Лекция 3.

# Дисперсионный анализ

Фундаментальная концепция дисперсионного анализа предложена Фишером в 1920 году.

Цель *дисперсионного анализа (ANOVA - **AN**alysis **O**f **VA**riance)* - проверка значимости различия между средними с помощью сравнения (т.е. анализа) дисперсий.

Основа метода - **разложение общей дисперсии** статистического комплекса **на** составляющие ее **компоненты**, которые сравниваются друг с другом посредством **F-критерия**

какая доля общей вариации учитываемого *результативного* признака (*зависимой переменной*) обусловлена действием регулируемых и не регулируемых в опыте факторов.

*MANOVA – **M**ultivariate **AN**alysis **O**f **VA**riance*

Если сравнивать средние в двух выборках,

дисперсионный анализ =

= обычный *t*-критерий для независимых выборок (если сравниваются две независимые группы объектов или наблюдений)

или

= *t*-критерий для зависимых выборок (если сравниваются две переменные на одном и том же множестве объектов или наблюдений).

Основная причина, по которой использование дисперсионного анализа предпочтительнее повторного сравнения двух выборок при разных уровнях факторов с помощью серий *t*-критерия:

дисперсионный анализ существенно более *эффективен*

и

более информативен, особенно для малых выборок

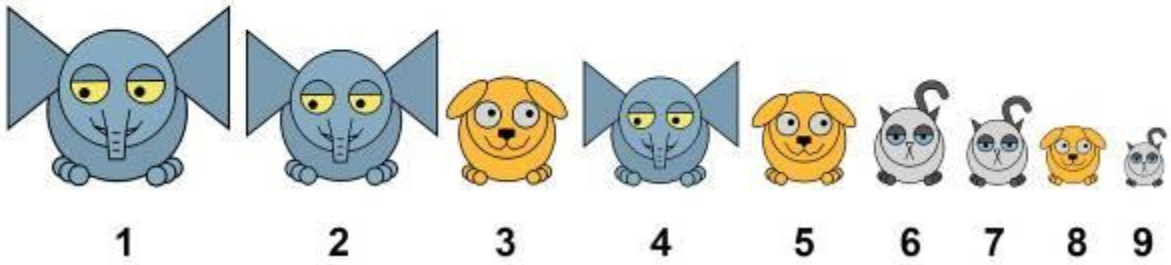
# Зависимые и независимые переменные

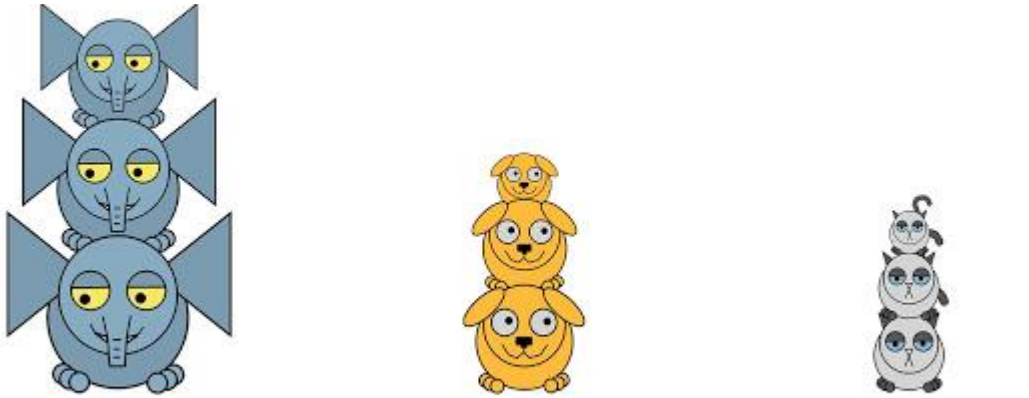
***Зависимые*** переменные - те, значения которых определяется с помощью измерений в ходе исследования. **Шкалы отношений и *интервальные***

***Независимые*** переменные или ***факторы*** - переменные, которыми можно управлять при проведении эксперимента (например, методы обучения) или другие критерии, позволяющие разделить наблюдения на группы или классифицировать. **Номинативные шкалы**

*Как быть, если зависимая переменная задана порядковой шкалой?*

## Критерий Краскела-Уоллеса



## Дисперсионный анализ

Разделение общей дисперсии на несколько источников позволяет

сравнить дисперсию,

вызванную различием между группами,

с дисперсией,

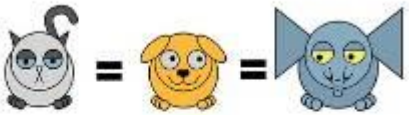
вызванной внутригрупповой изменчивостью.

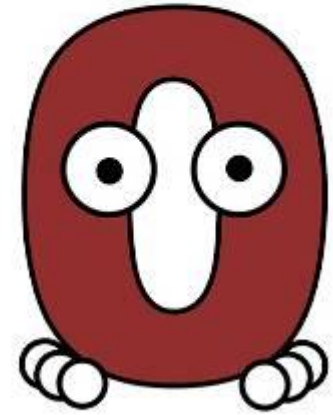
При истинности **нулевой гипотезы** (о равенстве средних в нескольких группах наблюдений, выбранных из генеральной совокупности), оценка дисперсии,

связанной с **внутригрупповой** изменчивостью,

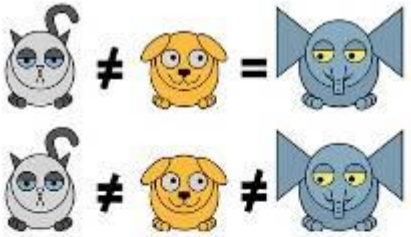
должна быть

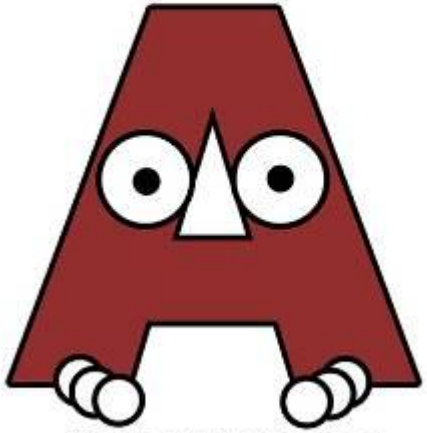
**близкой** к оценке **межгрупповой** дисперсии.



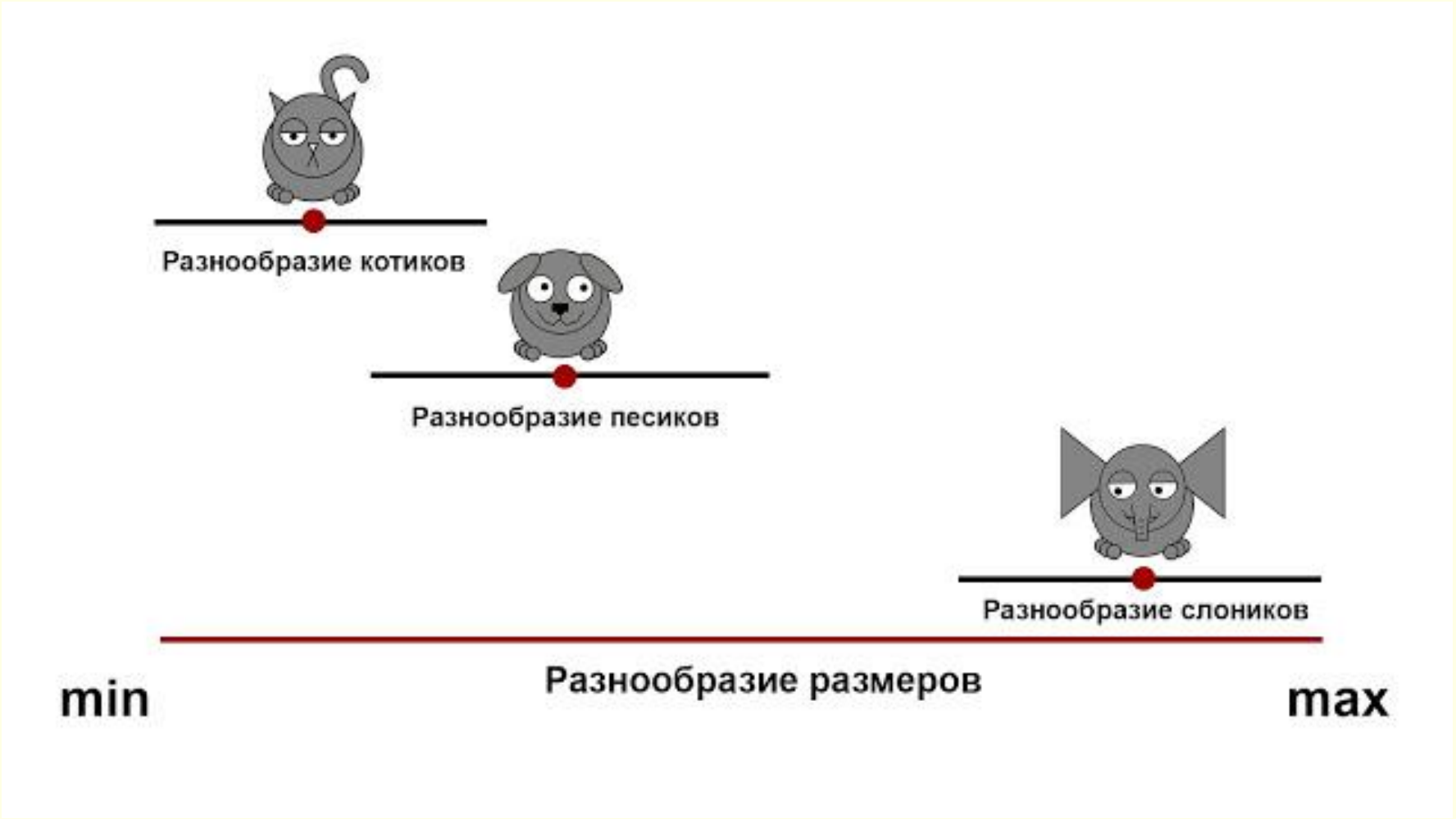


Нулевая гипотеза





Альтернативная гипотеза




**Внутригрупповая и межгрупповая** (в данном случае – между биологическими видами) **изменчивости**

Внутри каждой группы, входящей в статистический (дисперсионный) комплекс, - варьирование, вызванное влиянием на признак не регулируемых в опыте факторов.

Зависимость между этими источниками варьирования выразится следующим равенством: $D_y = D_x + D_e$

*Dx* – межгрупповая девиата - сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней комплекса, *взвешенная на n вариант в группе* (N=∑n)

*De* – внутригрупповая девиата - сумма из сумм квадратов отклонений вариант от их групповых средних

*Dy* – общая девиата - сумма квадратов отклонений от общей средней комплекса в целом.

$$D_x = \sum_{i=1}^{a} \frac{n(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$D_e = \sum_{i=1}^{a} \left[ \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}_i)^2 \right]$$

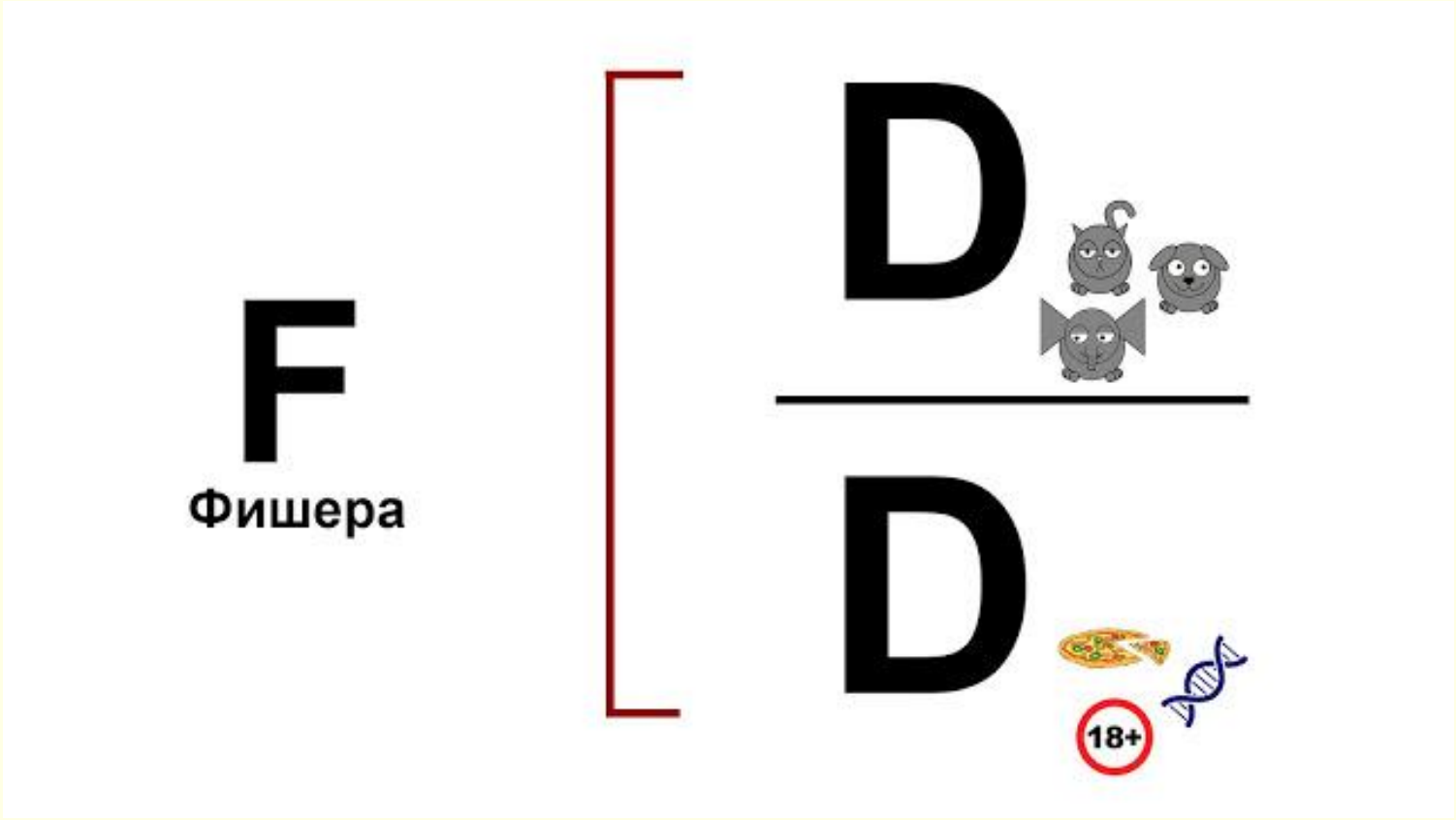
$$D_y = \sum_{j=1} (x_j - \bar{x})^2$$

Деление сумм квадратов отклонений (***девиат***) на числа степеней свободы *k* дает выборочные ***дисперсии*** $s_y^2=D_y/k_y$; $s_x^2=D_x/k_x$; $s_e^2=D_e/k_e$, которые служат оценками соответствующих генеральных параметров:

$s_y^2$ - *оценка общей дисперсии комплекса,*

$s_x^2$ - *оценка межгрупповой дисперсии,*

$s_e^2$ - *оценка внутригрупповой или остаточной дисперсии*.




Основа метода - **разложение общей дисперсии** статистического комплекса **на** составляющие ее **компоненты**, которые сравниваются друг с другом посредством **F-критерия**

какая доля общей вариации *зависимой переменной* обусловлена действием регулируемых и не регулируемых в опыте факторов.

Отношение межгрупповой дисперсии (*называется также факториальной, т.к. зависит от действия регулируемых факторов*) к внутригрупповой (остаточной) дисперсии – критерий оценки влияния регулируемых в исследовании факторов на результативный признак:

$$F=sx^2/se^2$$

Нулевая гипотеза: генеральные межгрупповые средние и дисперсии равны между собой и различия, наблюдаемые между выборочными показателями, вызваны случайными причинами, а не влиянием на признак регулируемых факторов.

Нулевую гипотезу отвергают, если $F_ф \geq F_{st}$ для принятого уровня значимости *α* и чисел степеней свободы *kx* и *ke*,

принимают, если $F_ф < F_{st}$; при этом различия, наблюдаемые между групповыми средними комплекса, признают *статистически недостоверными*.

- После того как действие регулируемого фактора, нескольких факторов или их совместного действия на признак будет доказано, т.е. окажется статистически достоверным, переходят к сравнительной оценке групповых средних.
- Заключительный этап дисперсионного анализа - оценка силы влияния отдельных факторов или их совместного действия на признак:
- **Оценка post hoc и метод априорных контрастов**

• метод наименьших значимых различий (***LSD*****;**
• тест Шеффе (***Schejfe***)
• тест Тьюки (***Tukey***)
• тест Дункана
• тест Бонферрони (критерий Стьюдента для множественных сравнений)

Дисперсионный анализ, как метод одновременных сравнений выборочных средних, предъявляет требования к группировке выборочных данных и к планированию наблюдений. Результаты наблюдений, подлежащие дисперсионному анализу, группируют с учетом градации каждого регулируемого фактора, воздействующего на признак.

- Особенность *post-hoc*-тестов - использование внутригруппового среднего квадрата для оценки любых пар средних.
- Тесты по методам Бонферрони и Шеффе являются наиболее консервативными, так как они используют наименьшую критическую область при заданном уровне значимости .

- Если испытывают действие на признак одного регулируемого фактора, дисперсионный комплекс будет *однофакторным*,

  если одновременно исследуют действие на признак двух, трех или большего числа регулируемых факторов, комплекс называется *двух-, трех- и многофакторным*.

  Числовые значения (даты) результативного признака могут распределяться по градациям комплекса равномерно, пропорционально и неравномерно. Поэтому дисперсионные комплексы называют равномерными, пропорциональными и неравномерными.
- *Равномерные и пропорциональные комплексы носят общее название ортогональные, а неравномерные комплексы называют неортогональными.*

Правильное применение дисперсионного анализа

предполагает нормальное или близкое к нормальному распределению совокупности, из которой взяты выборки, объединяемые в дисперсионный комплекс.

**!!!** Важно, чтобы дисперсии выборочных групп были одинаковыми или не очень сильно отличались друг от друга

(тесты на гомогенность дисперсий: Hartley F-max statistic, Cochran C statistic, the Bartlett *Chi*-square test; Levene's test)

Дисперсионный анализ:

- Однофакторный
- Многофакторный
- Многомерный

Дисперсионный анализ характеризуется строгой логичностью и последовательностью вычислительных операций.

Ценность этого метода: позволяет выявить

- суммарное действие факторов,
- действие каждого регулируемого в опыте фактора в отдельности
- действие различных сочетаний факторов друг с другом

на результативный признак.

Дисперсионный анализ позволяет выражать учитываемые признаки не только в абсолютных единицах измерения и счета, но и в баллах, индексах и других относительных и условных единицах.

Статистические, или дисперсионные, комплексы могут формироваться как в планах намечаемых исследований, так и на основании уже собранных данных, подвергаемых дисперсионному анализу.

При образовании дисперсионных комплексов необходимо соблюдать **два важных *условия***, *гарантирующих правильное применение дисперсионного анализа*:

1. Действующие на признак регулируемые факторы должны быть **независимыми** друг от друга.
2. Выборки, группируемые в статистический комплекс, должны производиться по принципу **рандомизации**, т.е. способом случайного отбора из нормально распределяющейся совокупности.

Видеолекция НОУ ИНТУИТ (к.физ-мат.н. Бояршинов Б.С., 1час 12 мин): https://www.youtube.com/watch?v=Wt1wdYWs_i0