Тольяттинский социально-педагогич

Численные методы

Тема 1. Приближенные числа. Учет погрешностей результатов операций над приближенными числами

Источники приближенных чисел

- Числа, с которыми мы встречаемся на практике, бывают двух родов. Одни дают истинное значение величины, другие - только приблизительное. Первые называют точными, вторые - приближенными. Чаще всего удобно пользоваться приближенным числом вместо точного, тем более, что во многих случаях точное число вообще найти невозможно.
- Так, если говорят, что в классе есть 29 учеников, то число 29 - точное. Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 км, то здесь число 960 - приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяженность.
- Результат действий с приближенными числами есть тоже приближенное число. Выполняя некоторые действия над точными числами (деление, извлечение корня), можно также получить приближенные числа.

Источники приближенных чисел

Теория приближенных вычислений позволяет:

- 1) зная степень точности данных, оценить степень точности результатов;
- 2) брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной для обеспечения требуемой точности результата;
- 3) рационализировать процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точность результата.

Округление

- Одним из источников получения приближенных чисел является округление. Округляют как приближенные, так и точные числа.
- Округлением данного числа до некоторого его разряда называют замену его новым числом, которое получается из данного путем отбрасывания всех его цифр, записанных правее цифры этого разряда, или путем замены их нулями. Эти нули обычно подчеркивают или пишут их меньшими. Для обеспечения наибольшей близости округленного числа к округляемому следует пользоваться такими правилами: чтобы округлить число до единицы определенного разряда, надо отбросить все цифры, стоящие после цифры этого разряда, а в целом числе заменить их нулями. При этом учитывают следующее:
- 1) если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с недостатком);
- 2) если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с избытком).

Покажем это на примерах. Округлить:

а) до десятых 12,34;	а) 12,34 ≈ 12,3;
б) до сотых 3,2465; 1038,785;	б) 3,2465 ≈ 3,25; 1038,785 ≈ 1038,79;
в) до тысячных 3,4335.	в) 3,4335 ≈ 3,434.
г) до тысяч 12375; 320729.	г) 12375 ≈ 12 000; 320729 ≈ 321000.

Абсолютная и относительная погрешности

- Разность между точным числом и его приближенным значением называется абсолютной погрешностью приближенного числа. Например, если точное число 1,214 округлить до десятых, получим приближенное число 1,2. В данном случае абсолютная погрешность приближенного числа 1,2 равна 1,214 - 1,2, т.е. 0,014.

Абсолютная и относительная погрешности

- Но в большинстве случаев точное значение рассматриваемой величины неизвестно, а только приближенное. Тогда и абсолютная погрешность неизвестна. В этих случаях указывают границу, которую она не превышает. Это число называют граничной абсолютной погрешностью. Говорят, что точное значение числа равно его приближенному значению с погрешностью меньшей, чем граничная погрешность. Например, число 23,71 есть приближенное значение числа 23,7125 с точностью до 0,01, так как абсолютная погрешность приближения равна 0,0025 и меньше 0,01. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,01*.
- Граничную абсолютную погрешность приближенного числа *a* обозначают символом Δa . Запись
- $x \approx a\ (\pm\Delta a)$
- следует понимать так: точное значение величины x находится в промежутке между числами $a - \Delta a$ и $a + \Delta a$, которые называют соответственно нижней и верхней границей x и обозначают НГ x ВГ x .
- Например, если $x \approx 2{,}3\ (\pm 0{,}1)$, то $2{,}2 < x < 2{,}4$.

Абсолютная и относительная погрешности

- Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к величине приближенного числа. Отношение граничной абсолютной погрешности к приближенному числу называют граничной относительной погрешностью; обозначают ее так: . Относительную и граничную относительную погрешности принято выражать в процентах. Например, если измерения показали, что расстояние *x* между двумя пунктами больше 12,3 км, но меньше 12,7 км, то за приближенное значение его принимают среднее арифметическое этих двух чисел, т.е. их полусумму, тогда граничная абсолютная погрешность равна полуразности этих чисел. В данном случае $x \approx 12{,}5\ (\pm 0{,}2)$. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,2 км, а граничная относительная

Точные значащие цифры

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все значащие цифры данного числа называются **точными**.

Например, число 58,3 имеет 3 точные значащие цифры, если Δ не превышает половины десятой доли, т.е.

$$\Delta \leq 0{,}05$$

Нули, стоящие перед первой значащей цифрой в счет точных значащих цифр не идут.

Например, число 0,032 имеет 2 точные значащие цифры, если $\Delta \leq 0{,}0005$.

Нули, стоящие между значащими цифрами идут в счет значащих цифр.

Например, число 2,007 имеет 4 точные значащие цифры, если $\Delta \leq 0{,}0005$.

При округлении числа полученные нули в счет значащих цифр не идут.

Например, число 4123, округленное до сотен, будет 4100. В данном случае число 4100 имеет 2 точные значащие цифры, т.к. полученные нули заменяют точные цифры 2 и 3.

Число 15,003, округленное до сотых долей получается 15,00. Число 15,00 имеет 4 точные значащие цифры, т.к. данные нули не заменяют точные значащие цифры.

Запись приближенных чисел

- *Для каждого приближенного числа обязательно указывается его погрешность. Запись вида*

$$a = a^{*} \pm \text{€} \Delta (a^{*})$$

означает, что a^{*} является приближенным значением числа a с абсолютной погрешностью D (a^{*}). Если же a^{*} является приближенным значением числа a с относительной погрешностью d (a^{*}), то пишут так:

$$a = a^{*} (1 \pm \text{€} \delta (a^{*})).$$

Правила приближенных вычислений и нахождения процентного соотношения

- **При сложении и вычитании** приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.
- Например, при сложении чисел

$$\begin{array}{r} 4{,}462 \\ 2{,}38 \\ 1{,}17273 \\ 1{,}0262 \\ \hline 9{,}04093 \end{array}$$

следует сумму округлить до сотых долей, приняв равной 9,04.

Правила приближенных вычислений и нахождения процентного соотношения

- **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.
- Например, вместо вычисления выражения

$$3{,}723 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}1846$$

следует вычислять выражение $3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}2$

- В окончательном результате следует оставлять такое же количество значащих цифр, какое имеется в сомножителях, после их округления.
- В промежуточных результатах надо сохранять на одну значащую цифру больше. Такое же правило соблюдается и при делении приближенных чисел.

Правила приближенных вычислений и нахождения процентного соотношения

- **При возведении в квадрат или куб** следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.
- Например, $1{,}32^2 \approx 1{,}74$
- **При извлечении квадратного или кубического корня** в результате нужно брать столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении.
- Например, $\sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4}$

Правила приближенных вычислений и нахождения процентного соотношения

- **При вычислении сложных выражений** следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий. Например,

$$\frac{(3{,}2+17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1\cdot 2{,}007\cdot 10^{3}}$$

- Сомножитель 5,1 имеет наименьшее число значащих цифр – две. Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр:

$$\frac{(3{,}2+17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1\cdot 2{,}007\cdot 10^{3}} \approx \frac{20{,}3\cdot 1{,}92}{10{,}3\cdot 10^{3}} \approx \frac{39{,}0}{10{,}3\cdot 10^{3}} \approx 3{,}79\cdot 10^{-3}$$

- После округления результата до двух значащих цифр окончательно получаем $3{,}8\cdot 10^{-3}$.

Нахождение процентного соотношения

- **Например:** Длина листа бумаги формата А4 равна (29.7 ± 0.1) см. А расстояние от Санкт-Петербурга до Москвы равно (650± 1) км. Абсолютная погрешность в первом случае не превосходит одного миллиметра, а во втором – одного километра. Вопрос, сравнить точность этих измерений.
- Если вы думаете, что длина листа измерена точнее потому, что величина абсолютной погрешности не превышает 1 мм. То вы ошибаетесь. Напрямую сравнить эти величины нельзя. Проведем некоторые рассуждения.
- При измерении длины листа абсолютная погрешность не превышает 0.1 см на 29.7 см, то есть в процентном соотношении это составляет 0.1/29.7 *100% = 0.33% измеряемой величины.
- Когда мы измеряем расстояние от Санкт-Петербурга до Москвы абсолютная погрешность не превышает 1 км на 650 км, что в процентном соотношении составляет 1/650 *100% = 0.15% измеряемой величины. Видим, что расстояние между городами измерено точнее, чем длинна листа формата А4.

Практическое занятие

- решение практических задач,
- графическое представление результатов измерения величин.

Задача 1

Округлить сомнительные цифры приближенного числа x с относительной погрешностью d, оставив в его записи только верные цифры. *x* = 42.221, d = 0.5%.

Решение:

1) Найдем количество верных цифр числа x:

Отсюда *n* = 3

2) Округляем *x* до трех цифр

x = 42.2

Задача 2

Записать формулу для оценки абсолютной погрешностей функции трех переменных:

, если

Решение:

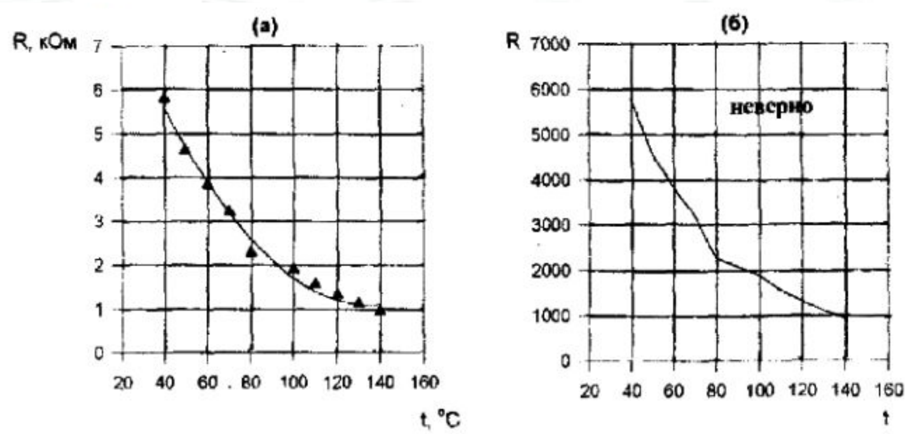
Графическое представление результатов измерения величин

- Графики, наряду с таблицами, являются наиболее распространенной формой представления данных эксперимента. Основным достоинством графического способа является его наглядность. В этом случае весь экспериментальный материал легко обозрим, график позволяет понять основные черты наблюдаемой зависимости, обнаружить, какие экспериментальные точки выпадают из общей серии, как они согласуются с теоретическими данными и т, д. Кроме этого, графики строят для того, чтобы определить некоторые эмпирические величины. Например, в случае линейной зависимости - наклон прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат. Наконец, графики нужны для установления эмпирических соотношений между двумя величинами (градуировочные кривые).
- При построении графиков по оси абсцисс откладывают независимую переменную, т.е. величину, задаваемую экспериментатором, а по оси ординат - величину, которая при этом определяется.

Построение графиков регламентируется следующими правилами:

- 1. Графики выполняются только на специальной прокалиброванной бумаге (миллиметровой логарифмической или полулогарифмической).
- 2. Масштаб выбирается таким образом, чтобы наносимые экспериментальные точки не сливались друг с другом, В противном случае информативность графика резко падает. Масштаб должен быть простым: одной клетке миллиметровой бумаги может соответствовать 0.1, 0.2, 0.5. 1, 2, 5, 10 и т. д. единиц измеряемой величины. Других масштабов (2, 5, 3, 4, 7 и т. д.) следует избегать, поскольку в этом случае при нанесении точек придется производить дополнительные арифметические операции в уме.
- 3. Единицы измерения указываются на осях координат вместе с символом измеряемой величины. При этом десятичный множитель обычно относят к единице измерения.

- 4. Через экспериментальные точки всегда проводят самую простую (плавную) кривую, совместимую с этими точками. Кривым не следует придавать никаких изгибов, если в пределах ошибок измерений экспериментальным данным можно удовлетворить без этого. При этом число экспериментальных точек, лежащих на графике выше и ниже проведенной кривой, должно быть примерно одинаковым.
- 5. В ряде случаев на графике необходимо указывать ошибки отдельных измерений (как правило при сравнении с теоретической зависимостью или когда они неодинаковы для различных точек). При этом результат каждого измерения изображается не в виде точки, а крестиком, половина длины которою по горизонтали равна погрешности независимой переменной, а вертикальный полуразмер - погрешности исследуемой величины. В том случае, если одна из ошибок из-за малости не может быть изображена графически, результат представляется черточками или вытянутыми на величину ± Δx в том направлении, где погрешность существенна.
- 6. Всю работу по построению графиков необходимо сначала проделать карандашом, поскольку часто непосредственно в ходе построения приходится вносить дополнительные коррективы.



Самостоятельная работа:

- анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью, представление их графическим способом