

ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ

2 кафедра

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

по учебной дисциплине

«Электроника, электротехника и схемотехника»

**Тема № 4 Режим негармонических воздействий в
линейных электрических цепях**

**Занятие № 17 «Расчет временных характеристик
линейных электрических цепей»**

Санкт-Петербург

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Анализ временных характеристик линейных электрических цепей.
2. Контроль усвоения изученного материала.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бабкова Л.А., Киселев О.Н. Методические рекомендации к практическим занятиям и руководство к лабораторным работам по дисциплине «Основы теории цепей»: Учеб.пособие.– СПб.: ВАС, 2011.
2. Улахович Д.А. Основы теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009.

1. Анализ временных характеристик линейных электрических цепей.

Задача 1

Найти импульсную и переходную характеристики электрического фильтра нижних частот с максимально плоской АЧХ, если известна передаточная функция:

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}.$$

1. Определим изображение переходной характеристики

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p} H(p).$$

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p(p^2 + \sqrt{2}p + 1)}.$$

2. Определим изображение импульсной характеристики:

$$\bar{g}(p) = H(p).$$

Таким образом изображение импульсной характеристики будет иметь вид:

$$\bar{g}(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}.$$

Воспользовавшись таблицей соответствий определяем графическое изображение переходной и импульсной характеристик:

Переходная характеристика

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p(p^2 + \sqrt{2}p + 1)} \longrightarrow \frac{A}{p(p^2 + \alpha_1 + \alpha_2)}$$

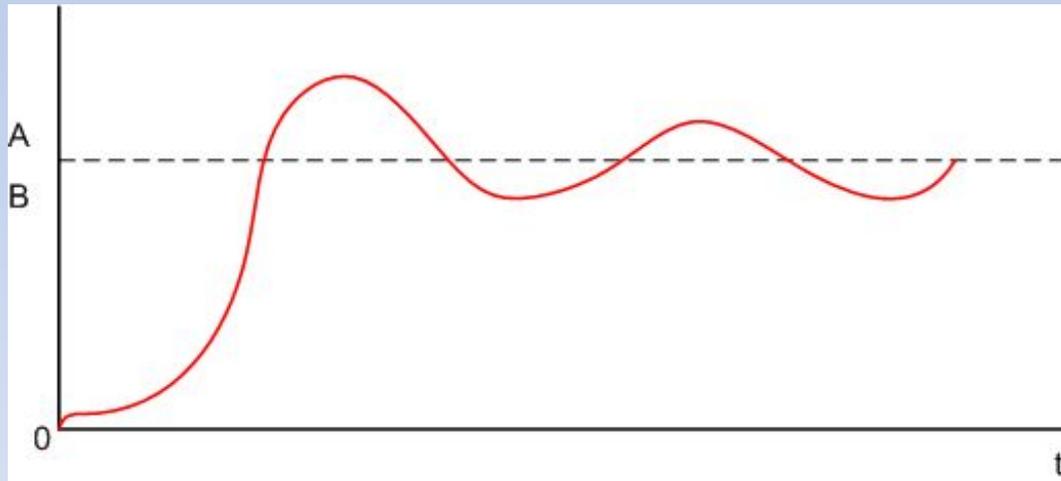
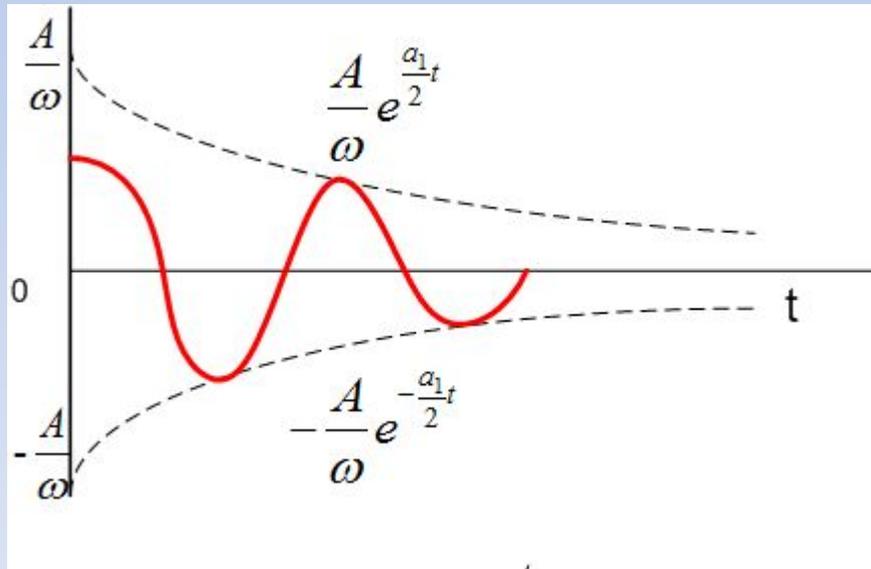


Рис1 . График $f(t)$

Импульсная характеристика

$$\bar{g}(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \quad \longrightarrow \quad \frac{A}{p^2 + \alpha p + \omega^2}$$



Задача 2

Найти импульсную и переходную характеристики цепи, если известна ее передаточная функция:

$$H(p) = \frac{181,8p}{p^2 + 1091p + 1,818 \cdot 10^6}$$

1. Определим изображение переходной характеристики

$$h(p) = \frac{1}{p} H(p)$$

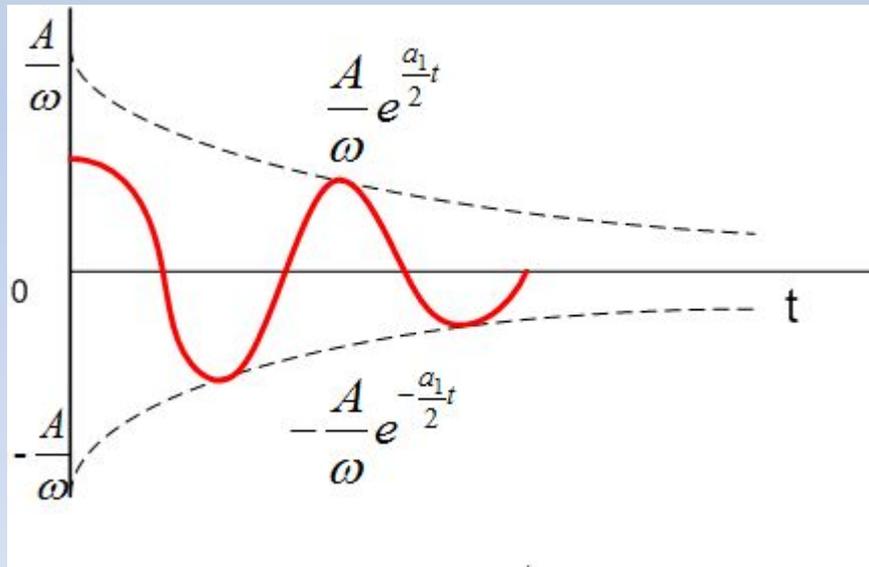
2. Определим изображение импульсной характеристики:

$$\bar{g}(p) = H(p).$$

$$\bar{g}(p) = \frac{181,8p}{p^2 + 1091p + 1,818 \cdot 10^6}$$

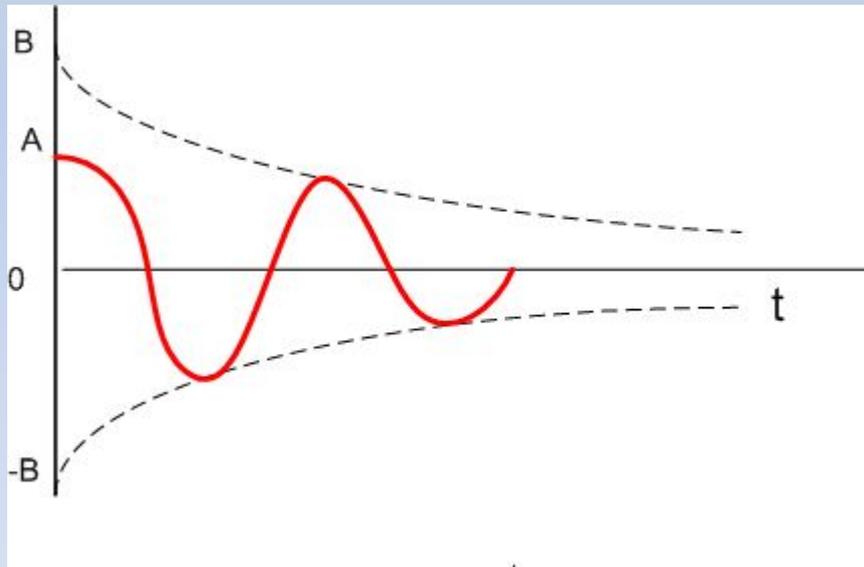
Переходная характеристика

$$h(p) = \frac{181,1}{p^2 + 1091p + 1,818 \cdot 10^6} \quad \longrightarrow \quad \frac{A}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2}$$



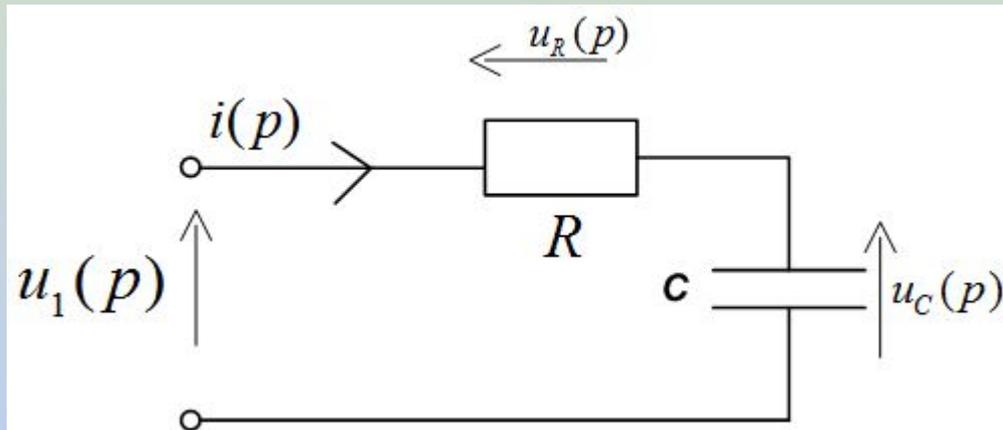
Импульсная характеристика

$$\bar{g}(p) = \frac{181,8p}{p^2 + 1091p + 1,818 \cdot 10^6} \longrightarrow \frac{Ap}{p^2 + \alpha p + \omega_0^2}$$



Задача 3

Определить переходные и импульсные характеристики цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов R и C.



1. Найдем передаточные функции данной цепи для представленных реакций:

$$H_1(p) = \frac{\overline{u_C(p)}}{\overline{u_1(p)}}; \quad H_2(p) = \frac{\overline{u_R(p)}}{\overline{u_1(p)}}.$$

2. Найдем значение реакции на элементах С и R.

$$\bar{u}_c(p) = \bar{i}(p) \frac{1}{pC} = \frac{\bar{u}_1(p)}{R + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{\bar{u}_1(p)}{pRC + 1};$$

$$\bar{u}_R(p) = \bar{i}(p)R = \frac{\bar{u}_1(p)}{R + \frac{1}{pC}} \cdot R = \frac{\bar{u}_1(p)pRC}{pRC + 1}.$$

3. Передаточная функция в операторной форме:

$$H_1(p) = \frac{1}{pRC + 1}; \quad H_2(p) = \frac{pRC}{pRC + 1}.$$

4. Найдем изображения переходных характеристик:

$$\bar{h}_C(p) = \frac{H_1(p)}{p} = \frac{1}{p(pRC + 1)} = \frac{\frac{1}{RC}}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)};$$

$$\bar{h}_R(p) = \frac{H_2(p)}{p} = \frac{RC}{pRC + 1} = \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}.$$

4. Изображение импульсных характеристик находим по соотношению:

$$\overline{g}(p) = H(p)$$

$$\overline{g}_C(p) = H_1(p) = \frac{1}{pRC + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{p + \frac{1}{RC}};$$

$$\overline{g}_R(p) = H_2(p) = \frac{pRC}{pRC + 1} = 1 - \frac{1}{pRC + 1} = 1 - \frac{\frac{1}{RC}}{p + \frac{1}{RC}}.$$

Спасибо за внимание!

Допустим, что к цепи приложено ступенчатое воздействие $x(t) = A \cdot 1(t)$, изображение которого является функция $\frac{A}{p}$.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ A & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

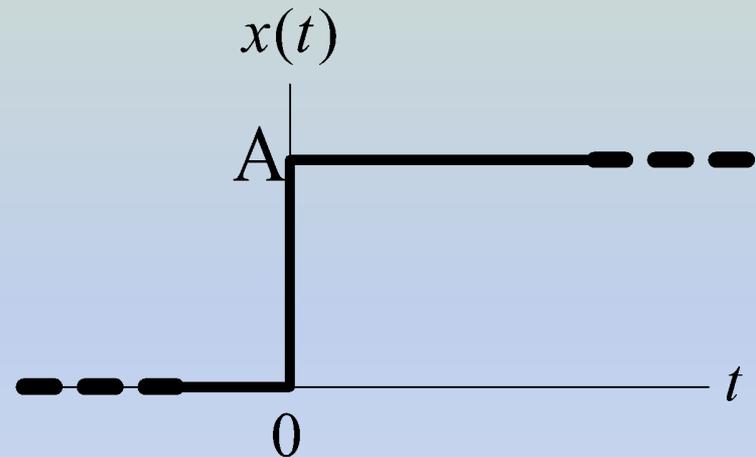


Рис. 1. Ступенчатое воздействие

Тогда операторная передаточная функция будет иметь вид:

$$H(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{x}(p)} = \frac{\bar{y}(p)}{\frac{A}{p}} = p \frac{\bar{y}(p)}{A}. \quad (10)$$

Осуществляя L -преобразование выражения (7), т.е. найдем L -изображение переходной характеристики. В силу свойства линейности преобразования Лапласа получаем:

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p} T(p). \quad (11)$$

Это выражение совпадает со вторым сомножителем правой части (10) и, следовательно, между операторной передаточной функцией и изображением переходной характеристики $\bar{h}(p)$ имеется следующая взаимосвязь:

$$H(p) = p\bar{h}(p); \quad (12)$$

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p} T(p). \quad (13)$$

Аналогично установим связь между $H(p)$ и изображением импульсной характеристики $\bar{g}(p)$:

$$\bar{g}(p) = \frac{y(t)}{S_u};$$

Если же на цепь подается импульсное воздействие $x(t) = S_u \delta(t)$, изображение которого $\bar{x}(p)$ равно S_u , то операторная передаточная функция, соответствующая этому воздействию, имеет вид:

$$H(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{x}(p)} = \frac{\bar{y}(p)}{S_u}. \quad (14)$$

Это выражение совпадает с функцией изображения импульсной характеристики цепи. Следовательно,

$$\bar{g}(p) = H(p). \quad (15)$$

Рассмотрим связь между переходной и импульсной характеристиками цепи. Не трудно заметить, что их изображения связаны соотношением

$$\bar{g}(p) = p\bar{h}(p).$$

Проведя тождественное преобразование последнего равенства (прибавив $[h(0) + h(0)]$) получим:

$$\bar{g}(p) = p\bar{h}(p) - h(0) + h(0).$$

Поскольку $ph(p) - h(p)$ представляет собой изображение произвольной переходной характеристики, то исходное равенство можно представить в виде

$$\bar{g}(p) = h(0) + L\{h'(t)\}.$$

Переходя в область оригиналов, получаем формулу, позволяющую определить импульсную характеристику цепи по известной ее переходной характеристике, $g(t) = h(0)\delta(t) + h'(t)$.

Если $h(0) = 0$, то $g(t) = h'(t)$.

Обратное соотношение между указанными характеристиками имеет вид:

$$h(t) = \int_0^t g(t)dt. \quad (15)$$

3. Связь между временными и частотными характеристиками цепи

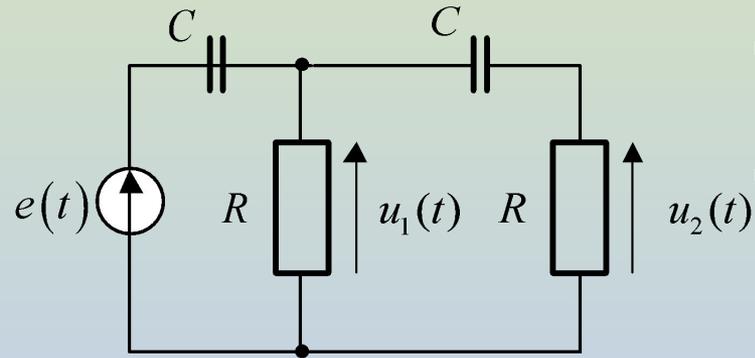


Рис. 5. Схема RC-цепи

Для данной цепи определить операторную передаточную функцию и найти выражения для ее частотных характеристик

$$H(p) = \frac{\bar{u}_2(p)}{\bar{e}(p)}.$$

Изображение реакции $\bar{u}_2(p)$ определим из системы узловых уравнений, составленных для L-изображений узловых напряжений $\bar{u}_1(p); \bar{u}_2(p)$:

$$(2pC + G)u_1(p) - pCu_2(p) = pCe(p);$$

$$-pCu_1(p) + (pC + G)u_2(p) = 0.$$

Отсюда

$$\bar{u}_2(p) = \frac{\bar{e}(p)p^2}{p^2 + 3p\frac{G}{C} + \frac{G^2}{C^2}};$$

$$H(p) = \frac{p^2}{p^2 + 3p\alpha + \alpha^2}$$

где для упрощения записи введено обозначение $\alpha = \frac{G}{C}$.

Для нахождения комплексной передаточной функции положим в последнем выражении $p = j\omega$. Тогда

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2) + j3\alpha\omega}.$$

АЧХ определяется модулем полученной функции, а ФЧХ находим как аргумент $H(j\omega)$.

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2) + 9\alpha^2\omega^2}} \quad \Theta(\omega) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{3\alpha\omega}{(\alpha^2 - \omega^2)}$$

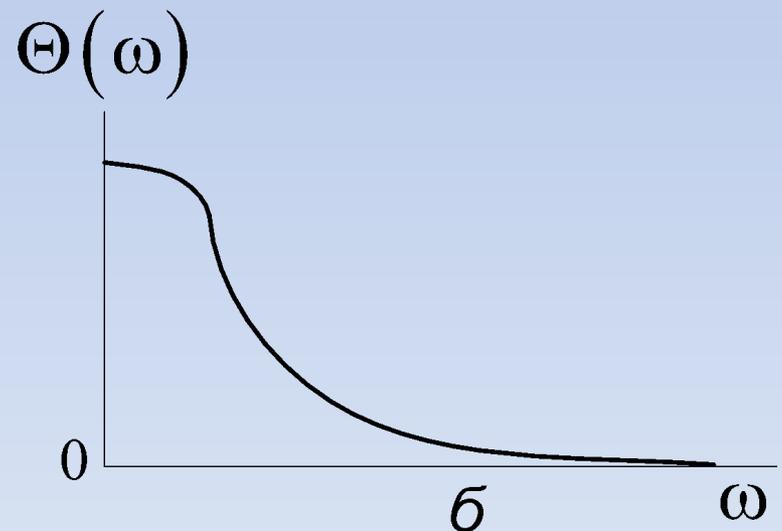
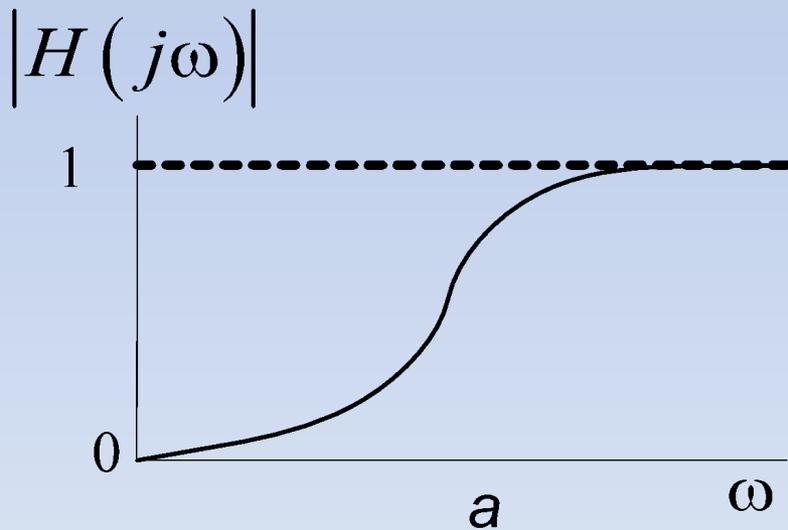
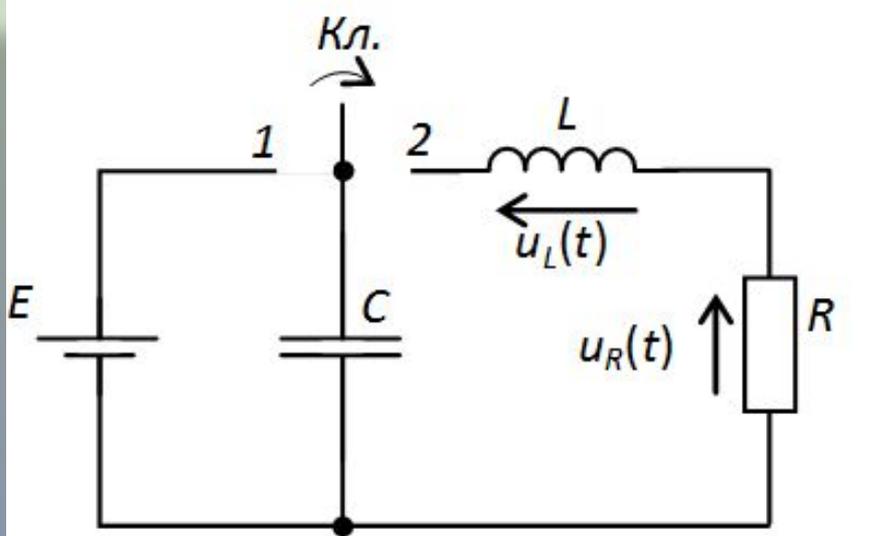


Рис. 6. Графики частотных характеристик RC -цепи: а – АЧХ, б – ФЧХ

ВЫВОДЫ:

1. Передаточная функция является L -изображением импульсной характеристики.
2. Передаточная функция является дробно-рациональной функцией с вещественными коэффициентами.
3. Полюсы устойчивой передаточной функции лежат в левой p -полуплоскости.
4. Степени полиномов числителей передаточной функции и квадрата АЧХ не превышают степеней полиномов знаменателей; при невыполнении этого свойства АЧХ на бесконечно больших частотах ($\omega \rightarrow \infty$) должна принимать бесконечно большое значение, поскольку числитель в этом случае растёт быстрее знаменателя.
5. Частотные характеристики цепи вычисляются по передаточной функции при $p = j\omega$.
6. Квадрат АЧХ является чётной рациональной функцией переменной с вещественными коэффициентами: $|H(j\omega)|^2 = |H(-j\omega)|^2$.
7. По передаточной функции можно изобразить схему цепи.

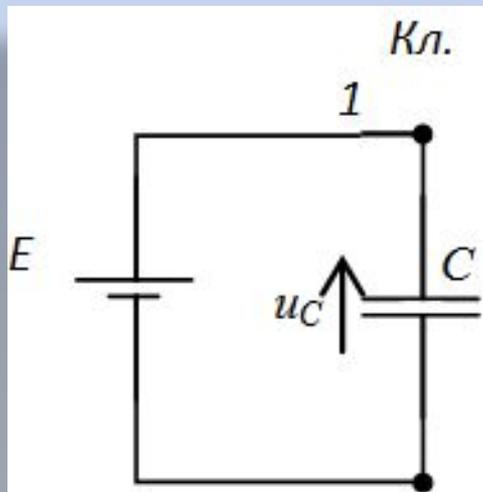
Вопрос №1 а. Свободные колебания в последовательном колебательном контуре.



В момент $t=0$ произошла коммутация, т.е. ключ (Кл.) из положения 1 перешел в положение 2.

Заряженная емкость оказалась подключенной к RL-цепи.

Рассмотрим процессы происходящие в представленной цепи **до коммутации**



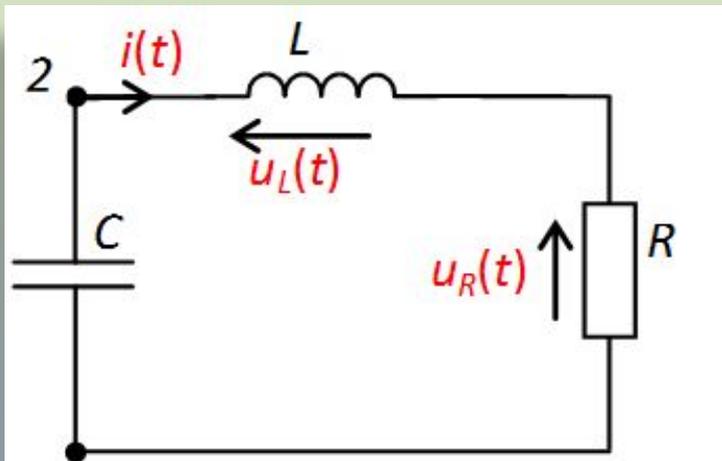
До коммутации емкость C была подключена параллельно источнику постоянного напряжения E , (ключ (Кл.) находился в положении 1).

Напряжение на емкостях равнялось E .

$$u_C(+0) = u_C(-0) = E;$$

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0.$$

Рассмотрим процессы происходящие в цепи **после коммутации**

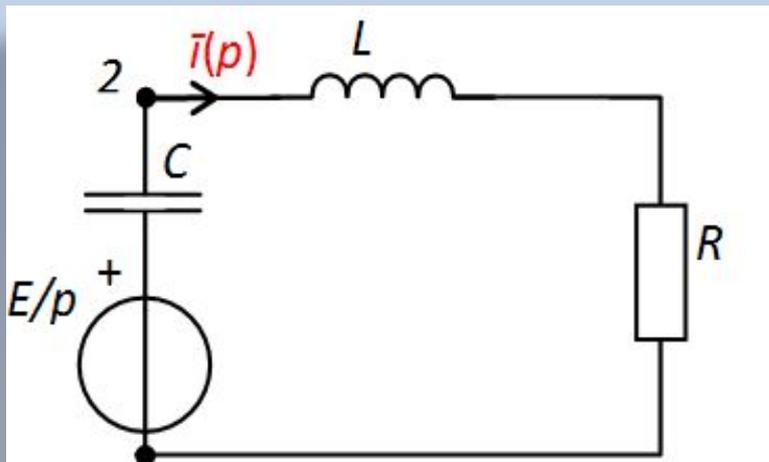


Учитывая, что напряжение на емкости скачком измениться не может, в соответствии с законом коммутации имеем:

$$u_C(+0) = u_C(-0) = E$$

Начальные условия **НЕНУЛЕВЫЕ**

Рассмотрим схему замещения цепи для момента времени



По закону Ома в операторной форме, определим изображение реакции:

$$\bar{i}(p) = \frac{\frac{E}{p}}{pL + R + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

где: $\delta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания контура;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - круговая частота собственных колебаний контура без потерь.

При анализе свободных и переходных колебаний в сложных цепях изображение реакции $\bar{y}(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию переменного p с вещественными коэффициентами, которую можно записать в виде отношения двух полиномов:

$$\bar{y}(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + b_{m-2} p^{m-2} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_0}$$

По основной теореме алгебры полином степени n может быть разложен на n простых сомножителей, т.е.:

$$N(p) = (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n),$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ – корни полинома $N(p)$ или **полюсы функции** $\bar{y}(p)$.

Полином также можно представить в виде произведения m сомножителей:

$$M(p) = (p-p_{01})(p-p_{02})(p-p_{03})\dots(p-p_{0m}).$$

где $p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{0m}$ – корни полинома $M(p)$ или **нули функции** $\bar{y}(p)$.

В силу вещественности коэффициентов a_i и b_i нули и полюсы изображения $\bar{y}(p)$ могут быть вещественными и (или) комплексно-сопряженными.

Ясно, что дислокация полюсов $\bar{y}(p)$ определяет характер свободных и переходных колебаний в анализируемой цепи.

Рассмотрим уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2$$

Оно имеет два корня, (**полюсы изображения**): $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

В силу вещественности коэффициентов данного уравнения (δ , ω), полюсы могут быть вещественные и комплексно-сопряженные.

Поэтому при анализе свободных колебаний в последовательном контуре возможны три режима колебаний.

1. Режим затухающих гармонических колебаний.

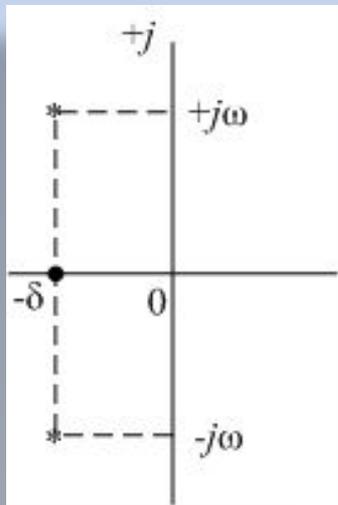
Корни уравнения комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_1$$

такой характер корней имеет место при $\delta < \omega_0$

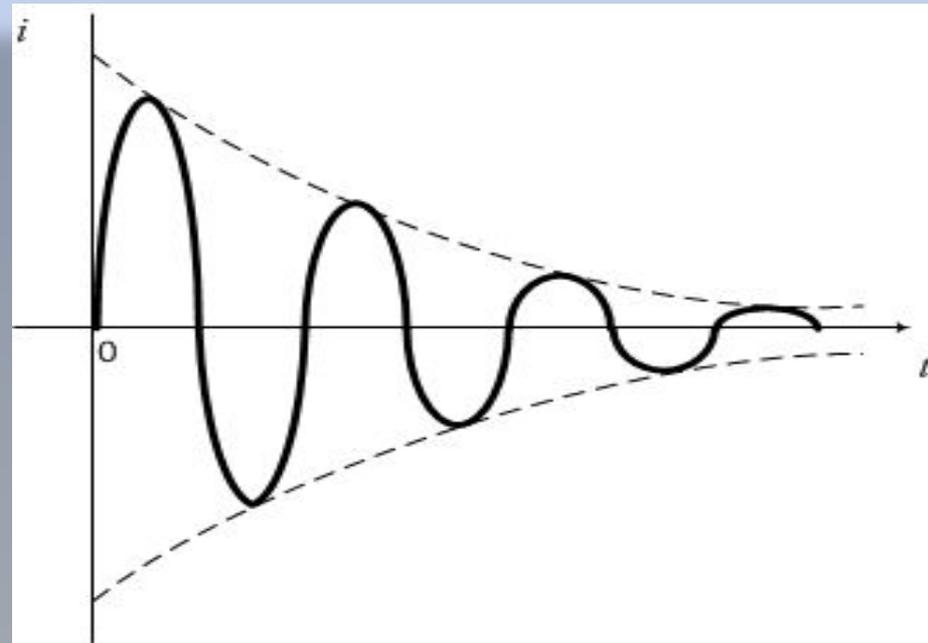
$$\text{или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

где: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.



Оригинал для тока в этом случае будет:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_1 L} e^{-\delta t} \sin \omega_1 t,$$



Амплитуда колебания убывает во времени по экспоненциальному закону, поэтому процесс называют затухающим. Скорость убывания амплитуды свободных колебаний определяется значением коэффициента затухания δ .

Частоту: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}$ называют частотой собственных

затухающих колебаний контура. Она, как видно из формулы, всегда меньше частоты собственных незатухающих колебаний контура ω_0 и зависит не только от значений индуктивности и емкости контура, но и от значения его резистивного сопротивления.

Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Коэффициент затухания связан с добротностью контура соотношением:

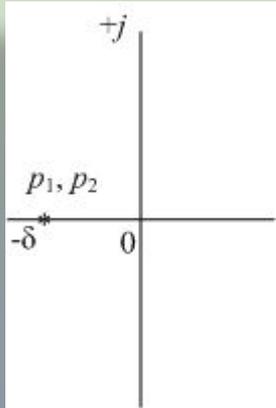
$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_0}{2Q}.$$

где: $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ - добротность последовательного контура.

Таким образом, колебания в контуре убывают тем медленнее, чем выше его добротность.

2. Критический режим гармонических колебаний.

Корни уравнения вещественные кратные:

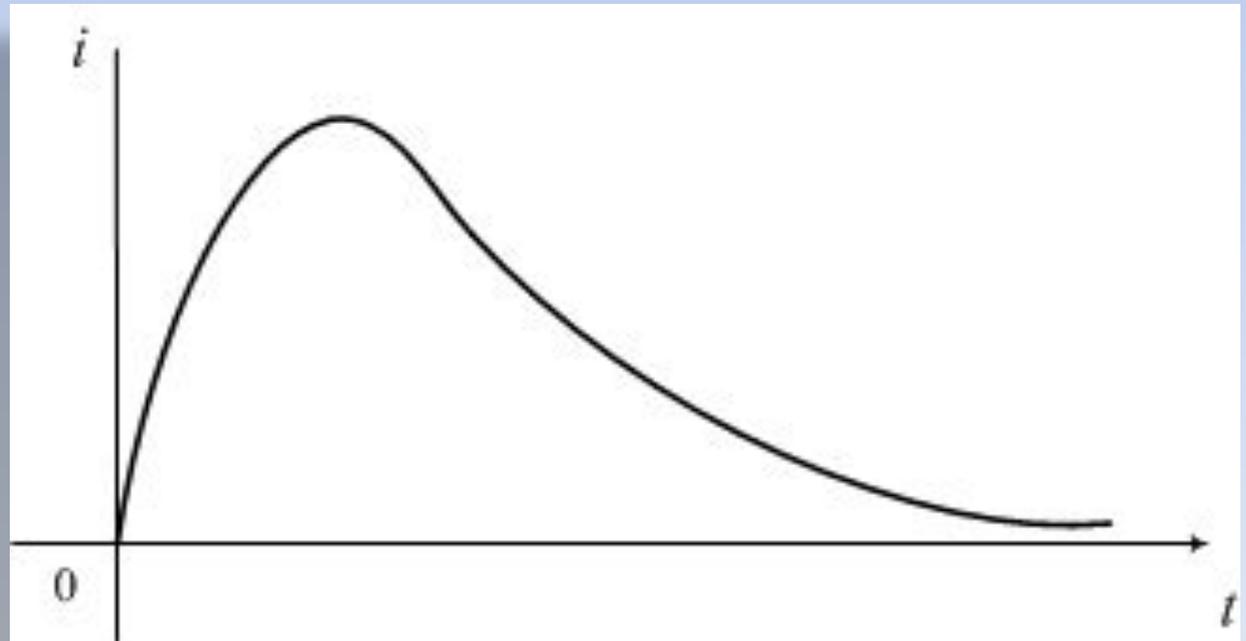


$$p_1 = p_2 = -\delta, \quad \text{т.е.} \quad \omega_0 = \delta; \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Режим колебания в контуре, соответствующий кратным корням характеристического уравнения (полюсами изображения), может рассматриваться как предельный случай колебательного режима, когда частота собственных затухающих колебаний в контуре $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ равна нулю, а период колебаний становится бесконечно большим.

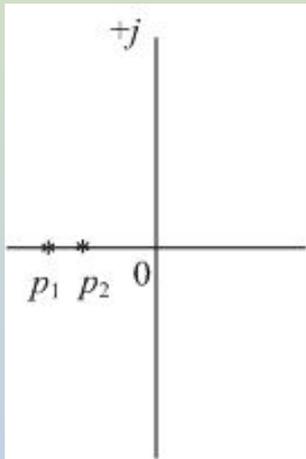
Оригинал $i(t)$, соответствующий данному расположению полюсов изображения, имеет вид:

$$i(t) = \frac{E_0}{L} t e^{-\delta t}$$



3. Аperiodический режим гармонических колебаний.

Корни уравнения вещественные кратные:



$$p_{1,2} = -\delta \pm \beta,$$

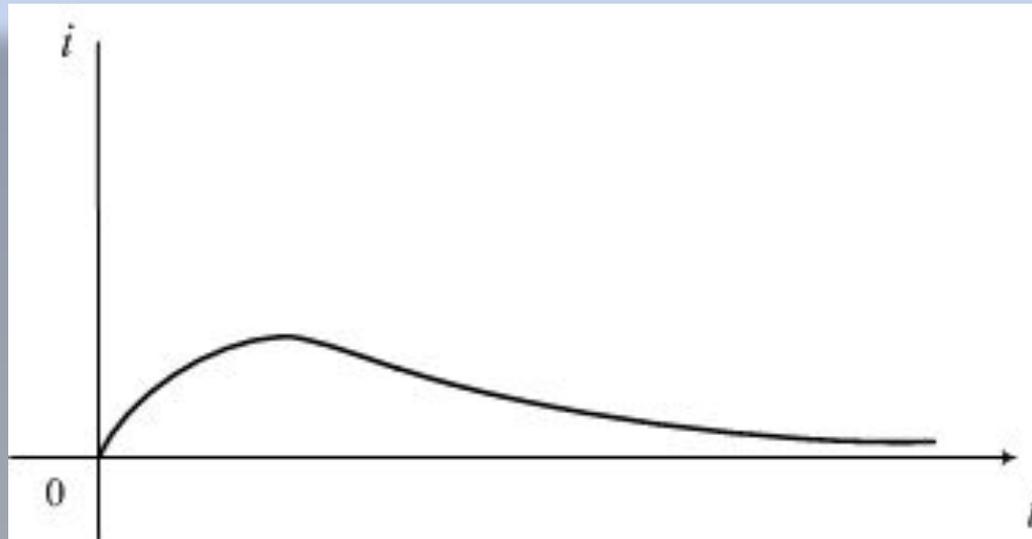
где: $\beta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$; $\beta < \delta$.

Первичные параметры контура должны удовлетворять неравенству:

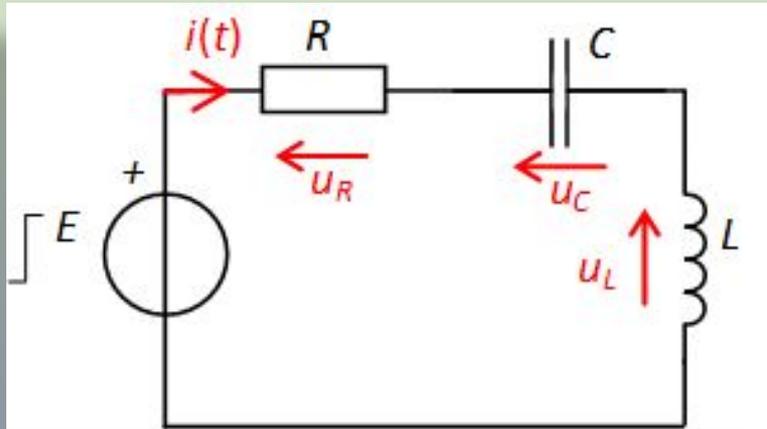
$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Оригинал $i(t)$, соответствующий данному расположению полюсов изображения, имеет вид:

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} e^{-p_1 t} - \frac{E}{L(p_1 - p_2)} e^{p_2 t}$$



Вопрос №1 б. Переходные колебания в последовательном колебательном контуре.



Начальные условия **НУЛЕВЫЕ**

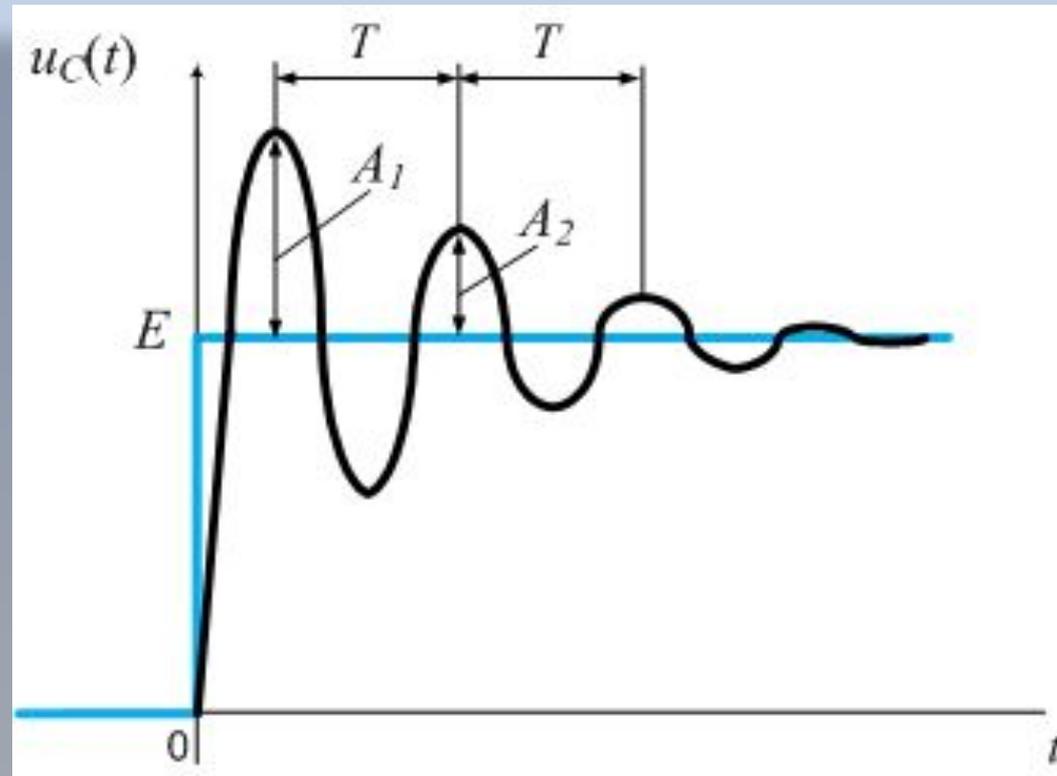
$$\bar{i}(p) = \frac{\frac{E}{p}}{pL + R + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2};$$

$$\bar{u}_C(p) = \bar{i}(p) \frac{1}{pC} = \frac{LC}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)}.$$

По таблице соответствий:

$$\bar{u}_C(t) = E - Ee^{-\delta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\delta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

Напряжение на емкости контура при $t \rightarrow \infty$ стремится к установившемуся значению, равному напряжению источника. Следовательно, емкость при $t \rightarrow \infty$ заряжается до напряжения E . Процесс заряда при комплексно-сопряженных полюсах изображения имеет колебательный характер.



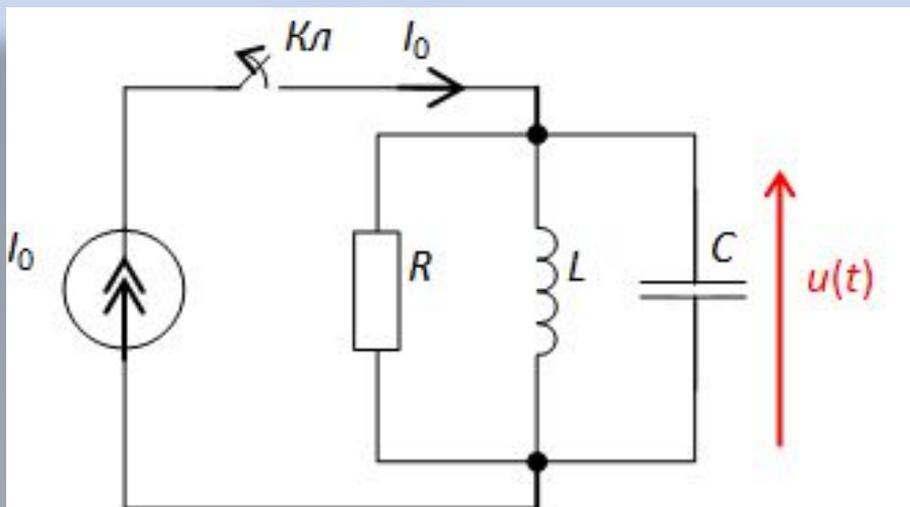
Значение $u_C(t)$ в отдельные моменты времени превышают значения напряжения при большой добротности может почти вдвое превосходить ЭДС источника.

При $t \rightarrow \infty$ значения тока в контуре, напряжений на резистивном элементе и на индуктивности контура стремятся к нулю, а напряжение на емкости - к ЭДС источника. Следовательно, цепь переходит в режим постоянного тока. Процесс установления колебаний происходит тем медленнее, чем выше добротность контура. Для оценки времени установления можно воспользоваться полученной ранее формулой:

$$t_y = \frac{3 \div 4,6}{\delta},$$

что соответствует промежутку времени, по истечении которого амплитуда напряжения $u_C(t)$ отклоняется от установившегося значения не более чем на 0,05 или 0,01.

Вопрос №2 Свободные и переходные колебания в параллельном колебательном контуре.

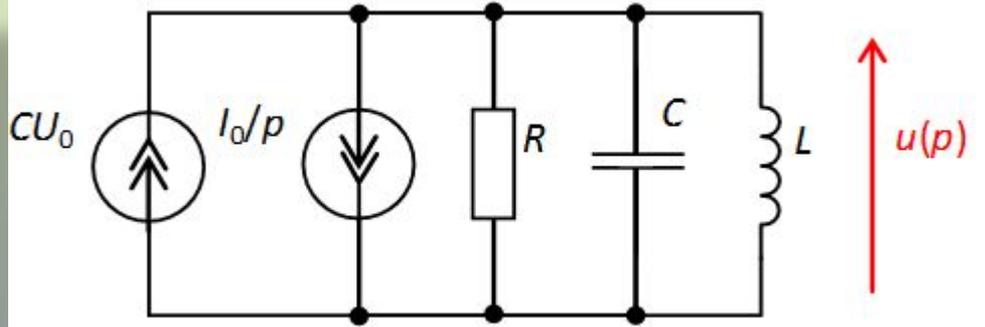


2.1 Свободные колебания в ПрКК

Начальные условия **НЕНУЛЕВЫЕ**

$$i_L(+0) = i_L(-0) = I_0$$

$$u_C(+0) = u_C(-0) = u_0$$



$$\bar{u}(p) = \frac{Cu_0 - \frac{I_0}{p}}{pC + G + \frac{1}{pL}} = \frac{u_0 p - \frac{I_0}{C}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

где: $\delta = \frac{G}{2C}$ - коэффициент затухания контура;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - частота собственных колебаний контура без потерь.

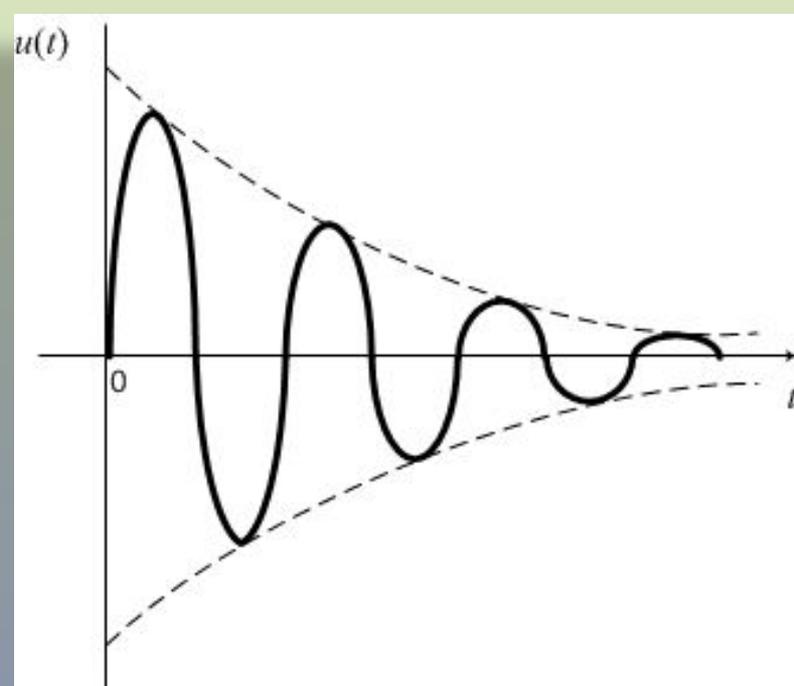
1. Режим затухающих гармонических колебаний.

Первичные параметры контура в этом случае должны удовлетворять неравенству:

$$\frac{G}{2C} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Закон изменения напряжения на контуре в соответствии с таблицей соответствий определяется выражением:

$$u(t) = e^{-\delta t} \left[u_0 \cos \omega_1 t - \frac{I_0 + u_0 \delta}{\omega_1 C} \sin \omega_1 t \right]$$



Анализ полученного решения показывает, что колебания носят затухающий характер, причем амплитуда колебания убывает по экспоненциальному закону. Чем больше коэффициент затухания, тем быстрее затухают колебания. Как и в последовательном контуре, частота свободных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}$$

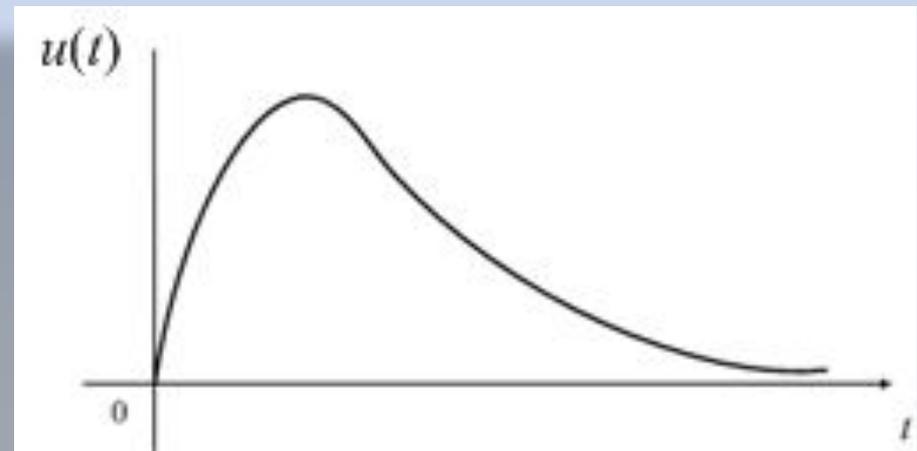
всегда меньше частоты собственных незатухающих колебаний контура

2. Критический режим гармонических колебаний.

Такой характер корней имеет место при $\delta = \omega_0$, когда между первичными параметрами контура выполняется соотношение:

$$\frac{G}{2C} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$u(t) = \left[u_0 - \left(\frac{I_0}{C} + u_0 \delta \right) t \right] e^{-\delta t}$$



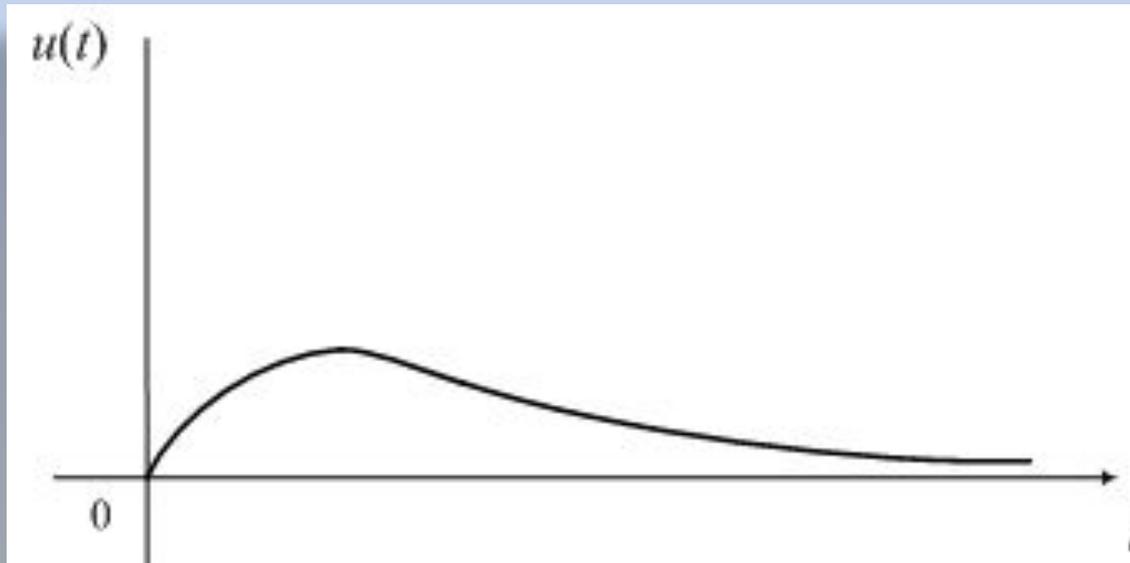
3. Аperiodический режим гармонических колебаний.

Этот случай возможен при условии $\delta = \omega_0$, что соответствует следующему соотношению между первичными параметрами контура:

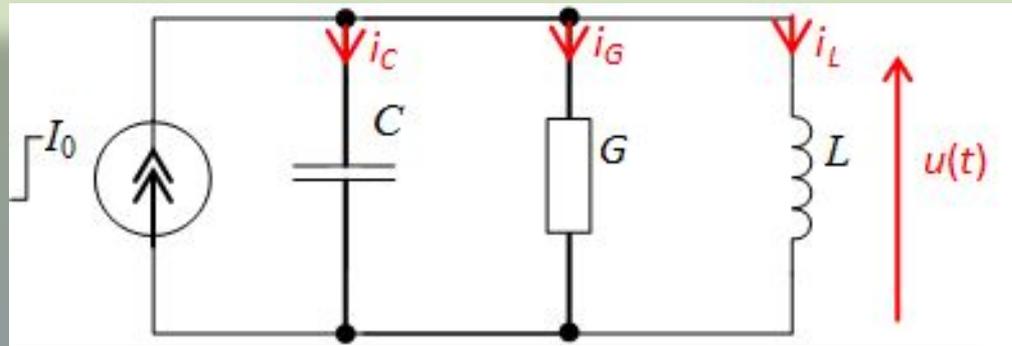
$$G > 2\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$u(t) = \frac{\frac{I_0}{C} - u_0 p_1}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{\frac{I_0}{C} - u_0 p_2}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}$$

Следует заметить, что при $G=0$ колебания в контуре носят незатухающий характер, так как контур не рассеивает энергию.



2.2 Переходные колебания в ПрКК



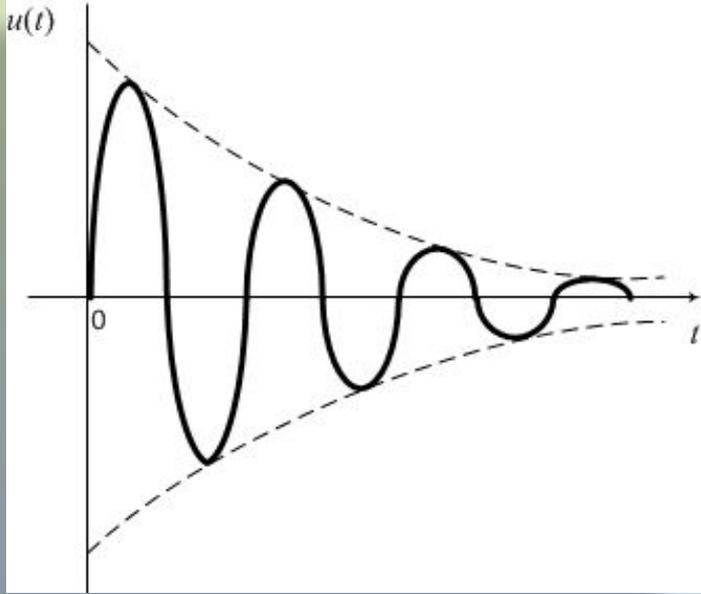
Используя закон Ома в операторной форме, найдем изображения для всех реакций:

$$\bar{u}(p) = \frac{\frac{I}{p}}{pC + G + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{I}{C}}{p^2 + \frac{G}{C}p + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{I}{C}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2};$$

$$\bar{i}_G(p) = \bar{u}(p)G = \frac{\frac{I}{C}G}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2};$$

$$\bar{i}_L(p) = \frac{\bar{u}(p)}{pL} = \frac{\frac{I}{LC}}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)};$$

$$\bar{i}_C(p) = \bar{u}(p)pC = \frac{Ip}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}.$$



Закон изменения напряжения в параллельном колебательном контуре аналогичен закону изменения тока в последовательном контуре.

Определим временную зависимость тока $i_C(t)$.

$$i_C(t) = I e^{-\delta t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\delta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

Так как при $t=0$ напряжение на емкости было равно нулю, то для этого момента времени следует считать зажимы емкости замкнутыми накоротко. Следовательно, в момент $t=+0$ весь ток I протекал через емкость $(i_C(+0))=I$. При $t \rightarrow \infty$ цепь переходит в режим постоянного тока, при котором $u(\infty)=0$, $i_L(\infty)=I$, $i_G(\infty)=i_C(\infty)=0$. Чем ниже добротность (больше затухание) контура, тем быстрее заканчивается переходный процесс.

