# Методы разложения многочленов на множители.

**«Мало иметь хороший ум, главное – хорошо его применять».**

Р.Декарт.

# Методы разложения многочленов на множители.

- Вынесение множителя за скобку
- Использование формул сокращённого умножения
- Способ группировки
- Метод выделения полного квадрата
- Схема Горнера
- Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

# Вынесение множителя за скобку.

Из распределительного закона непосредственно следует, что

$$ac + bc = c(a + b).$$

Этим можно воспользоваться для вынесения множителя за скобки.

***Пример:***

Разложить многочлен на множители $12y^3 – 20y^2$.

*Решение*

Имеем: $12y^3 – 20y^2 = 4y^2 \cdot 3y – 4y^2 \cdot 5 = 4y^2(3y – 5)$.

*Ответ*.

4y2(3y – 5).

# Использование формул сокращённого умножения.

Вспомните эти формулы:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

***Пример:***

Разложить на множители многочлен $x^4 – 1$.

*Решение*

Имеем: $x^4 – 1 = (x^2)^2 – 1^2 = (x^2 – 1)(x^2 + 1) = (x^2 – 12)(x^2 + 1) = (x + 1)(x – 1)(x^2 + 1)$.

*Ответ*. $(x + 1)(x – 1)(x^2 + 1)$.

# Способ группировки.

Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов.

***Пример:***

Разложить на множители многочлен $x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2$.

*Решение*

$x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2 =$

$= (x^3 - 3x^2y) - (4xy - 12y^2) =$

$= x^2(\underline{x - 3y}) - 4y(\underline{x - 3y}) =$

$= (x - 3y)(x^2 - 4y).$

*Ответ.* $(x - 3y)(x^2 - 4y)$.

# Метод разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

***Пример:***

Разложить на множители квадратный трехчлен $x^2-6x+5$

*Решение*

$x^2-6x+5=$

(решим уравнение: $x^2-6x+5=0$, по т. Виета $x=5$, $x=1$)

$=(x-5)(x-1)$

*Ответ.* $(x-5)(x-1)$.

**Пример 6.** Разложить на множители многочлен $16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4$.

$$16x^7 – 72x^6 + 108x^5 – 54x^4 =$$

$$= 2x^4 (8x^3 – 36x^2 – 54) =$$

$$= 2x^4 (\underline{(2x)^3}\ \underline{- 3 \cdot (2x)^2}\ \underline{\cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2}\ \underline{- 3^3})$$

$$=2x^4 (2x- 3)^3$$

**Пример 1.** Разложить на множители многочлен

$$2x^2 - 5xy + 2y^2.$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 2x(x - 2y) - y(x - 2y) =$$
$$= (x - 2y)(2x - y).$$

Многочлен $p(x; y)$ называют **однородным многочленом $n$-й степени**, если сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена равна $n$. Если $p(x; y)$ — однородный многочлен, то уравнение $p(x; y) = 0$ называют **однородным уравнением.**

Приведем примеры

**Пример 4.** Решить уравнение $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$.

(0; 0) является решением однородного уравнения.

$$x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0 \quad \Big| \; x^3$$

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0. \qquad z = \frac{y}{x}$$

$$1 + 4z^2 - 5z^3 = 0$$

$$5z^3 - 4z^2 - 1 = 0;$$

$$(5z^3 - 5z^2) + (z^2 - 1) = 0;$$

$$5z^2(z - 1) + (z - 1)(z + 1) = 0;$$

$$(z - 1)(5z^2 + z + 1) = 0.$$

$$z - 1 = 0$$

$$z = 1$$

$$\frac{y}{x} = 1 \quad y = x.$$

$$5z^2 + z + 1 = 0$$

D=1-4*5*1=-19-нет корней

*Ответ*: $(t;\ t)$, где $t$ — любое действительное число.

Теорема 4. *Пусть все коэффициенты многочлена $p(x)$ — целые числа. Если целое число $a$ является корнем многочлена $p(x)$, то $a$ — делитель свободного члена многочлена $p(x)$.*

**Пример 7.** Разложить на множители многочлен

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24.$ $p(1) = 12 \neq 0,\ p(-1) = 30 \neq 0,\ p(2) = 0.$

$x = 2$ — корень многочлена $p(x)$

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)q(x)$$

$$\begin{array}{r} p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \\ -\ p(2) = 2^3 - 3\cdot2^2 - 10\cdot2 + 24 \\ \hline \end{array}$$

$$p(x) - p(2) = (x^3 - 2^3) - 3(x^2 - 2^2) - 10(x - 2).$$

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 3(x - 2)(x + 2) - 10(x - 2) =$$

$$= (x - 2)((x^2 + 2x + 4) - 3(x + 2) - 10) = (x - 2)(x^2 - x - 12). = (x - 2)(x - 4)(x + 3).$$

$$2x^3 - 5x^2y + 2xy^2 = 0.$$

$$x(2x^2 - 5xy + 2y^2) = 0$$

$x = 0,$

$(0;\ t)$, где $t$ —
любое действительное число

либо $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \mid x^2$

$$2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \qquad z = \frac{y}{x}$$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0,$$

$$z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{2}$$

$\frac{y}{x} = 2$

$y = 2x,$

$(t;\ 2t),$

$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

$x = 2y$

$(2t;\ t)$

*Ответ*: $(0;\ t)$, $(t;\ 2t)$, $(2t;\ t)$, где $t$ — любое действительное число.

Систему уравнений $\begin{cases} p(x;\, y) = a, \\ q(x;\, y) = b \end{cases}$ называют **однородной**, если

$p(x;\, y)$, $q(x;\, y)$ — однородные многочлены одной и той же степени, а $a$ и $b$ — действительные числа.

**Пример 6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^3 + y^3) = 2, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$2(x^3 + y^3) = x^2y + 2xy^2 + y^3$, т. е. $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0$. $x^3$

Если $x = 0$, то $y = 0$; пара $(0;\, 0)$ — решение однородного уравнения. Если $x \neq 0$,

$2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0.$ $z = \frac{y}{x}$ $z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$

$z^2(z - 2) - (z - 2) = 0$; $(z - 2)(z^2 - 1) = 0$; $z_1 = 2,\ z_2 = 1,\ z_3 = -1.$

либо $\frac{y}{x} = 2$, т. е. $y = 2x$, либо $\frac{y}{x} = 1$, т. е. $y = x$, либо

$\frac{y}{x} = -1$, т. е. $y = -x$.

**Пример 6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$y = 2x,\ y = x\quad y = -x$

В итоге приходим к совокупности трех систем, каждая из которых без труда решается методом подстановки:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x, \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y = 2x, \\ x^3 + (2x)^3 = 1 \end{cases}\quad 9x^3 = 1\quad x^3 = \dfrac{1}{9}\quad x^3 = \dfrac{3}{27},\ x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$y = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

Аналогично 2 и 3 система

*Ответ*: $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right); \left(\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}; \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right).$

Теперь поговорим о симметрических многочленах и об использовании их при решении систем уравнений. Многочлен $p(x; y)$ называют **симметрическим**, если он сохраняет свой вид при одновременной замене $x$ на $y$ и $y$ на $x$. Например, симметрическим является двучлен $x^2y + xy^2$. В самом деле, при одновременной замене $x$ на $y$ и $y$ на $x$ получится двучлен $y^2x + yx^2$, но это то же самое, что $x^2y + xy^2$. Другие примеры симметрических многочленов:

$$xy,\ x + y,\ x^2 + y^2,\ x^3 + y^3,\ x^4 + y^4,\ 2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3$$

и т. д.

**Теорема.** ***Любой симметрический многочлен $p(x; y)$ можно представить в виде многочлена от $xy$ и $x + y$.***

Например,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy;$$

$$x^3 + y^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (3x^2y + 3xy^2) =$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y);$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2;$$

$$2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3 =$$

$$= 2xy(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4) + 3(xy)^2 \text{ и т. д.}$$

**Пример 7.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Введем две новые переменные: $x + y = u$, $xy = v$.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

$v = 5 - u.$

$$u^3 - 3u(5 - u) + (5 - u)^3 = 17;$$

$$u^3 - 15u + 3u^2 + 125 - 75u + 15u^2 - u^3 = 17;$$

$$18u^2 - 90u + 108 = 0;$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0; \quad u_1 = 2, u_2 = 3.$$

$$v_1 = 3, v_2 = 2.$$

Осталось решить две простые системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений, из второй находим два решения (1; 2); (2; 1).

*Ответ*: (1; 2); (2; 1).

# Метод неопределенных коэффициентов.

Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения.

***Пример.***

Разложить на множители многочлен $3x^3 - x^2 - 3x + 1$.

*Решение.*

Поскольку многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителей, то будем искать многочлены

$x - p$ и $ax\ 2 + bx + c$ такие, что справедливо равенство

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - p)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - ap)x^2 + (c - bp)x - pc$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных коэффициентов:

$a=3$

$b-ap=-1$

$c-bp=-3$

$-pc=1$.

Решая эту систему, получаем: $a = 3$, $p = -1$, $b = 2$, $c = -1$.

Итак, многочлен $3x^3 - x^2 - 3x + 1$ разлагается на множители:

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(3x^2 + 2x - 1)$.

*Ответ.* $(x - 1)(3x^2 + 2x - 1)$.

# Схема Горнера.

Если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $g(x) = x – c$, то при делении $f(x)$ на $g(x)$ частное $q(x)$ имеет вид:

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

где $b_0 = a_0$, $b_k = cb_{k-1} + a_k$, $k = 1,2, \ldots, n-1$ Остаток $r$ находится по формуле $r = cb_{n-1} + a_n$

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $b_0 = a_0$ | $b_1 = cb_0 + a_1$ | $b_2 = cb_1 + a_2$ | | $b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1}$ | $r = f(c) = cb_{n-1} + a_n$ |

***Пример 1***

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

*Решение.*

По схеме Горнера корнями данного многочлена могут быть числа

$\pm1, \quad \pm2, \quad \pm3,$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | -5 | 6 | 0 |
| 1 | 1 | -1 | 6 | 0 | |
| -2 | 1 | -3 | 0 | | |
| 3 | 1 | 0 | | | |

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = 1$

$x_3 = -2$ $\qquad$ $x_4 = 3$

$x = 1$ – корень кратности 2

Таким образом, разложение данного многочлена на множители имеет вид

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x-1)^2 (x+2)(x-3)$

*Ответ.* $(x-1)^2 (x+2)(x-3)$

# Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.

***Пример:***

$\underline{8x}^4 + \underline{x}^3 + 64x + 8$

*Решение.*

Применим методы группировки, вынесения общего множителя за скобки и формулы сокращенного умножения:

$8x^4 + x^3 + 64x + 8 = x^3 (8x) + 8 (8x + 1) = (8x + 1) (x^3 + 8) = (8x + 1) ( x + 2) ( x^2 – 2x + 4)$

*Ответ.* $8x + 1) ( x + 2) ( x^2 – 2x + 4)$