанной с ускорителем.

Тогда скорость частицы относительно ядра

$$\upsilon_{x'} = \frac{\upsilon_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon_x\cdot\upsilon}{c^2}}.$$

$$\upsilon_{x'} = \frac{0{,}75c - 0{,}4c}{1 - \frac{0{,}75c\cdot 0{,}4c}{c^2}} = \frac{c}{2} = 1{,}5\cdot 10^8\,(\text{м/с}) = 150\ (\text{Мм/с}).$$

Ответ: $\upsilon_{x'} = 150$ Мм/с

Релятивистская динамика

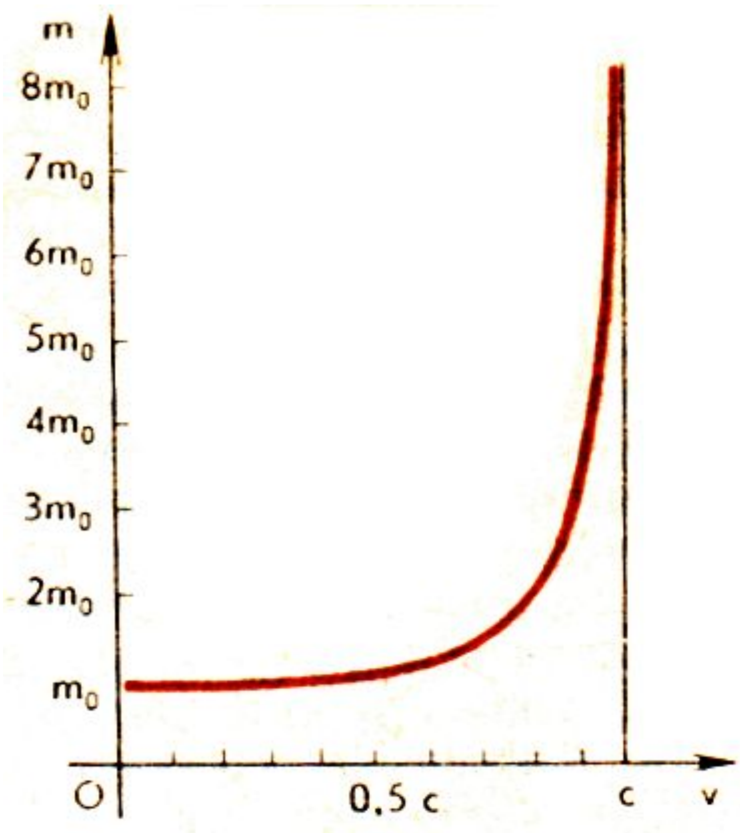
- **Релятивистский импульс**

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

- **В векторной форме**

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



Релятивистская динамика

- *Релятивистское выражение для полной энергии*

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- **При $\upsilon = 0$, в системе координат, где частица покоится, полная энергия равна энергии покоя:**

$$E_0 = m_0 c^2$$

- **Полная энергия складывается из энергии покоя и кинетической энергии (*K*). Тогда**

$$K = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

Релятивистская динамика

- **Соотношение, связывающее полную энергию с импульсом частицы.**

$$E = c\sqrt{m_0{}^2 c^2 + p^2}$$

- **Это выражение, связывающее энергию и импульс является инвариантом.**
- **Закон *взаимосвязи массы и энергии* покоя и стало символом современной физики.**

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

Релятивистская динамика

- Основное уравнение динамики в релятивистском случае:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

- **Из этого уравнения следует, что вектор ускорения частицы, в общем случае, не совпадает по направлению с вектором силы.**

Импульс частицы равен *mc*. Во сколько раз полная энергия частицы больше ее энергии покоя?

<u>Решение</u>

По условию релятивистский импульс равен mc:

$$p = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = mc.$$

Следовательно,

$$(\upsilon/c)^2 = 1-(\upsilon/c)^2 \text{ и } (\upsilon/c)^2 = 1/2.$$

Найдем отношение полной энергии к энергии покоя:

$$\delta = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \cdot \frac{1}{m_0 c^2} = \sqrt{2}.$$

Найдите скорость, при которой кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя.

Решение

Запишем выражения для кинетической энергии

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}} - E_0$$

и энергии покоя

$$E_0 = m_0 c^2 .$$

Учитывая, что $E_k = E_0$, получим

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}} - m_0 c^2$$

Отсюда $\upsilon = (\sqrt{3} / 2)c$

Релятивистская частица массой m начинает двигаться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Найдите зависимость скорости частицы от времени и изобразите эту зависимость на графике.

Решение

Уравнение динамики запишем для проекций векторных величин на ось x, совпадающей с направленем силы $\vec{F}$:

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

При постоянной силе, это уравнение легко интегрируется:

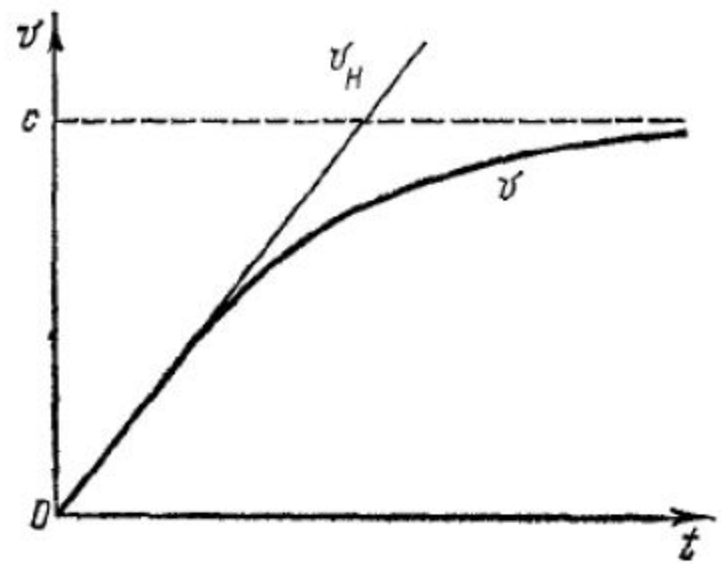
$$p - p(0) = Ft.$$

Так как $\upsilon(0) = 0$, то $p(0) = 0$ и

$$\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = Ft.$$

Из этого уравнения найдем υ:

$$\upsilon = \frac{Ft}{m_0\sqrt{1+(Ft/m_0 c)^2}}$$



При $Ft/m_0 c << 1$ получаем классический результат $\upsilon = (F/m_0)t = at$, при $Ft/m_0 c >> 1$ получаем $\upsilon \to c$ (см. рис.)

Определите скорость нестабильной частицы, если ее время жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в $n = 1{,}8$ раз.

Дано: $n = \dfrac{\tau'}{\tau} = 1{,}8.$

Найти: v.

Решение. Систему отсчета K свяжем с частицей, тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе равен ее собственному времени жизни τ. Поскольку система K движется вместе с частицей, то эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов.

Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы — τ'. Тогда $\tau' = \dfrac{\tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, откуда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = n \qquad (1)$$

(учли условие задачи). Из выражения (1) искомая скорость

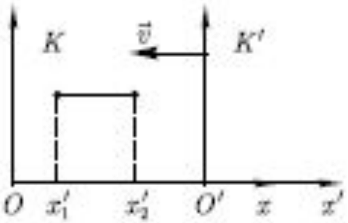
$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Ответ: $v = 0{,}831c$.

С какой скоростью тело должно лететь навстречу наблюдателю, чтобы его линейный размер уменьшился на 7 %?

Дано: $l = 0{,}93\,l_0$.

Найти: v.



Решение. Систему отсчета K' свяжем с телом, тогда $x_2' - x_1' = l_0$ — собственные размеры тела вдоль направления движения (см. рисунок). Если систему K связать с наблюдателем, то размер тела в этой системе $l = x_2 - x_1$, причем координаты x_2 и x_1 должны быть измерены в один и тот же момент времени по часам системы K, т. е. $t_1 = t_2$. Учитывая взаимное направление движения систем K и K', преобразования Лоренца для координат запишутся в виде

$$x_2' = \frac{x_2 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x_1' = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и искомая скорость

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2}.$$

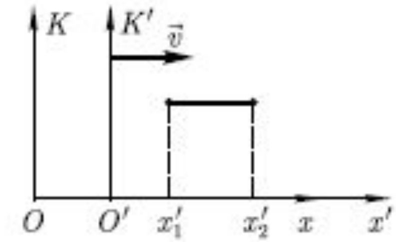
Ответ: $v = 0{,}368c$.

Определите собственную длину стержня l_0, если для наблюдателя, пролетающего со скоростью $v = 0{,}85c$, его длина равна 1 м.

Дано: $l = 1$ м; $v = 0{,}85c$.

Найти: l_0.

Решение. Систему отсчета K' свяжем со стержнем, систему отсчета K — с наблюдателем. Пусть система K' движется в положительном направлении оси x системы K (см. рисунок). Согласно преобразованиям Лоренца, координаты концов стержня



$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где $t_1 = t_2$ (измерения координат концов стержня проводятся в один и тот же момент по часам данной системы).

Собственная длина стержня

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

Ответ: $l_0 = 1{,}9$ м.

Определите релятивистский импульс частицы, если ее полная энергия $E = 1{,}5$ ГэВ, а скорость $v = 0{,}5c$.

Дано: $E = 1{,}5$ ГэВ $= 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ Дж; $v = 0{,}5c$.

Найти: p.

Решение. Релятивистский импульс частицы

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

где m — масса частицы; v — ее скорость.

Умножая выражение (1) на c^2, получим искомый импульс:

$$p = \frac{mvc^2}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ev}{c^2}$$

(учли, что полная энергия $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$).

Ответ: $p = 0{,}4 \cdot 10^{-18}$ Н $\cdot$ с.

Кинетическая энергия частицы в $n = 2$ раза меньше ее энергии покоя. Определите скорость движения частицы.

Дано: $\dfrac{E_0}{T} = n = 2.$

Найти: v.

Решение. Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2, \tag{1}$$

где m — масса частицы.

Кинетическая энергия частицы

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{2}$$

Учитывая формулу (1) и условие задачи, можем записать

$$T = \frac{mc^2}{n}. \tag{3}$$

Приравняв выражения (2) и (3), получим

$$\frac{mc^2}{n} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right),$$

откуда искомая скорость частицы

$$v = c\sqrt{1-\frac{n^2}{(n+1)^2}}.$$

Ответ: $v = 0{,}745\,c$.