Транспортная задача

Постановка транспортной задачи.

Предположим, что некоторый однородный продукт, сосредоточенный у ***m*** *поставщиков* в количестве a_i , (i=1,2,…m) необходимо доставить ***n*** *потребителям* в количестве b_j, (j=1,2…n). Известны *стоимости* $c_{i,j}$ перевозок единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Требуется составить *минимальный по стоимости план перевозок*, позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Пусть x_{ij} - количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Матрицу $X = \left(x_{ij}\right)$ называют *планом перевозок*.

Тогда суммарные затраты на все перевозки выразится двойной суммой:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

Систему ограничений получаем из условий: все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2...m$$

все потребности должны также быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2...n$$

Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме потребностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

При выполнении этого условия задачу называют ***задачей с правильным балансом***, а ее ***модель закрытой***.

Если же это равенство не выполняется, то задача называется ***задачей с неправильным балансом***, а ее ***модель – открытой***.

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

Если суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1} , *потребность которого равна разности суммарных запасов и потребностей.*

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик *A_{m+1} , запасы которого равны разности суммарных потребностей и запасов*.

Стоимость перевозки единицы груза до *фиктивного потребителя* и стоимость перевозки груза *от фиктивного поставщика* ***полагаются равными нулю***, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Для наглядности транспортная задача представляется в виде распределительной таблицы:

b_j / a_i	b_1	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1n} x_{1n}
…	…	c_{ij} x_{ij}	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mn} x_{mn}

Задача решается с помощью последовательного улучшения планов:

1) определяется исходный план;
2) производится оценка этого плана;
3) осуществляется переход к следующему плану путем однократного замещения одной базисной переменной на свободную.

Для определения исходного опорного плана существует ***метод «северо-западного угла»***, состоящий в следующем:

- таблица заполняется значениями x_{ij} с левого верхнего угла
- на каждом следующем шаге заполняется одна клетка.

После построения начального опорного решения <u>число занятых клеток должно быть равно</u> ($m+n-1$)

Если число занятых клеток меньше, чем ($m+n-1$), то нельзя определять оптимальный план перевозок.

В этом случае следует поставить «0» в любую пустую клетку так, чтобы не получилось цикла из занятых клеток.

Пример 1.

Дана транспортная задача перевозок от трех поставщиков к четырем потребителям имеет вид:

b_j / a_i	**75**	**80**	**60**	**85**
100	6	7	3	5
150	1	2	5	6
50	3	10	20	1

Составить опорный план методом северо-западного угла.

Решение

Данная транспортная задача является закрытой моделью, т.к. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 300$$

Начиная заполнение клеток с левого верхнего угла, получим в результате опорный план по методу северо-западного угла:

b_j / a_i	75	80	60	85
100	6 **75**	7 **25**	3	5
150	1	2 **55**	5 **60**	6 **35**
50	3	10	20	1 **50**

Число заполненных клеток должно быть равно **7-1=6.** Условие выполняется, можно искать оптимальное решение. При данном плане затраты на перевозки составляют:

75*6+25*7+55*2+60*5+35*6+50*1= 1295 (ден.ед.)

Пример 2.

Дана транспортная задача перевозок

a_i \ b_j	70	50	60	80
100	6	7	3	5
150	**1**	2	5	6
50	3	10	20	**1**

Решение

Проверим выполнение сбалансированности транспортной задачи: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 300$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 260$$

Так как условие $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$ не выполняется, то добавляем дополнительный столбец с нулевыми стоимостями перевозок.

Получим сбалансированную модель, причем необходимое количество груза равно

300-260=40:

b_j / a_i	70	50	60	80	40
100	6	7	3	5	0
150	**1**	2	5	6	0
50	3	10	20	**1**	**0**

Начальный план перевозок составляем по методу северо-западного угла:

a_i \ b_j	70	50	60	80	40
100	6 **70**	7 **30**	3	5	0
150	1	2 **20**	5 **60**	6 **70**	0
50	3	10	20	1 **10**	0 **40**

Число заполненных клеток должно быть равно **8-1=7.**

Условие выполняется, можно искать оптимальное решение.

При данном плане затраты на перевозки составляют 1400 (ден.ед.)

Пример 3

Решить транспортную задачу, заданную таблицей:

a_i \ b_j	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4

Решение:

Задача является закрытой, т.к. выполняется условие 50+40+20=30+25+35+20=110.

Исходный опорный план найдем по правилу *минимального* элемента.

b_j / a_i	30	25	35	20
50	3 **30**	2 **20**	4	1
40	2	3 **5**	1 **35**	5
20	3	2	4	4

Значение функции затрат равно:

$$Z = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 35 = 180$$

Число занятых клеток равно 4, что не совпадает с числом $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Две клетки заполняем нулями так, чтобы заполненные клетки не образовали циклов:

a_i \ b_j	30	25	35	20
50	3 **30**	2 **20**	4	1 **0**
40	2	3 **5**	1 **35**	5
20	3 **0**	2	4	4

Определяем потенциалы:

$$u_1 + v_1 = 3,$$
$$u_1 + v_2 = 2,$$
$$u_1 + v_4 = 1,$$
$$u_2 + v_1 = 2,$$
$$u_2 + v_3 = 1,$$
$$u_3 + v_2 = 2,$$

полагая, например, $u_1 = 0$

имеем

$$v_1 = 3,$$
$$v_2 = 2,$$
$$v_3 = 2,$$
$$v_4 = 1,$$
$$u_2 = -1,$$
$$u_3 = 0.$$

Определяем для свободных клеток:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

$$\Delta_{13} = -2 \quad \Delta_{22} = -2 \quad \Delta_{24} = -5 \quad \Delta_{31} = 0 \quad \Delta_{33} = -2 \quad \Delta_{24} = -3$$

Поскольку нет положительных оценок полученный план перевозок оптимальный.

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если в результате решения получена свободная клетка с номерами (l,k) для которой $\Delta_{lk} = max\{\Delta_{ij}\} > 0$, то поиск оптимального плана необходимо продолжить.

Новый план строится следующим образом.

Клетку (l,k) называют *перспективной*.

Для нее строят замкнутый цикл: замкнутую ломаную линию, звено которой проходит только по строке, либо только по столбцу, содержит эту *перспективную* клетку и некоторую часть занятых клеток.

Каждое звено соединяет две клетки цикла. Перспективную клетку отмечают знаком «+». Угловым клеткам цикла приписывают знаки чередованием «+» и «-».

Пример цикла для выделенной *перспективной* клетки:

a_i \ b_j	20	25	35	10
30	+ 2 15*(20)*	3	- 5 15*(10)*	4
40	- 3 5*( )*	2 25	+ 4 *(5)*	1 10
20	4	3	2 20	6

В перспективную клетку заносят наименьшее количество груза, стоящего в вершинах с «-», при этом происходит перераспределение груза по клеткам цикла.
Перераспределенное количество груза приведено в скобках.

Получают новый план, проверяют его на оптимальность и т.д. до получения оптимального плана.