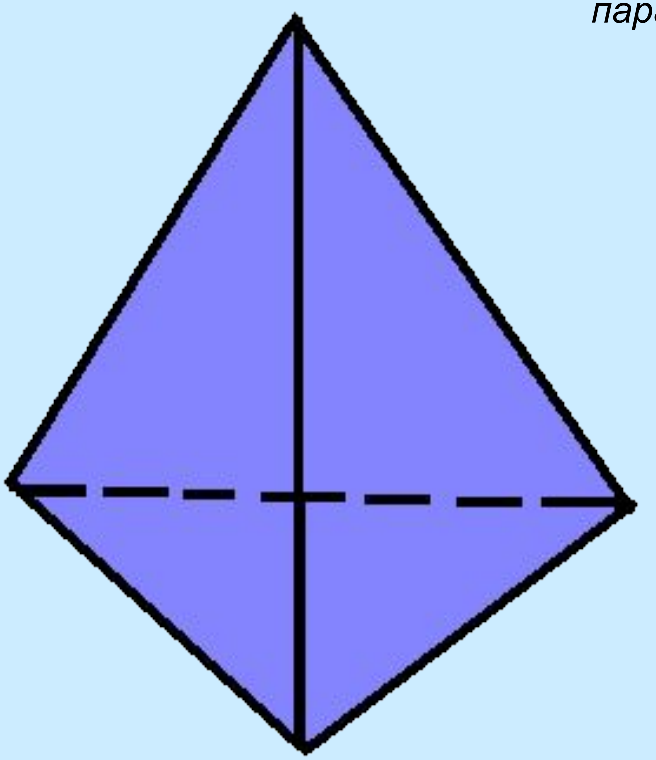
многогранники

Общие сведения о многогранниках

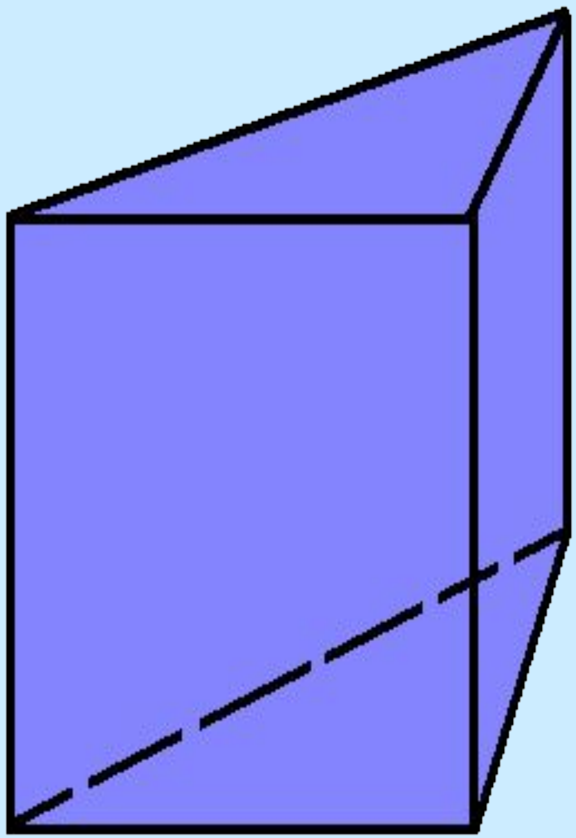
Многогранник - геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники называются гранями, стороны многоугольника - ребрами, вершины многоугольника - вершинами многогранника. Виды многогранников: пирамида, призма, параллелепипед и другие.



Пирамида

Пирамида - многогранник, основанием которого является многоугольник, а боковые грани - треугольники. n-угольная пирамида имеет n+1 граней Пирамида называется правильной, если в основании правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания.

ПРИЗМА

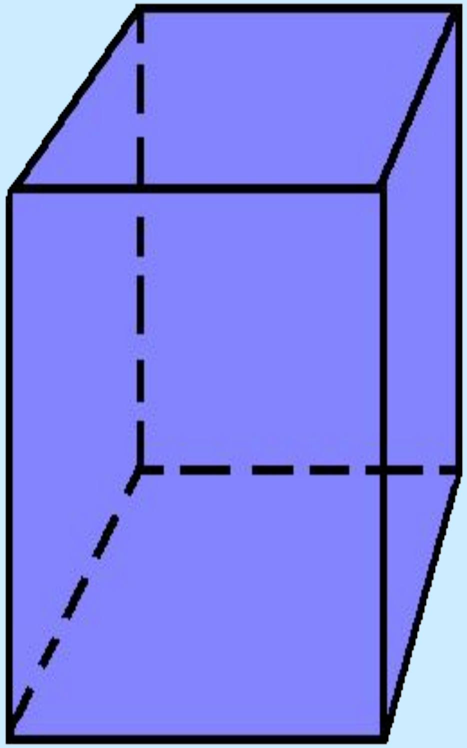


Призма - многогранник, у которого боковые грани параллелограммы, а два основания равные многоугольники. У треугольной призмы в основании лежит треугольник, у четырехугольной - четырехугольник, у пятиугольной - пятиугольник и т.д.

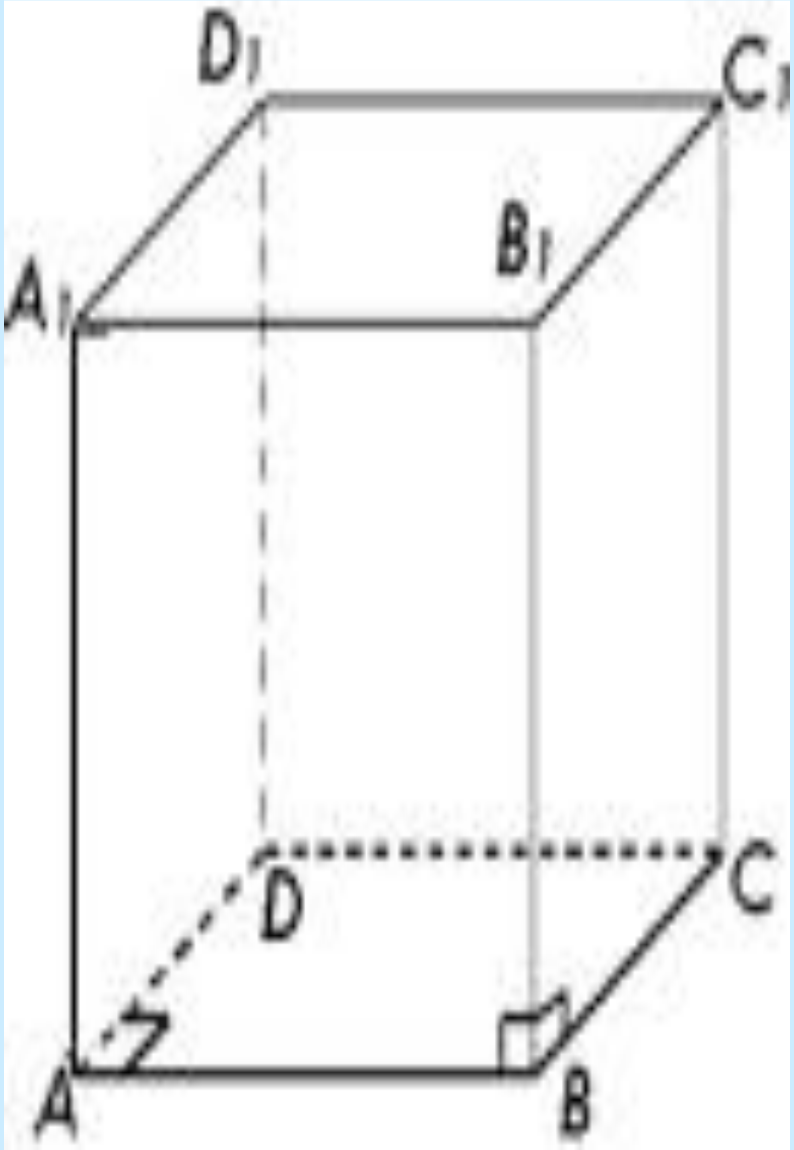
Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям, и наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.

Призма называется правильной, если она прямая и основание ее правильный многоугольник.

Параллелепипед



- это *призма, основанием которой является параллелограмм. Параллелепипед, основанием которого является прямоугольник или квадрат называется прямым.*



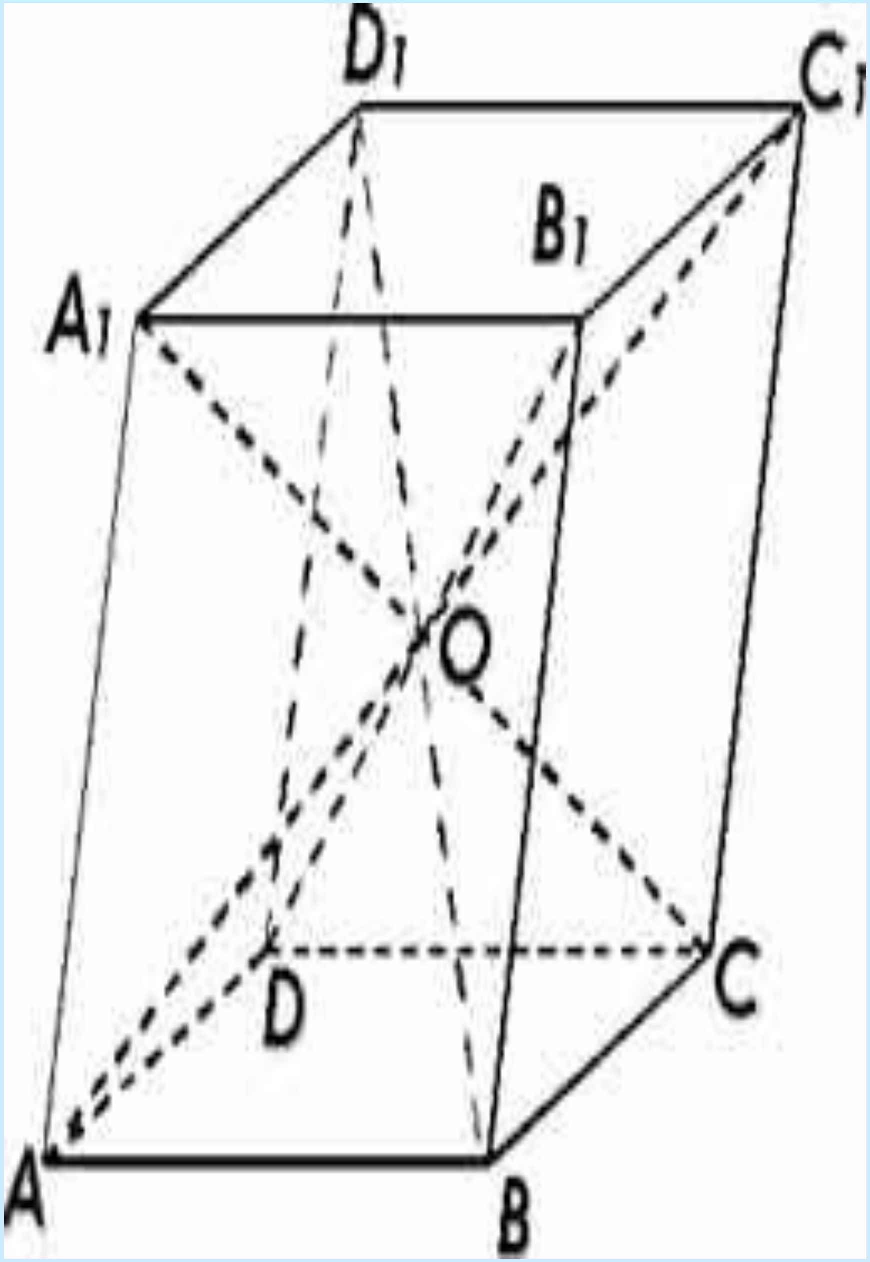
Параллелепипед

Грани из которых составлен параллелепипед (ABCD) – параллелограммы. **Ребра** (AB) – стороны параллелепипеда. **Диагональ** – отрезок, соединяющий противоположные вершины. Параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин и 4 диагонали.

Свойства параллелепипеда:
1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
2. Диагонали параллелепипеда пересекаются с одной точке и делятся этой точкой пополам.
Докажем 1-е свойство параллелепипеда:

Докажем параллельность граней ABB1A1 и ADD1A1 . Так как ABCD и ADD1A1 – параллелограммы , то AB II DC и AA1 II DD1. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA1 одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB1C1 и ADD1A1 параллельны.

Теперь докажем равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда – параллелограммы, то AB=DC и AA1=DD1. По этой же причине стороны углов A1AB и D1DC соответственно сонаправлены и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB1A1соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC1D1, поэтому эти параллелограммы равны.



Докажем второе свойство:

Рассмотрим четырехугольник A1D1CB, диагональ которого A1C и D1B являются диагоналями параллелепипеда. Так как A1D1¦BC и A1D1=BC, то A1D1CB – параллелограмм. Поэтому диагонали A1C и D1B пересекаются в некоторой точке О и этой точкой делятся пополам. Далее рассмотрим четырехугольник AD1C1B. Он также является параллелограммом и, следовательно, его диагонали AC1 и D1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D1B является точка О. Таким образом, диагонали A1C, AC1 и D1B пересекаются в точке О и делятся этой точкой пополам. Наконец, рассматривая четырехугольник A1B1CD, точно так же устанавливаем, что и четвертая диагональ DB1 параллелепипеда проходит через точку О и делится ею пополам.

Многогранник называется правильным, если все его грани - равные *правильные* ***многоугольники.***

К каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер.

Сумма плоских углов при вершине правильных многогранников не больше пяти. Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многогранника равны.

Доказано, что правильных многогранников только 5 типов:

четырёхгранник (тетраэдр),

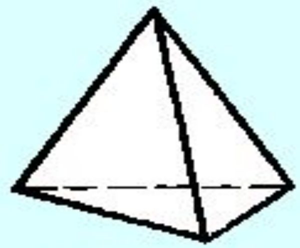
шестигранник или куб (гексаэдр),

восьмигранник (октаэдр),

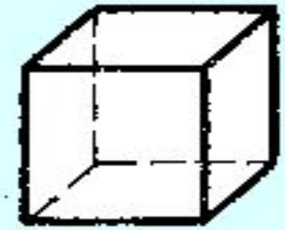
двенадцатигранник (додекаэдр),

двадцатигранник (икосаэдр).

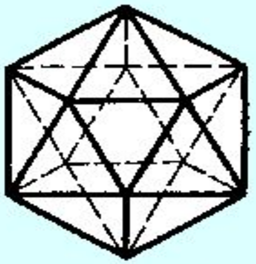
Других типов правильных многогранников не существует. Этот факт был известен уже древнегреческим геометрам и им посвящена заключительная, XII книга знаменитых начал Евклида. (Евклид доказал этот факт ещё в 3 веке до н.э.) Эти многогранники часто называют Платоновыми телами в идеалистической картине мира, данной древнегреческим мыслителем Платоном. Четыре из них олицетворяли четыре стихии: тетраэдр-огонь, куб-земля, октаэдр-воздух, икосаэдр-вода, додекаэдр-все мироздание, его по латыни стали называть guinta essentia («пятая сущность»).



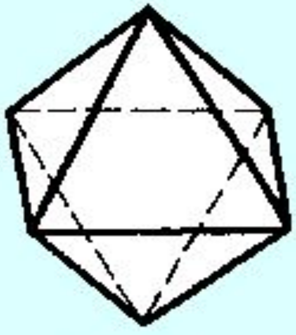
Тетраэдр



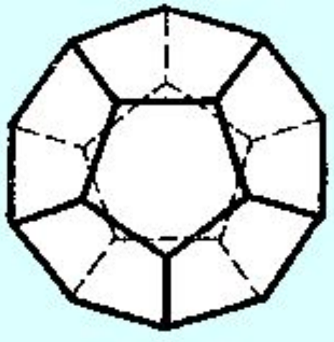
Куб



Икосаэдр



Октаэдр



Додекаэдр

Декарт, обнаружил удивительную закономерность, что если

В - число вершин,

Р - число ребер,

Г - число граней,

то

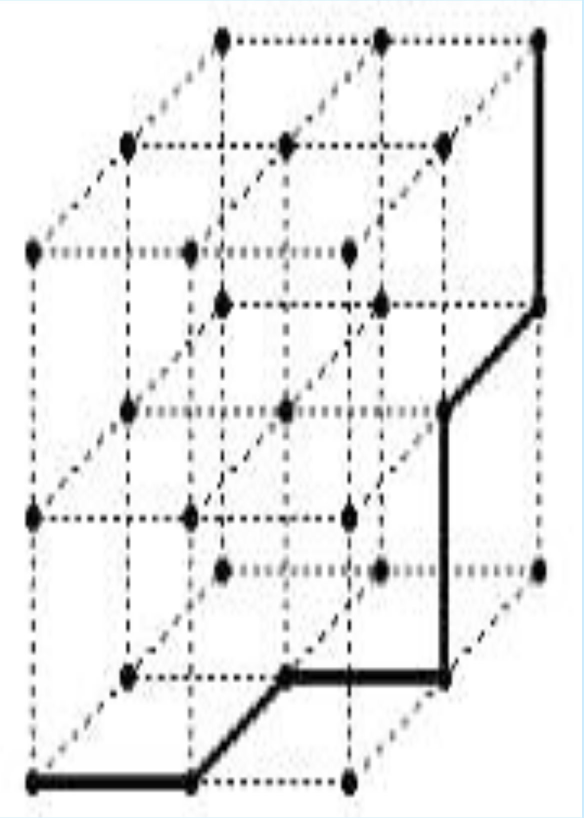
В-Р+Г=2

Тела Платона	В	Р	Г
тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12

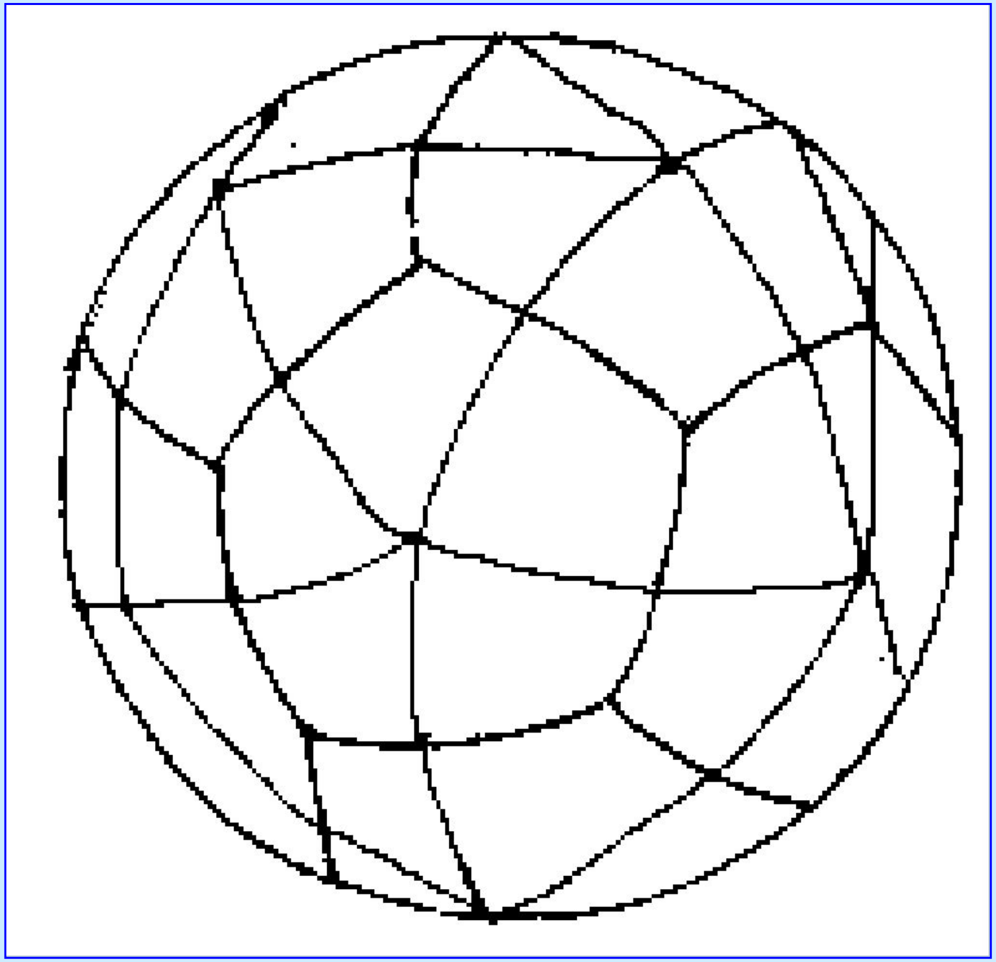
Многогранники вокруг нас

Где возможно увидеть эти удивительные тела? В очень красивой книге немецкого биолога начала нашего века Э. Геккеля "Красота форм в природе" можно прочитать такие строки: "Природа вскармливает на своем лоне неисчерпаемое количество удивительных созданий, которые по красоте и разнообразию далеко превосходят все созданные искусством человека формы". Создания природы красивы и симметричны. Это неотделимое свойство природной гармонии. Но здесь мы видим и одноклеточные организмы - феодарии, форма которых точно передает икосаэдр. Чем же вызвана такая природная геометризация? Может быть, тем, что из всех многогранников с таким же количеством граней именно икосаэдр имеет наибольший объем и наименьшую площадь поверхности*. Это геометрическое свойство помогает морскому микроорганизму преодолевать давление водной толщи.*

Интересно и то, что именно икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр. Его геометрические свойства, о которых говорилось выше, позволяют экономить генетическую информацию. Правильные многогранники - самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников. Так, куб передает форму кристаллов поваренной соли NaCl, монокристалл алюминиево-калиевых квасцов (KAlSO4)2 12H2O имеет форму октаэдра, кристалл сернистого колчедана FeS имеет форму додекаэдра, сурьменистый сернокислый натрий - тетраэдра, бор - икосаэдра. Правильные многогранники определяют форму кристаллических решеток некоторых химических веществ.



Идеи Пифагора, Платона, И.Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов) явились московские инженеры В.Макаров и В.Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обусловливают икосаэдро-додекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Их 62 вершины и середины ребер, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.



Если нанести на глобус очаги наиболее крупных и примечательных культур и цивилизаций Древнего мира, можно заметить закономерность в их расположении относительно географических полюсов и экватора планеты. Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдрово-додекаэдровой сетки. Еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер: тут располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана, здесь шотландское озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник. Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой красивой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

МНОГОГРАННИКИ В ИСКУССТВЕ

Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором. Заметим также, что анализируя картину можно догадаться о природе источника света для всей композиции - это окно, которое отражается левой верхней части сферы.

Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов. Большое количество различных многогранников может быть получено объединением правильных многогранников, а также превращением многогранника в звезду. Для преобразования многогранника в звезду необходимо заменить каждую его грань пирамидой, основанием которой является грань многогранника. Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы.

Фигуры, полученные объединением правильных многогранников, можно встретить во многих работах Эшера. Наиболее интересной среди них является гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры. Таким образом нам необходимо отвлечься от привычного восприятия картины и попытаться взглянуть на нее свежим взором, чтобы представить ее целиком. Этот аспект данной картины является еще одним предметом восхищения математиков творчеством Эшера.