УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

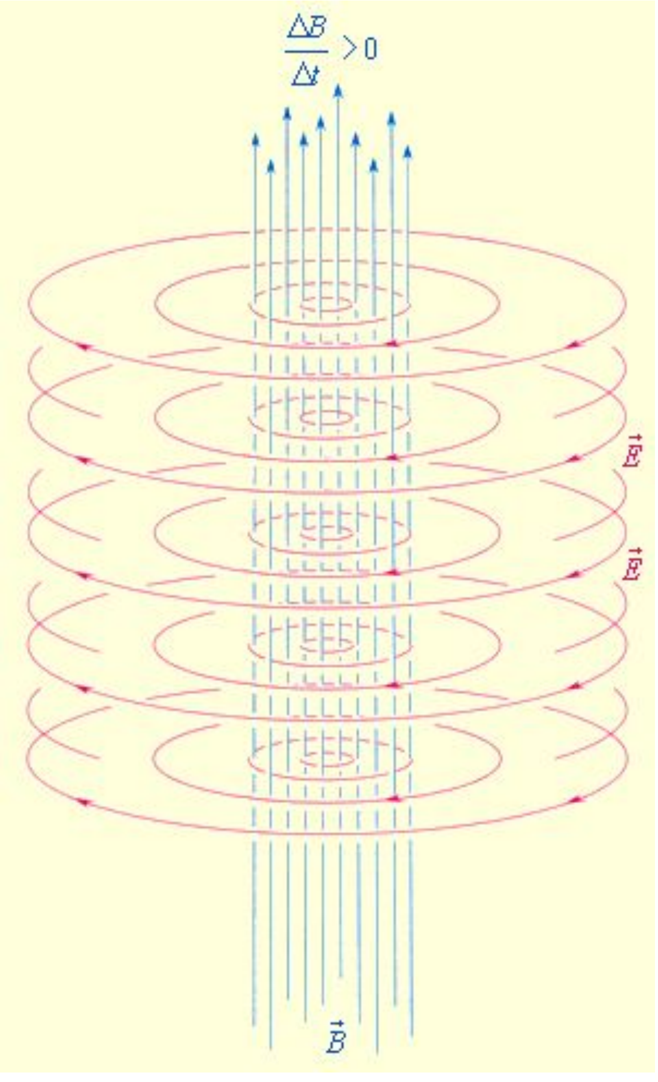
1. ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Если неподвижный проводящий контур пронизывается переменным магнитным полем, то в контуре появляется индукционный ток.

Возникновение индукционного тока говорит о том, что изменение магнитного поля вызывает появление в контуре сторонних сил $\vec{F}^* = q\vec{E}^*$, действующих на носители тока (заряды).

Действие сторонней силы связано с появлением вихревого электрического поля $\vec{E}^*$.
ЭДС индукции равна циркуляции $\vec{E}^*$ по контуру:

$$\varepsilon_i = \frac{A^*}{q} = \frac{1}{q}\oint \vec{F}^* d\vec{l} = \frac{1}{q}\oint q\vec{E}^* d\vec{l} = \oint \vec{E}^* d\vec{l}.$$

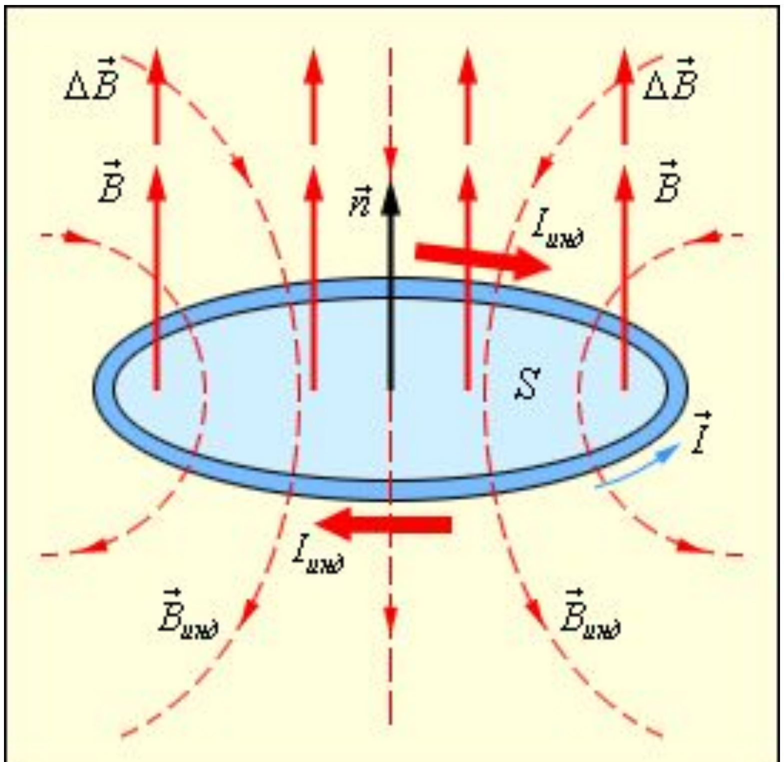


2. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

По закону Фарадея $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} \Rightarrow$

$$\oint \vec{E}^{*} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}; \qquad \Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{E}^{*} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\oint_S \vec{B} d\vec{S}.$$



Поскольку контур и поверхность S, для которой вычисляется магнитный поток, неподвижны, то операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\oint_L \vec{E}^{*} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.}$$

3. ЗАКОН ФАРАДЕЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Первое уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint_L \vec{E}^* d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Преобразуем левую часть по теореме Стокса:

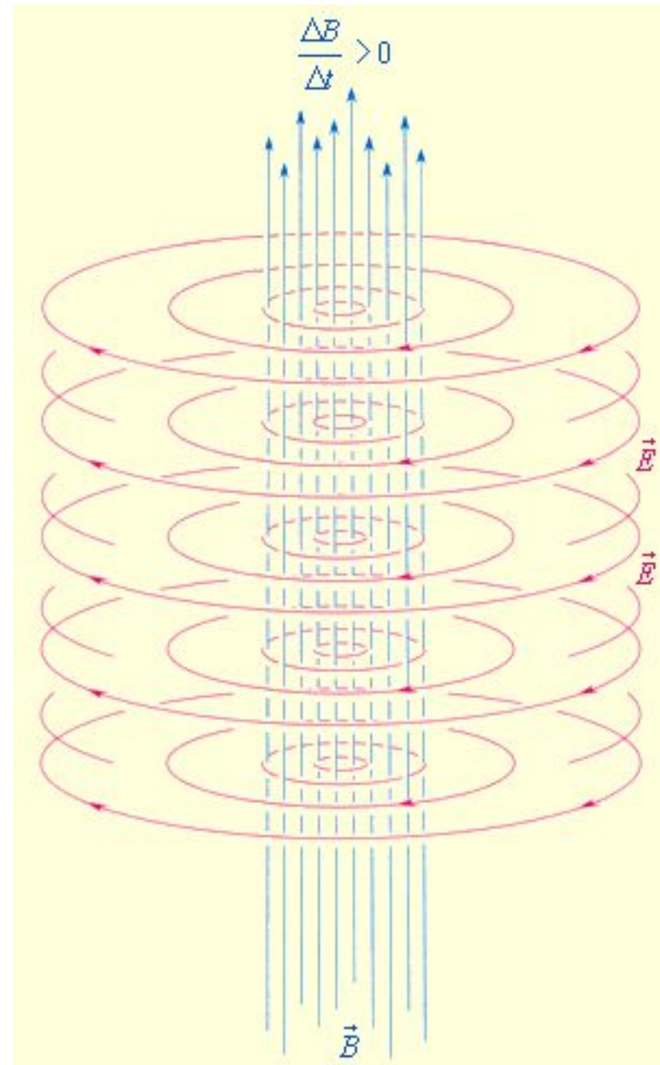
$$\oint_L \vec{E}^* d\vec{l} = \int_S \left[\nabla \times \vec{E}^*\right] d\vec{S} \Rightarrow$$

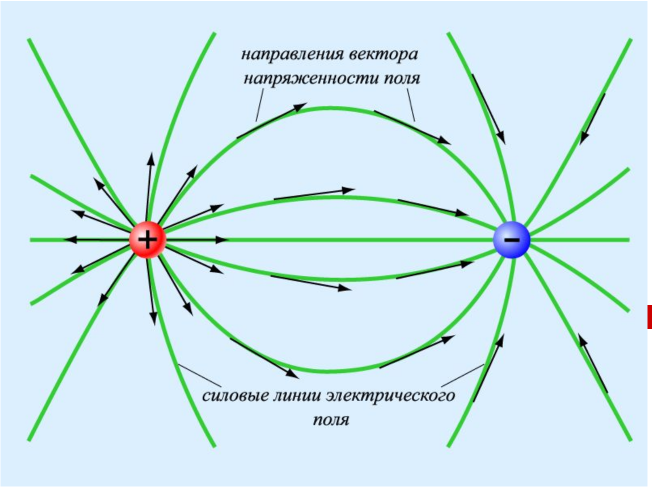
$$\int_S \left[\nabla \times \vec{E}^*\right] d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

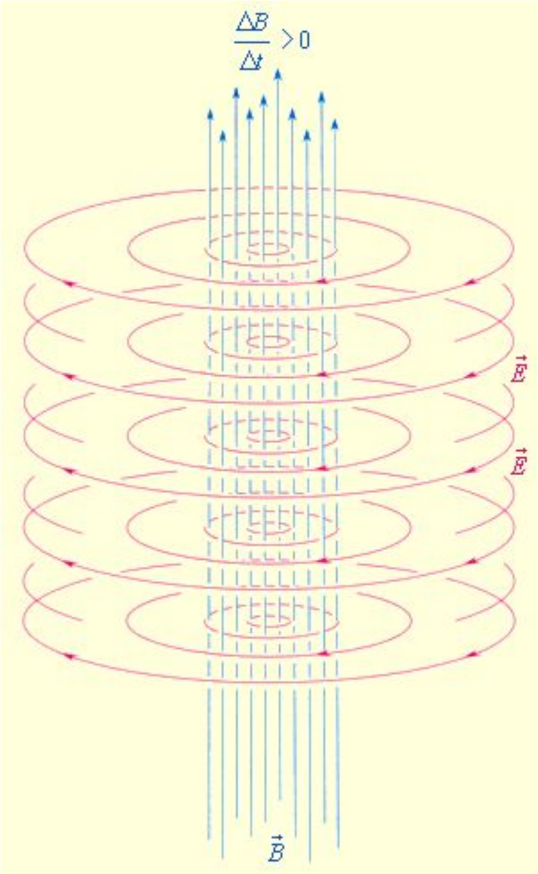
Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования в каждой точке должно выполняться равенство

$$\boxed{\left[\nabla \times \vec{E}^*\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},}$$

выражающее закон электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме.







4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Вихревое электрическое поле $\vec{E}^*$, порождаемое переменным магнитным полем существенно отличается от порождаемого зарядами электростатического поля $\vec{E}_0$.

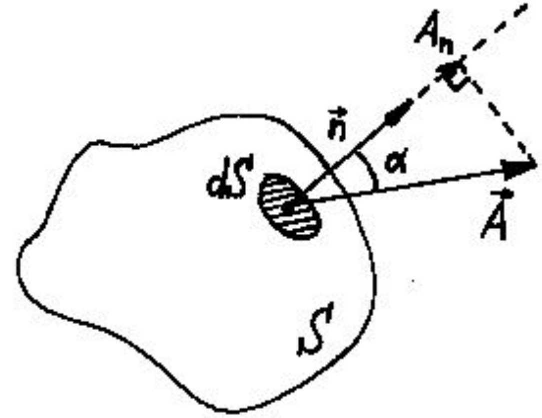
Электростатическое поле потенциально $\left(\left[\nabla \times \vec{E}_0\right] = 0\right)$, его линии напряженности начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных.

Вихревое поле непотенциально $\left(\left[\nabla \times \vec{E}^*\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$, его линии напряженности замкнуты сами на себя, для создания поля требуются не электрические заряды, а меняющееся во времени магнитное поле.

В общем случае $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}^* \Rightarrow$

$$\left[\nabla \times \vec{E}\right] = \left[\nabla \times \vec{E}_0\right] + \left[\nabla \times \vec{E}^*\right] \Rightarrow \quad \left[\nabla \times \vec{E}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

5. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ



Рассмотрим воображаемую замкнутую поверхность S в некоторой среде с током.
Выражение $\oint_S \vec{j}d\vec{S}$ определяет заряд, вышедший из объема V, ограниченного поверхностью S.
В силу закона сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда q, содержащегося в данном объеме:

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}; \qquad q = \int_V \rho dV \Rightarrow \qquad \oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV;$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \equiv \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV \Rightarrow \qquad \oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV.$$

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = \int_V \left(\nabla\vec{j}\right)dV \Rightarrow$$

$$\int_V \left(\nabla\vec{j}\right)dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV \Rightarrow \boxed{\nabla\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

- уравнение непрерывности.

$$\rho = const \Rightarrow \nabla\vec{j} = 0.$$

6. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Теорема о циркуляции в виде $\left[\nabla \times \vec{H}\right] = \vec{j}$ противоречит уравнению непрерывности:

$$\nabla\left[\nabla \times \vec{H}\right] = \nabla\vec{j}; \qquad \nabla\left[\nabla \times \vec{H}\right] \equiv 0 \Rightarrow \qquad \nabla\vec{j} = 0, \quad \text{но} \quad \nabla\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Вывод: $\nabla\vec{j} = 0$ только для стационарных процессов, при нестационарных процессах плотность зарядов ρ может меняться со временем. В этом случае в полном согласии с уравнением непрерывности $\nabla\vec{j} \neq 0.$

Чтобы согласовать теорему о циркуляции и уравнение непрерывности, Максвелл ввел в правую часть теоремы о циркуляции дополнительное слагаемое и назвал его плотностью тока смещения. Таким образом,

$$\left[\nabla \times \vec{H}\right] = \vec{j}_0 + \vec{j}_c; \qquad \vec{j}_0 \equiv \vec{j}; \qquad \vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_c. \quad \vec{j}_c = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \left[\nabla \times \vec{H}\right] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть полным током.

7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

$$\oint_{l} \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S} \qquad (1)$$

$$\oint_{S} \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \qquad (2)$$

$$\oint_{l} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_{S} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} \qquad (3)$$

$$\oint_{S} \vec{D}\, d\vec{S} = \int_{V} \rho\, dV \qquad (4)$$

Уравнение (1) является обобщением закона Фарадея (закона электромагнитной индукции), уравнение (3) - обобщенный закон полного тока, уравнения (2) и (4) выражают теорему Остроградского - Гаусса для магнитного и электрического полей, соответственно

8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Материальные уравнения :

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

(среда изотропная , несегнетоэлектрическая , неферромагнитная)