# Транспортная задача

## *Постановка транспортной задачи.*

Предположим, что некоторый однородный продукт, сосредоточенный у ***m*** *поставщиков* в количестве $a_i$, ($i$=1,2,…m) необходимо доставить ***n*** *потребителям* в количестве $b_j$, ($j$=1,2…n). Известны *стоимости* $c_{i,j}$ перевозок единицы груза от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю.

Требуется составить *минимальный по стоимости план перевозок*, позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Пусть $x_{ij}$ - количество единиц груза, запланированных к перевозке от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю.

Матрицу $X = \left(x_{ij}\right)$ называют *планом перевозок*.

Тогда суммарные затраты на все перевозки выразится двойной суммой:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

Систему ограничений получаем из условий: все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2...m$$

все потребности должны также быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2...n$$

Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме потребностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

При выполнении этого условия задачу называют ***задачей с правильным балансом***, а ее ***модель закрытой***.

Если же это равенство не выполняется, то задача называется ***задачей с неправильным балансом***, а ее ***модель – открытой***.

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

Если суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель $B_{n+1}$ , *потребность которого равна разности суммарных запасов и потребностей.*

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик $A_{m+1}$ *, запасы которого равны разности суммарных потребностей и запасов.*

Стоимость перевозки единицы груза до *фиктивного потребителя* и стоимость перевозки груза *от фиктивного поставщика* ***полагаются равными нулю***, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Для наглядности транспортная задача представляется в виде распределительной таблицы:

| $a_i$ \ $b_j$ | $b_1$ | … | $b_n$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | … | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| … | … | $c_{ij}$ $x_{ij}$ | … |
| $a_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | … | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

Задача решается с помощью последовательного улучшения планов:

1) определяется исходный план;

2) производится оценка этого плана;

3) осуществляется переход к следующему плану путем однократного замещения одной базисной переменной на свободную.

Для определения исходного опорного плана существует ***метод «северо-западного угла»***, состоящий в следующем:

- таблица заполняется значениями $x_{ij}$ с левого верхнего угла
- на каждом следующем шаге заполняется одна клетка.

После построения начального опорного решения <u>число занятых клеток должно быть равно </u>($m+n-1$)

Если число занятых клеток меньше, чем ($m+n-1$), то нельзя определять оптимальный план перевозок.

В этом случае следует поставить «0» в любую пустую клетку так, чтобы не получилось цикла из занятых клеток.

**Пример 1.**

Дана транспортная задача перевозок от трех поставщиков к четырем потребителям имеет вид:

| $a_i$ \ $b_j$ | **75** | **80** | **60** | **85** |
|---|---|---|---|---|
| **100** | 6 | 7 | 3 | 5 |
| **150** | 1 | 2 | 5 | 6 |
| **50** | 3 | 10 | 20 | 1 |

Составить опорный план методом северо-западного угла.

# Решение

Данная транспортная задача является закрытой моделью, т.к. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 300$$

Начиная заполнение клеток с левого верхнего угла,  получим в результате опорный план по методу северо-западного угла:

| $a_i$ \ $b_j$ | 75 | 80 | 60 | 85 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 100 | 6<br>**75** | 7<br>**25** | 3 | 5 |
| 150 | 1 | 2<br>**55** | 5<br>**60** | 6<br>**35** |
| 50 | 3 | 10 | 20 | 1<br>**50** |

Число заполненных клеток должно быть равно **7-1=6.** Условие выполняется, можно искать оптимальное решение. При данном плане затраты на перевозки составляют:

75*6+25*7+55*2+60*5+35*6+50*1= 1295 (ден.ед.)

**Пример 2.**

Дана транспортная задача перевозок

| $b_j$ / $a_i$ | 70 | 50 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 6 | 7 | 3 | 5 |
| 150 | **1** | 2 | 5 | 6 |
| 50 | 3 | 10 | 20 | **1** |

**Решение**

Проверим выполнение сбалансированности транспортной задачи: $$\sum_{i=1}^{3} a_i = 300$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 260$$

Так как условие $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$ не выполняется, то добавляем дополнительный столбец с нулевыми стоимостями перевозок.

Получим сбалансированную модель, причем необходимое количество груза равно

300-260=40:

| $a_i$ \ $b_j$ | 70 | 50 | 60 | 80 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 6 | 7 | 3 | 5 | 0 |
| 150 | **1** | 2 | 5 | 6 | 0 |
| 50 | 3 | 10 | 20 | **1** | **0** |

Начальный план перевозок составляем по методу северо-западного угла:

| $a_i$ \ $b_j$ | 70 | 50 | 60 | 80 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 6 **70** | 7 **30** | 3 | 5 | 0 |
| 150 | 1 | 2 **20** | 5 **60** | 6 **70** | 0 |
| 50 | 3 | 10 | 20 | 1 **10** | 0 **40** |

Число заполненных клеток должно быть равно **8-1=7.**

Условие выполняется, можно искать оптимальное решение.

При данном плане затраты на перевозки составляют 1400 (ден.ед.)

**Пример 3**

Решить транспортную задачу, заданную таблицей:

| $a_i$ \ $b_j$ | 30 | 25 | 35 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 40 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| 20 | 3 | 2 | 4 | 4 |

Решение:

Задача является закрытой, т.к. выполняется условие 50+40+20=30+25+35+20=110.

Исходный опорный план найдем по правилу *минимального* элемента.

| $a_i$ \ $b_j$ | 30 | 25 | 35 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 3 **30** | 2 **20** | 4 | 1 |
| 40 | 2 | 3 **5** | 1 **35** | 5 |
| 20 | 3 | 2 | 4 | 4 |

Значение функции затрат равно:

$$Z = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 35 = 180$$

Число занятых клеток равно 4, что не совпадает с числом $m+n-1=3+4-1=6$. Две клетки заполняем нулями так, чтобы заполненные клетки не образовали циклов:

| $b_j$ / $a_i$ | 30 | 25 | 35 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 3 **30** | 2 **20** | 4 | 1 **0** |
| 40 | 2 | 3 **5** | 1 **35** | 5 |
| 20 | 3 **0** | 2 | 4 | 4 |

# Определяем потенциалы:

$$u_1 + v_1 = 3,$$
$$u_1 + v_2 = 2,$$
$$u_1 + v_4 = 1,$$
$$u_2 + v_1 = 2,$$
$$u_2 + v_3 = 1,$$
$$u_3 + v_2 = 2,$$

полагая, например, $u_1 = 0$ имеем

$$v_1 = 3,$$
$$v_2 = 2,$$
$$v_3 = 2,$$
$$v_4 = 1,$$
$$u_2 = -1,$$
$$u_3 = 0.$$

Определяем для свободных клеток:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

$\Delta_{13} = -2$ $\Delta_{22} = -2$ $\Delta_{24} = -5$ $\Delta_{31} = 0$ $\Delta_{33} = -2$ $\Delta_{24} = -3$

Поскольку нет положительных оценок полученный план перевозок оптимальный.

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если в результате решения получена свободная клетка с номерами ($l,k$) для которой $\Delta_{lk} = max\{\Delta_{ij}\} > 0$, то поиск оптимального плана необходимо продолжить.

Новый план строится следующим образом.

Клетку ($l,k$) называют *перспективной*.

Для нее строят замкнутый цикл: замкнутую ломаную линию, звено которой проходит только по строке, либо только по столбцу, содержит эту *перспективную* клетку и некоторую часть занятых клеток.

Каждое звено соединяет две клетки цикла. Перспективную клетку отмечают знаком «+». Угловым клеткам цикла приписывают знаки чередованием «+» и «-».

Пример цикла для выделенной *перспективной* клетки:

| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 25 | 35 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 30 | + 2 15*(20)* | 3 | - 5 15*(10)* | 4 |
| 40 | - 3 5*( )* | 2 25 | + 4 *(5)* | 1 10 |
| 20 | 4 | 3 | 2 20 | 6 |

В перспективную клетку заносят наименьшее количество груза, стоящего в вершинах с «-», при этом происходит перераспределение груза по клеткам цикла.
Перераспределенное количество груза приведено в скобках.

Получают новый план, проверяют его на оптимальность и т.д. до получения оптимального плана.