Математический анализ (ю)

Лекция - 2

Логическая символика

Умение логически мыслить – **логика** – является основным инструментом процесса математического анализа.

Логика в математике

- наука о способах доказательств и опровержений;
- совокупность научных теорий с доказательствами и опровержениями

1. **Конъюкцией** высказываний относительно p и q называют высказывание, которое истинно только тогда, когда оба высказывания (и p , и q) истинны. Логический символ конъюкции $\wedge$ заменяет союз "и"

2. **Дизъюкцией** высказываний относительно p и q называют высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда оба высказывания (и p , и q) ложны, а истинно, когда хотя бы одно из них (p или q) истинно. Логический символ дизъюкции $\vee$ заменит союз "или" .

3. **Импликацией** (следование) высказываний относительно ***p*** и ***q*** называют высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ***p*** истинно, а ***q*** – ложно. Логический символ импликацией $\Rightarrow$ используют при указании на последствия некоторого факта.
Он заменит словосочетание "если … , то …" или " ***p*** влечет ***q*** ".

4. Символ **эквиваленции** $\Leftrightarrow$ означает, что высказывание истинно только тогда, когда оба высказывания *p* и *q* истинны или оба высказывания ложны. Этот символ заменяется термином "равносильно".

5. **Отрицание** высказыванием *p* называют высказывание $\neg p$, которое истинно, если *p* ложно, и ложно, когда *p* истинно. Логический символ отрицания используют при указании на последствия некоторого факта;
оно заменяет слово " не ".

Для сокращения и уточнения записей высказываний вводятся знаки:

∀ – квантор общности (логический эквивалент слов "все", "каждый");

∃ – квантор существования (логический эквивалент слова "некоторый"),

∈ , ∉ – символы принадлежности или непринадлежности ;

например, выражение "для всякого элемента *x* множества *E*" записывается в виде $\forall x \in E$;

выражение "... существует по крайней мере один элемент множества *E* , такой что ... " записывается как $\exists x \in E$.

¬ *A* – символ отрицания высказывания *A*

Действительные числа

Действительные (вещественные) числа образуют множество элементов с определенными свойствами:

Свойства **упорядочности**, определяемое соотношениями между элементами – $a < b$, $a = b$ или $a > b$; при этом, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ – свойство **транзитивность** упорядочности.

1. натуральные числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – невыполнимо вычитание
2. целые числа $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – невыполнимо деление
3. рациональные числа $\mathbb{Q} = \{\mathbf{p/q}\}$, $\mathbf{p, q \in Z}$ – невыполнимо извлечение корня из положительных чисел
4. вещественные числа $\mathbb{R}$ – невыполнимо извлечение корня из отрицательного числа.
5. комплексные числа $\mathbb{C}$ – выполнимы все операции

Функции

Определение

Отображением **f** множества X в множество Y, или **функцией**, определенной на множестве X со значениями в множестве Y, называют **соответствие**, которое каждому элементу $x \in X$ соотносит некоторый единственный элемент $y \in Y$.

Множество Y называют **областью определения функции**, элемент

$x \in X$ - **аргументом функции**, а элемент $y \in Y$ - **зависимым переменным**.
Областью значений функции f называют множество

$$f(X)=\{y\in Y : y = f(x)\ \forall x \in X\}.$$

Понятие функции состоит из трех неотъемлемых частей :

1) области определения X;
2) множества Y, содержащего значения функции;
3) правила **f**, которое для каждого элемента $x \in X$ задает единственный элемент $y = \mathbf{f}(x) \in Y$.

Числовая последовательность

Определение. Если каждому натур. числу n поставлено в соотв. некоторое действит. число x_n, то говорят, что задан
последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которую обознач.: $\{x_n\}$

Отдельные числа $x_k \in \{x_n\}$ наз. членами (элементами) послед-ти $\{x_n\}$

Часто последовательность задается формулой для вычисления ее элементов по их номерам : $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n\}$ – функция натурального аргумента : $x_n = f(n)$

Определение: число a наз. предeлом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : (\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$

Обозначение : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$

Определение: последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел a называется сходящейся (к числу a) , а не имеющая предел – расходящейся.

Примеры (1): $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, т.е. $a = 0$. Поскольку выражение $|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$ выполнено $\rightarrow \forall n > 1/\varepsilon = N(\varepsilon)$

$N(\varepsilon)$ – не обязательно целое, n – номер, обязательно целое.

(2): $\{x_n\}$ – стационарная последовательность, $x_n = a$.

$\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; т.к. $\forall n \Rightarrow |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

Геометрическая интерпретация

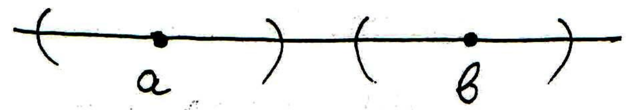
$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \Longleftrightarrow$ в любой ε-окрестн. т. a лежат все члены послед-ти $\{x_n\}$, начиная с некоторого N

Вне любой ε-окрестн. т. a лежит лишь конечное их число.

Теорема. Последовательность может иметь лишь один предел.

Док-во. От противного: $x_n \to a$ и $x_n \to b$, $a \neq b$ $\Longrightarrow$

$\exists\, \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$



$(x_n \to a) \Longrightarrow$ вне $O_\varepsilon(a)$ лежит лишь конечное число эл-тов послед. $\{x_n\}$ что противоречит тому, что $x_n \to b$. ▶

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ наз. ограниченной, если

$$\exists\, c : |x_n| < c \quad \forall n = 1, 2, \ldots .$$

|| геометрически $x_n \in O_c(0)$ $\forall n$ все эл-ты посл-ти лежат внутри некоторого интервала (конечной длины)

<u>Теорема</u>. Сходящаяся последовательность ограничена.

<u>Док-во</u>. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмём $\varepsilon > 0$, все элементы посл-ти $\{x_n\}$, начиная с x_{N+1}, лежат в $O_\varepsilon(a)$.

Положим $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$, тогда $|x_n| \le C \quad \forall n = 1, 2, \dots$

<u>Замечание.</u> Обратное неверно, например, $\{(-1)^n\}$.

Геометрически: <u>конечное</u> число эл-тов посл-ти $x_1, x_2, \dots, x_N$, очевидно, можно поместить в некоторую δ-окрестность т. a: $x_1, \dots, x_N \in O_\delta(a)$.

$r = \max\{\varepsilon, \delta\} \Rightarrow x_n \in O_r(a) = O_\varepsilon(a) \cup O_\delta(a) \quad \forall n$

Арифметические операции над последовательностями

<u>Определение</u>. Последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ наз., соответственно, суммой, разностью, произведением и частным последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. В последнем случае предполагается, что $y_n \neq 0$, $n=1,2,\dots$

<u>Лемма</u>. $|a+b| \leq |a|+|b|$

<u>Док</u>. $\left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right] \Rightarrow -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$ ∎

<u>Следствие</u>. $|a-b| \leq |a|+|b|$. <u>Док</u>. $b \leftrightarrow -b$.

<u>Теорема</u>. Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то

1) $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$, 2) $\lim(x_n y_n) = ab$, 3) $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ **, $b \neq 0$**

1

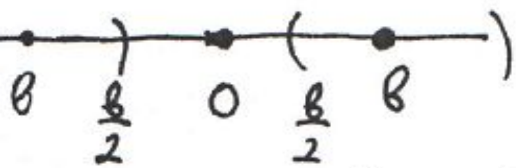
Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда при $n > N$ $|x_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - b| < \varepsilon$

1) $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < 2\varepsilon$ при $n > N$

2) $|x_n y_n - ab| = |(x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)| \le |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|$

3) $\lim y_n = b \ne 0 \Rightarrow$ начиная с нек. M все элементы посл. $\{y_n\}$ соберутся в $\frac{|b|}{2}$-окрестности т. b $\Rightarrow$



$\frac{|b|}{2} < |y_n|$ при $n > M$

$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{b y_n}\right| < \frac{2}{b^2}\varepsilon$ при $n > \max\{N, M\} \Rightarrow \lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$

по 2) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ▶

yn

Монотонные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ наз.

неубывающей, если $x_n \leq x_{n+1}$,
(строго) возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$,
невозрастающей, если $x_n \geq x_{n+1}$,
(строго) убывающей, если $x_n > x_{n+1}$,
$\forall n = 1, 2, \ldots$

Обобщённо такие послед-ти наз. монотонными.

2

Теорема. Монотонная ограниченная послед-ть сходится.

При этом если последовательность является:

неубывающей, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$;

невозрастающей, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

y_n

Важнейший пример.

Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

возрастающая и ограниченная сверху

Её предел $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{def}}{=} e$ – Число Эйлера

Численно найдено $e = 2,718281828459045\ldots$

3

Теорема (о зажатой последовательности)

Если элементы последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, $x_n \le y_n \le z_n$ и при этом $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a-\varepsilon < x_n} < a+\varepsilon \\ a-\varepsilon < \underline{z_n < a+\varepsilon} \end{array}\right] \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon$$

при $n > \max\{N, n_0\}$ ▶

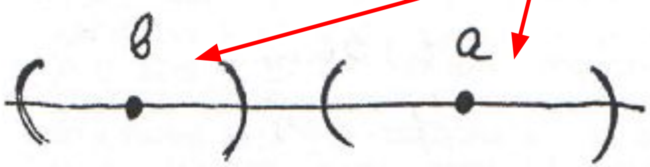
4

Теорема (о переходе к пределу в неравенстве)

Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $x_n \le y_n$ при $n > n_0$, то $\lim x_n \le \lim y_n$.

Док-во Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$

Предположим, что $b < a$, тогда $\exists\, \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \varnothing$



$\exists N = N(\varepsilon) : y_n \in O_\varepsilon(b),\ x_n \in O_\varepsilon(a)$

при $n > N \implies y_n < x_n$

при $n > \max\{N, n_0\}$ ▶

Замечание. $x_n < y_n \not\Rightarrow \lim x_n < \lim y_n$

Например, $0 < \frac{1}{n}$, но $\lim \frac{1}{n} = 0$.

5

<u>Пример</u>. <u>Лемма</u>. Послед. $\{y_n\}$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходит

<u>Док.</u>

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n-1}:\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}\geq$$

$$\geq\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\frac{n}{n+1}=1$$

нер-во Берн...

Поскольку $y_n>0$ $\forall n=1,2,\ldots$, $y_{n-1}>y_n$

т.е. послед-ть $\{y_n\}$ <u>убывающая</u> $\Longrightarrow$ $0<y_n<y_1=4$ $\Longrightarrow$

т.е. послед-ть $\{y_n\}$ <u>ограниченная</u> $\Longrightarrow$ $\exists\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ ▶

См слайд 14

Предел ~~последовательности~~

Число a наз. <u>пределом последовательности</u> $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

<u>Пример</u>: показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

Составим разность

$$\left| \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

если $n > 1/\varepsilon - 1 = N(\varepsilon)$.

Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N = 1/\varepsilon - 1$ такое, что при $n > N$ будет иметь место неравенство $n > 1/\varepsilon - 1$. Следовательно, число $a = 2$ является пределом

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Пример Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$ сходится к числу $a = \dfrac{2}{3}$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Р е ш е н и е. Из цепочки соотношений

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{3(3n+1)} < \varepsilon$$

следует, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3\varepsilon} - 1\right) = N(\varepsilon)$. Вычислив $N(\varepsilon)$ при значениях, равных 0,1, 0,01 и 0,001, заполняем таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	5	55	555

Свойства сходящейся последовательности

Теорема Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Пример Показать, что последовательность $x_n = q^n$, где $|q| < 1$, является бесконечно малой.

Р е ш е н и е. При $q = 0$ это очевидно. Пусть $0 < |q| < 1$. Воспользовавшись неравенством Бернулли (1), получим цепочку соотношений

$$\frac{1}{|q|^n} = \left[1+\left(\frac{1}{|q|}-1\right)\right]^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|}-1\right) > n\left(\frac{1}{|q|}-1\right),$$

из которой следует, что

$$|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{n\left(\frac{1}{|q|}-1\right)} < \varepsilon$$

Это означает , что $n > \dfrac{1}{\varepsilon(\frac{1}{|q|}-1)} = N(\varepsilon)$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

<u>Пример</u> : найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку в сумме, определяющей x_n, каждое последующее слагаемое меньше предыдущего, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ зажата последовательностями $y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ и $z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, пределы которых равны единице. Действительно

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

Предел функции

Определение . Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c), содержащий точку a.

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a.

Определение Пусть $\varepsilon > 0$, ε-окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε-окрестность, из которой исключена сама точка a. Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

1

Определение (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$в точке a (или при $x \to a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена.

Замечание: в т. а функция f(x) может быть не определена . Например f(x) = x•sin 1/x определена всюду, кроме 0 ,

но $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin {}^{1}\!/_{x} = 0$ →

Пусть ε > 0 , тогда |x•sin 1/x - 0| = |x|•|sin 1/x| ≤ |x| < ε

при условии 0 < |x - 0| = |x| < δ(ε) = ε

Предел функции

Определение : функция $f(x) \to A$ при $x \to a$ (A, a - числа), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

. $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$

Аналогично, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$

1. $$\lim_{x \to a}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x);$$

2. $$\lim_{x \to a}[f_1(x) \times f_2(x)] = \lim f_1(x) \times \lim f_2(x);$$

3. $$\lim_{x \to a}[f_1(x) / f_2(x)] = \lim f_1(x) / \lim f_2(x);$$

Предел по Коши в области бесконечности :

2

Определение Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$,

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Аналогично определяются пределы функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right),$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Односторонние пределы.

3

Определение. Число A_- наз. пределом слева функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-A_-|<\varepsilon$$

$$A_- \overset{def}{=} \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$$

Число A_+ наз. пределом справа функции $f(x)$ в т. a, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-A_+|<\varepsilon$$

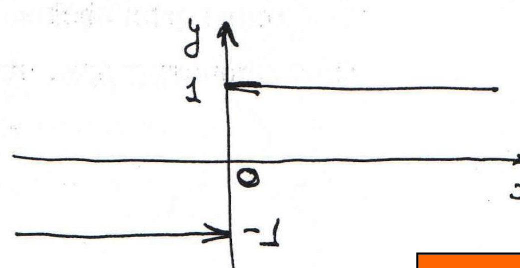
$$A_+ \overset{def}{=} \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$$

Числа A_-, A_+ наз. односторонними пределами.

Пример. $f(x)=\operatorname{sign} x = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(-0) = -1$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = f(+0) = 1$$



Здесь принято обозначение $A_+ = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$.

Числа A_-, A_+ называются *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке a.

Пример 18. Определим функцию sign (читается сигнум):

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(-0) = -1$, а $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(+0) = 1$.

4

Теорема. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда $A = A_- = A_+$.

Док-во. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \iff$

$$\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\},$$

тогда

$$\{a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\} \Rightarrow A = A_-$$

$$\{a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\} \Rightarrow A = A_+$$

Пусть $A_- = A_+ = A$, тогда $\forall \varepsilon > 0$

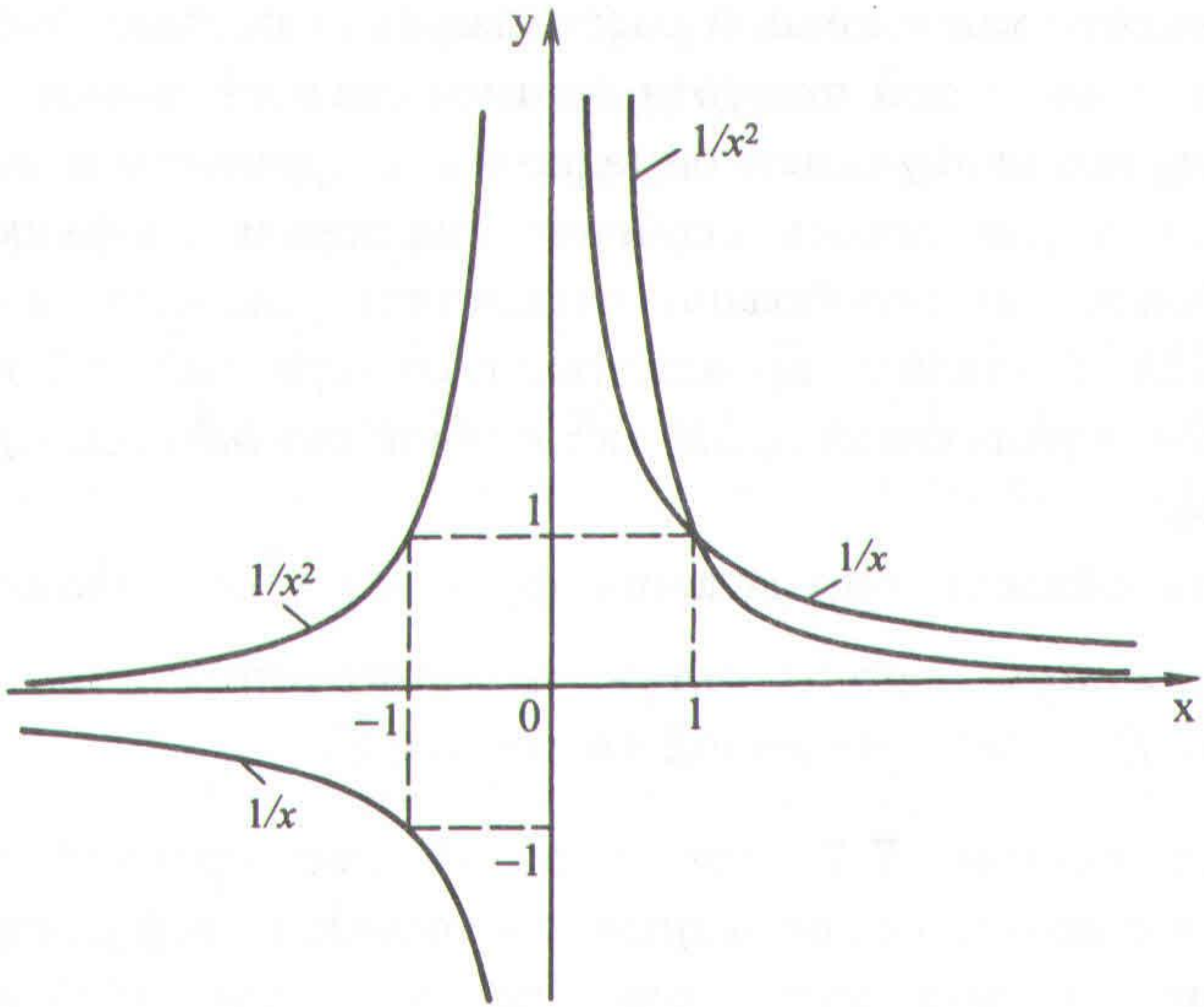
$$\exists \delta_- > 0 : a - \delta_- < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_+ > 0 : a < x < a + \delta_+ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Положим $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$, тогда

$$\{0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Односторонние пределы



Основные теоремы о пределах функций

1 **Теорема.** Функция $f(x)$ может иметь в точке a только один предел.

Док-во. Пусть $f(x)$ имеет в т. a два предела A_1 и A_2, тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 : \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A_1| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A_2| < \varepsilon$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leq |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| < 2\varepsilon$$

при $0 < |x-a| < \delta$

В силу произвольности ε $\quad A_1 - A_2 = 0$ ▶

2 **Теорема.** (о локальной ограниченности функции, имеющей предел)

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \neq \infty$, то $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Док-во. Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \delta > 0$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \qquad \Leftrightarrow$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \qquad \forall x \in \dot{U}_\delta(a)$$ ▶

3

Теорема (о предельном переходе в неравенстве)

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

и всюду в некоторой проколотой окрестности т. a

выполняется нер-во $f(x) \le g(x)$, то $A \le B$.

Док-во Положим $h(x) = g(x) - f(x)$.

При некотором $\rho > 0$: $\forall x \in \dot{O}_\rho(a) \Rightarrow h(x) \ge 0$.

Допустим, что $A > B$, тогда $\lim\limits_{x\to a} h(x) = B - A < 0$

По теореме о сохранении ф-ей знака своего предела

$\exists\, \sigma > 0: \quad \forall x \in \dot{O}_\sigma(a) \quad h(x) < 0$

Если $\delta = \min(\rho, \sigma)$, то $\forall x \in \dot{O}_\delta(a)$ одновременно

$h(x) \ge 0$ и $h < 0$. Противоречие. ▶

Замечание. Из $f(x) < g(x)$ не следует, что $A < B$.

Вообще, $f(x) < g(x) \Rightarrow A \le B$.

4

Теорема (о пределе промежуточной функции)

Пусть в некоторой проколотой окрестности т. a $\dot{U}_\sigma(a)$ выполнены неравенства

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

тогда если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Док-во. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta_1 : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow A-\varepsilon < g(x) < A+\varepsilon$

$\exists \delta_2 : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow A-\varepsilon < h(x) < A+\varepsilon$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \sigma\}$, тогда

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$A-\varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A+\varepsilon \Rightarrow$

$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ▶

5

Теорема (о пределе сложной функции)

Пусть существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$

и при этом $f(x) \neq b \quad \forall x \in \dot{U}_\rho(a)$,

тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$

Док-во. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$\{\lim\limits_{y\to b} g(y) = c\} \Rightarrow \exists\, \sigma = \sigma(\varepsilon):$

$|g(y) - c| < \varepsilon$ при $0 < |y - b| < \sigma$

положим $y = f(x)$, тогда

$|g(f(x)) - c| < \varepsilon$ при $0 < |f(x) - b| < \sigma$.

$\{\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\} \Rightarrow \exists\, \mu = \mu(\sigma):$

$|f(x) - b| < \sigma$ при $0 < |x - a| < \mu$

$\{f(x) \neq b \quad \forall x \in \dot{U}_\rho(a)\} \Rightarrow$

$0 < |f(x) - b| < \sigma$ при $0 < |x - a| < \delta = \min(\mu, \rho)$

Таким образом,

$|g(f(x)) - c| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$

$\lim g(f(x)) = c$

Практические методы нахождения пределов

1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов P(x), Q(x) при $x \to \infty$ полезно оба члена отношения предварительно разделить на x^n. Аналогично и для дробей, содержащих иррациональности

<u>Пример</u> : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x\sqrt[3]{1+10/x^3}} = 1$

2. Если P(a) = 0 и Q(a) = 0 , то дробь P(x) / Q(x) рекомендуется сократить на бином (x - a) .

3. Иррациональные выражения приводятся к рациональному виду путем введения новой переменной. <u>Например</u> : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = ?$

Решение. Полагая $1 + x = y^6$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$

4. <u>Полезно знать</u>, что если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ то $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} = \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Бесконечно малые функции

Определение Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to *$, если $\lim\limits_{x \to *} \alpha(x) = 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$

Определение Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to *$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow |\beta(x)| > \varepsilon.$$

О бесконечно большой при $x \to *$ функции $\beta(x)$ говорят, что она имеет при $x \to *$ бесконечный предел, и пишут $\lim\limits_{x \to *} \beta(x) = \infty$.

Пример Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, поскольку $\forall \varepsilon > 0 \ \ \left|\frac{1}{x}\right| > \varepsilon$ при $0 < |x| < \frac{1}{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$, то пишут $\lim\limits_{x \to *} f(x) = +\infty$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x \in \dot{O}_\delta(*) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$, то $\lim\limits_{x \to *} f(x) = -\infty$.

Свойства бесконечно малых функций

Теорема. Сумма двух б.м. при $x \to a$ функций есть функция б. малая при $x \to a$.

Док-во. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – б.м. при $x \to a$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon/2$$

$$\exists \delta_2 : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \varepsilon/2$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Замечание. Теорема верна для любого конечного числа б.малых функций.

Теорема. Произведение б. малой при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ на ограниченную в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_\sigma(a)$ т. a функцию $f(x)$ есть б. малая при $x \to a$ функция.

Док-во. Пусть $|f(x)| < C \quad \forall x \in \dot{U}_\sigma(a)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Положим $\rho = \min(\delta, \sigma)$, тогда $0 < |x-a| < \rho \Rightarrow$

$$|f(x)\cdot\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| < C\cdot\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Следствие 1. Если $\alpha(x), \beta(x)$ – б. м. при $x \to a$, то $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ – б. м. при $x \to a$.

Док. $\beta(x)$ – локально ограничена.

Следствие 2. Если $\alpha(x)$ – б. м. при $x \to a$, $C = \mathrm{const}$, то $C\cdot\alpha(x)$ – б. м. при $x \to a$.

.

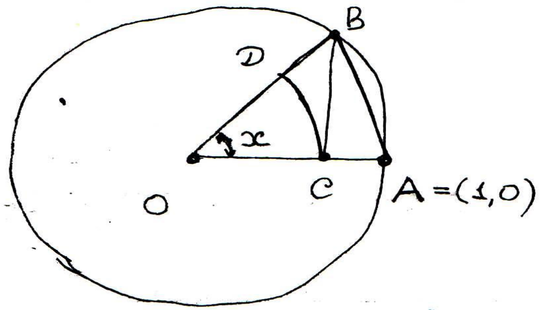
Два замечательных предела

Рассмотренные свойства функций, имеющих предел в точке $a \in \mathfrak{R}$ расширенной числовой прямой, дают возможность проанализировать их поведение в окрестности этой точки a. Однако в ряде случаев этих свойств и установленных правил предельного перехода недостаточно. Одним из классических примеров подобного случая является поведение функции $(\sin x) / x$ в окрестности точки $a = 0$.

Пусть x - центральный угол окружности единичного радиуса, причем $0 < x < \pi/2$ (см. следующий слайд).

Первый замечательный предел :

пусть x - центральный угол единичного круга, $0 < x <$ π/



$$|OA| = |OB| = 1$$

$$S_{\measuredangle OCD} < S_{\Delta OAB} < S_{\measuredangle OAB}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\measuredangle OCD} &= \frac{\pi |OC|^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2}\cdot\cos^2 x \\ S_{\Delta OAB} &= \frac{1}{2}|OA|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\sin x \\ S_{\measuredangle OAB} &= \frac{\pi |OA|^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{2}\cos^2 x < \frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} \\ &\text{т.к. } 0 < x \Rightarrow \\ &\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \end{aligned}\right.$$

т.к. ф-ии чётные, это верно при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x = 0}$$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x|$$

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon \quad \text{при } 0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ | первый замечательный предел.

Перейдём к пределу при $x \to 0$ в нер-ве $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$\lim (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim \sin x \cdot \lim \sin x = 1 \Rightarrow 1 \le \lim \frac{\sin x}{x} \le 1 \Rightarrow$$

Второй замечательный предел.

Теорема. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ возр. и огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Док-во. $\forall x > 0 \quad \exists\, n = n(x) : \quad n \le x < n+1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Переходим к пределу при $n\to\infty$, $x\to+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Следствие 1. Если $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = y \to \infty$, $x \to a$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{y} = e. \quad \blacktriangleright$$

Следствие 2. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to a} \left\{ 1 + \alpha(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$, $x \to a$

$$\lim_{x\to a} \left\{ 1 + \alpha(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{x\to a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = e. \quad \blacktriangleright$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Док-во. $\forall x>0 \quad \exists\, n=n(x):\ n\le x< n+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Переходим к пределу при $n\to\infty$, $x\to+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

43

Продолжение

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределенности вида $[1^\infty]$.

Пример . Вычислить $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x}{x+1}-1\right)\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{x+1}x}.$$

Положим $y = \dfrac{-1}{x+1}$, $x = -\dfrac{1+y}{y}$, $y \to 0$ при $x \to \infty$

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-(1+y)} = e^{-1}.$$

Другой способ раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$, т. е. вычисления предела при $x \to a$ выражения u^v, где $u \to 1$, $v \to \infty$, основан на преобразовании

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} e^{v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to a} v\ln u}.$$

Сделаем замену $w = u - 1$ и вычислим предел $\lim\limits_{x\to a} v\ln u =$ $= \lim\limits_{x\to a} v\ln(w+1) = \lim\limits_{x\to a} vw\dfrac{\ln(w+1)}{w} = \lim\limits_{x\to a}(vw) = \lim\limits_{x\to a} v(u-1)$, поскольку $w \to 0$ при $x \to a$.Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $u \to 1$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} u^v = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)}$.

Сравнение функций (при данном стремлении аргум.

Для сравнения двух чисел a, b рассматривают их отношение a/b. Для сравнения двух функций $f(x)$, $g(x)$ при $x \to a$ рассматривают $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Определение. Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены в некоторой $\dot{U}(a)$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ наз. беск. малой по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Обозначение: $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$

или : $f = o(g)$, $x \to a$

Замечание: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ - б. м. при $x \to a$

Определение Пусть f(x) и g(x) определены в $\acute{U}(a)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции f(x) и g(x) называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x\to a$. Обозначение: $f \sim g$, $x\to a$.

Пример : $\sin x \sim x$, $x\to 0$.

Теорема (критерий эквивалентности функций)

$$f\sim g,\ x\to a \iff f=g+o(g),\ x\to a$$

Док-во. Пусть $f\sim g$, $x\to a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1 \Rightarrow$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=1+\alpha(x)$, $\alpha(x)$ - б.м. при $x\to a$ $\Rightarrow$

$f(x)=g(x)+\alpha(x)\cdot g(x)=g(x)+o(g(x))$, $x\to a$.

Пусть $f=g+o(g)$, $x\to a$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left\{1+\frac{o(g)}{g}\right\}=1 \Rightarrow f\sim g,\ x\to a \ \blacksquare$$

список функций, эквивалентных x при $x \to 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim$$

$$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0).$$

Замечание. менять б.м. на эквивалентные или в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

Пример. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$

$\ln(1+x) \sim x$
$\ln(1-x) \sim -x$ $\quad x \to 0$

Если заменить, то $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{x^2} = 0$, но

$A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1.$