6. Законы сохранения

Рассмотрим *замкнутую систему* из N взаимодействующих друг с другом частиц, на которые *не действуют* внешние силы. Состояние такой системы определяется заданием векторов $\vec{r}_i$ и скоростей $\vec{v}_i$ всех частиц (i = 1,…,N), которые находятся из решения системы уравнений Ньютона

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i$$

где $\vec{F}_i$ - сила, действующая на i - ую частицу со стороны других частиц системы. Расписывая уравнения Ньютона для проекций ускорений и сил, получим систему из 3N дифференциальных уравнений 2-го порядка. Их общее решение для радиус-векторов содержит $2 \cdot 3N = 6N$ произвольных *постоянных*

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{6N})$$

Дифференцируя эти решения по времени, получим скорости

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{6N})$$

Последние два выражения образуют систему из 6N уравнений. Исключая из них время, получим (6N-1) функций $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{6N-1}$, каждая из которых зависит от 3N координат x_i, y_i, z_i и 3N проекций скоростей v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}.

Однако, эти функции C_i ($\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$) являются константами, которые не зависят от времени и сохраняют свои значения при движении системы.

Их называют **интегралами движения**. Они выражают собой ***законы сохранения механической системы***.

Из всех 6N-1 интегралов движения наибольший интерес представляют аддитивные интегралы движения.

Свойство аддитивности выражается в том, что для системы, состоящей из *невзаимодействующих* друг с другом частей, значение аддитивного интеграла системы равно сумме значений таких интегралов ее частей.

Аддитивных интегралов только три –

***полная энергия, импульс и момент импульса*.**

Их сохранение является следствием свойств *симметрии пространства и времени*, которые не зависят от характера действующих сил.

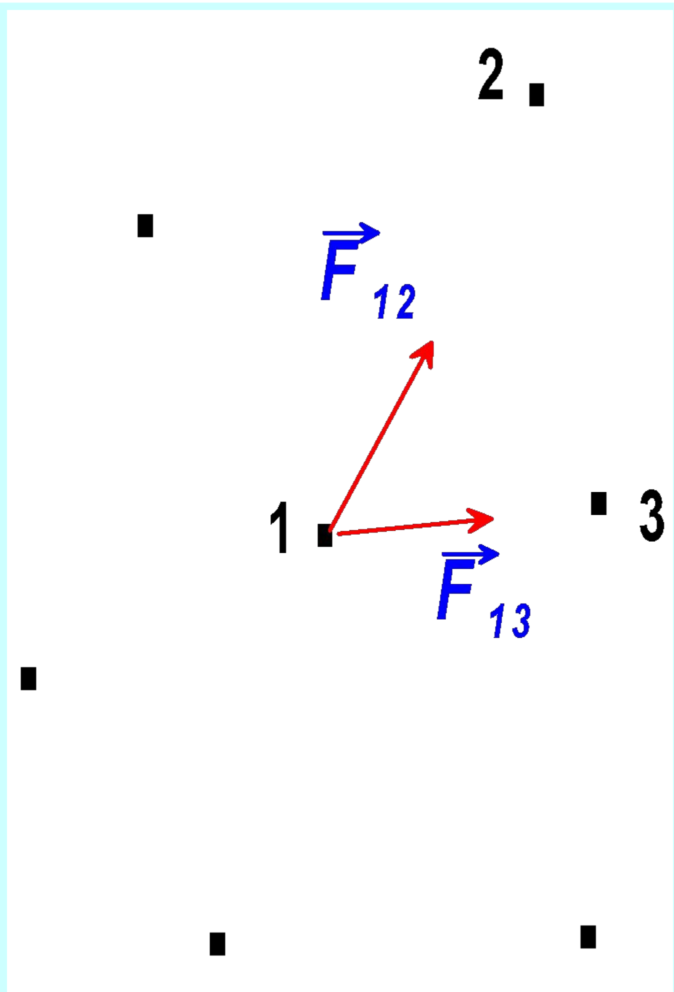
Поэтому законы сохранения обладают большей общностью, чем законы Ньютона. Они выполняются даже в тех случаях, когда законы Ньютона нарушаются.

6.1 Закон сохранения импульса

Полный импульс *замкнутой* системы равен сумме импульсов, составляющих ее частиц

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \qquad (i = 1,\ldots,N)$$



На каждую частицу действуют внутренние силы со стороны других частиц

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1N} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2N} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{F}_{N(N-1)} = \frac{d\vec{p}_N}{dt}$$

Сложим эти уравнения и объединим силы от пар частиц

$$(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21})+(\vec{F}_{13}+\vec{F}_{31})+\ldots+(\vec{F}_{23}+\vec{F}_{32})+(\vec{F}_{24}+\vec{F}_{42})+\ldots=$$

$$=\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N)=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

Но по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$ **, поэтому *сумма всех внутренних сил равна нулю* и получаем**

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}=0, \qquad \vec{P}=const} \qquad (6.1.1)$$

Следовательно, *полный импульс замкнутой системы от времени не зависит, он сохраняет свое значение и направление*. Этот закон связан с *однородностью пространства* – параллельный перенос замкнутой системы как целого из одной части пространства в другую не меняет ее механических свойств. Импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если внешние силы компенсируют друг друга.

Выразим импульс системы через скорость движения ее центра масс.
Центром масс (центром инерции) системы тел называется точка С, положение которой в пространстве определяется радиус-вектором

$$\vec{R}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

где $M = \sum_i m_i$ **- масса системы. Отсюда находим** $M\vec{R}_c = \sum_i m_i\vec{r}_i$

Возьмем первую производную по времени от последнего равенства

$$M\frac{d\vec{R}_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

получим

$$\boxed{M\vec{v}_c = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}} \qquad (6.1.2)$$

Здесь $\vec{v}_c = \dfrac{d\vec{R}_c}{dt}$ - скорость движения центра масс, она характеризует скорость перемещения системы как целого.

Поскольку для замкнутой системы $\vec{P} = const$, то и $\vec{v}_c = const$.

Следовательно, *центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или остается неподвижным*.

Поэтому система координат, связанная с центром масс является инерциальной, ее называют ц-системой.

6.2 Закон сохранения энергии

Ранее был установлен закон сохранения полной механической энергии для одного тела - формула (4.3.1).

Обобщим этот результат на случай системы из N частиц, находящихся во внешнем поле *консервативных* сил, не зависящих от времени.

Пусть на каждую частицу действует внешняя консервативная сила $\vec{F}_i$.

Будем считать, что частицы взаимодействуют между собой посредством *парных, центральных сил* $\vec{F}_{ik}$, которые зависят только от расстояний между частицами $|\vec{R}_{ik}|$. Такие силы тоже консервативные.

Запишем уравнение Ньютона для i – ой частицы

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{k \neq i}^{N} \vec{F}_{ik}$$

Умножим каждое из этих уравнений на элементарные перемещения частиц $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ и сложим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k \neq i}^{N} \vec{F}_{ik} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i d\vec{r}_i \qquad (6.2.1)$$

где учтено, что

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i dt = \vec{v}_i d\vec{v}_i$$

Левая часть уравнения (6.2.1) равна приращению кинетической энергии

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} = d\sum_{i=1}^{N} T_i = dT$$

В правой части (6.2.1) первое слагаемое равно элементарной работе внутренних консервативных сил по перемещению всех частиц системы

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\neq i}^{N} \vec{F}_{ik\,внутр} d\vec{r}_i = dA$$

Второе слагаемое в правой части (6.2.1) равно элементарной работе внешних консервативных сил по перемещению всех частиц системы

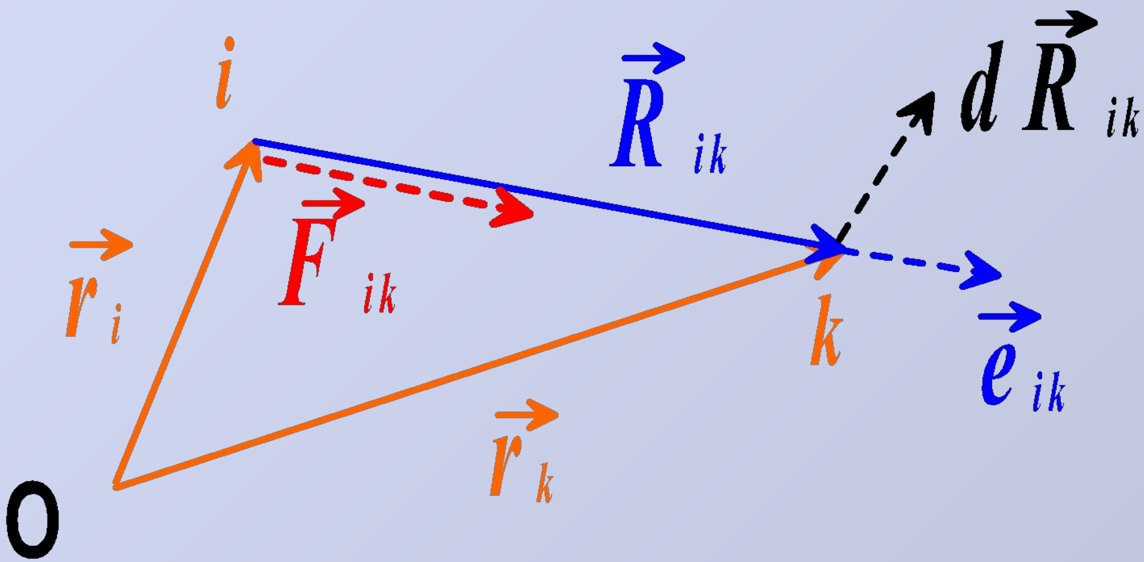
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,внешн} d\vec{r}_i = dA_{внешн} = -dU$$

Рассмотрим детальнее работу внутренних сил $dA_{внутр}$ на примере системы из трех частиц.

$$dA_{внутр} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k\neq i}^{3} \vec F_{ik} d\vec r_i = \vec F_{12} d\vec r_1 + \vec F_{13} d\vec r_1 + \vec F_{21} d\vec r_2 + \vec F_{23} d\vec r_2 +$$

$$+\vec F_{31} d\vec r_3 + \vec F_{32} d\vec r_3 = \vec F_{12}(d\vec r_1 - d\vec r_2) + \vec F_{13}(d\vec r_1 - d\vec r_3) + \vec F_{23}(d\vec r_2 - d\vec r_3) =$$

$$= -\vec F_{12} d\vec R_{12} - \vec F_{13} d\vec R_{13} - \vec F_{23} d\vec R_{23} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{k>i}^{3} \vec F_{ik} d\vec R_{ik}$$



$$\vec R_{ik} = \vec r_k - \vec r_i$$

$$\vec e_{ik} = \frac{\vec R_{ik}}{R_{ik}}$$

$$(\vec e_{ik} d\vec R_{ik}) \equiv dR_{ik}$$

dR_{ik} **- изменение расстояния между двумя частицами**

Обобщим полученную формулу на случай N частиц

$$dA_{внутр} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k>i}^{N} \vec{F}_{ik} d\vec{R}_{ik}$$

Учтем, что внутренние силы центральные, направлены вдоль радиус-векторов $\vec{R}_{ik}$, соединяющих частицы, и поэтому могут быть записаны в виде

$$\vec{F}_{ik} = f_{ik} \cdot \vec{e}_{ik}$$

где $f_{ik}(R_{ik})$ – функции, зависящие только от модуля расстояния между частицами R_{ik}, поэтому

$$(\vec{F}_{ik} d\vec{R}_{ik}) = f_{ik} \cdot (\vec{e}_{ik} d\vec{R}_{ik}) = f_{ik} \cdot dR_{ik} = dU_{ik}$$

где dU_{ik} – изменение потенциальной энергии парного взаимодействия *i –ой* и *k - ой* частиц.

В результате получаем

$$dA_{внутр} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k>i}^{N} dU_{ik} = -dU_{внутр}$$

Объединяя слагаемые, формулу (6.2.1) перепишем в виде

$$dT = -d(U_{внутр} + U_{внешн})$$

или

$$d(T + U_{внутр} + U_{внешн}) = 0$$

Значит ***полная механическая энергия системы***

$$E = T + U_{внутр} + U_{внешн} \qquad (6.2.2)$$

сохраняется, когда система находится в поле внешних консервативных сил**. Если же внешние силы не консервативны, то полная энергия системы с течением времени меняется.**

6.3 Закон сохранения момента импульса

Ранее было получено выражение (5.5.5), связывающее момент импульса $\vec{L}$ с моментом внешних сил $\vec{M}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathrm{M}}$$

Распишем оба момента в виде суммы вкладов от частей системы

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] \; ; \quad \vec{\mathrm{M}} = \sum_i \vec{\mathrm{M}}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

Подставляем в уравнение (5.5.5)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{\mathrm{M}}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

Если система *замкнутая*, то на каждую из ее частей внешние силы не действуют $\vec{F}_i = 0$, тогда

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$$

поэтому $$\boxed{\vec{L} = const} \qquad (6.3.1)$$

Следовательно, ***момент импульса замкнутой системы сохраняется, с течением времени остаются неизменными как его величина, так и направление.***

Этот результат справедлив и ***для не замкнутой*** системы, если суммарный момент внешних сил равен нулю, то есть когда $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0$, хотя может $\vec{F}_i \neq 0$.

Также всегда сохраняется проекция момента импульса на ту ось, относительно которой силовое поле *симметрично*.

Частным случаем является *центрально-симметричное* поле. При движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через силовой центр.

Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства, которая проявляется в независимости физических законов относительно *поворотов* замкнутой системы в пространстве на произвольный угол.

6.4 *Упругий и неупругий удар шаров*

Анализ законов сохранения позволяет, не решая уравнений Ньютона, получить важные выводы о свойствах механической системы.

Рассмотрим в качестве примера *центральный удар* двух шаров, которые до удара двигались вдоль прямой, проходящей через их центры.

При соударении тела претерпевают *деформации*. При этом их кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел, сопровождающуюся повышением их температуры.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

При *абсолютно упругом ударе* механическая энергия тел *не переходит* в другие, немеханические, виды энергии.

При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию *упругой деформации*.

После удара тела возвращаются к *первоначальной форме*, отталкивая друг друга. В результате потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию и тела разлетаются со скоростями, которые определяются из законов сохранения полной механической энергии и полного импульса системы двух тел.

При *абсолютно неупругом ударе* потенциальная энергия деформации *не возникает*, а кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во *внутреннюю* энергию.

После абсолютно неупругого удара тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При этом выполняется лишь закон сохранения импульса, а закон сохранения механической энергии *не соблюдается*.

Но при абсолютно неупругом ударе *сохраняется полная энергия* – механическая плюс внутренняя.

1) Абсолютно неупругий удар

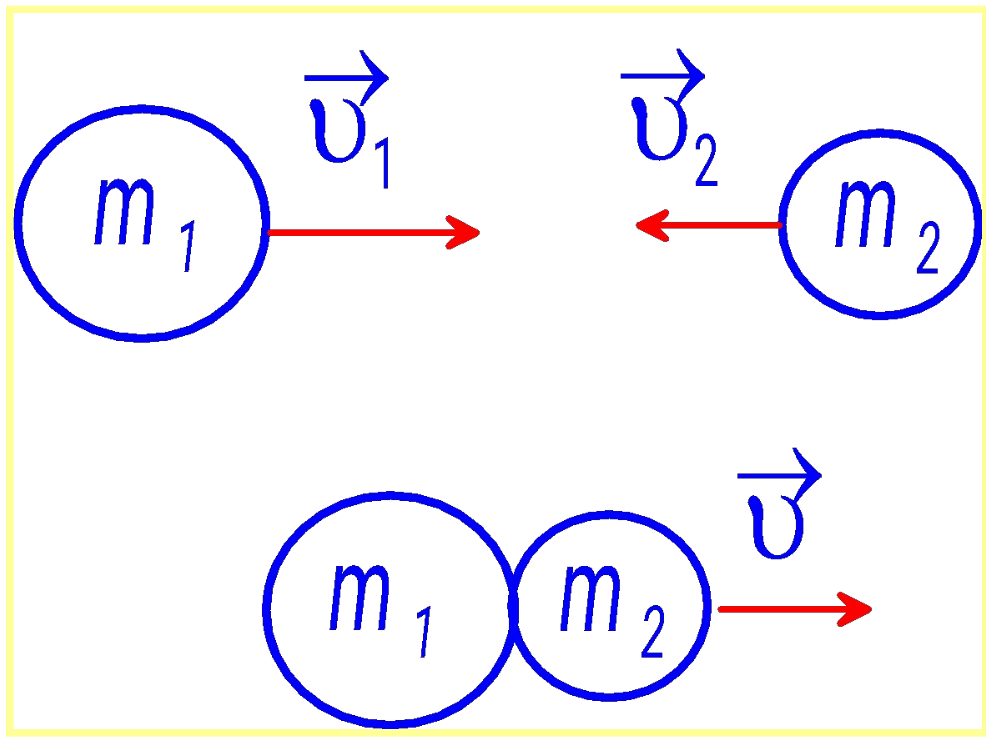
Пусть массы шаров равны m_1 и m_2, а скорости до удара $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. После удара шары движутся как одно целое с одной и той же скоростью $\vec{\upsilon}$, равной скорости движения центра масс двух шаров.

Оба шара вместе образуют замкнутую систему, поэтому должен выполняться закон сохранения полного импульса системы

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}$$

откуда

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{(m_1 + m_2)} \qquad \textbf{(6.4.1)}$$



Найдем, какая часть кинетической энергии перешла в немеханическую форму энергии (тепловую или другую)

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\upsilon^2 =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2 \qquad \textbf{(6.4.2)}$$

Рассмотрим *частный* случай, когда одно из тел до удара было неподвижным, например $\vec{\upsilon}_2 = 0$ **, тогда**

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \quad ; \quad \Delta T = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}$$

Если, кроме того, масса неподвижного тела ***много больше*** массы движущегося тела, то

$$m_2 >> m_1 \quad ; \quad \upsilon << \upsilon_1 \quad ; \quad \Delta T \approx \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}$$

Следовательно, в этом случае почти вся кинетическая энергия подвижного тела при ударе переходит в тепло или другие формы немеханической энергии.

Если, ***наоборот***, неподвижное тело много легче подвижного, то

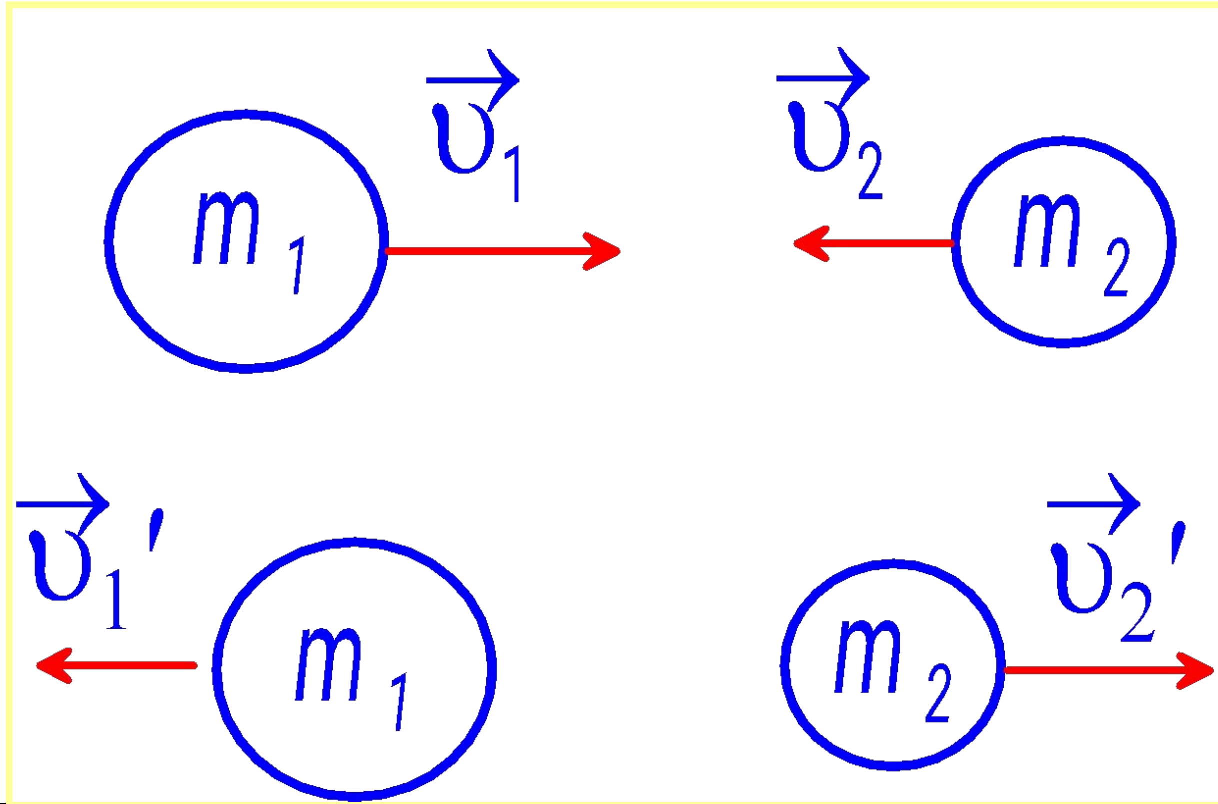
$$m_1 >> m_2 \quad ; \quad \upsilon \approx \upsilon_1$$

$$\Delta T \approx \frac{m_2 \upsilon_1^2}{2} = \frac{m_2 \upsilon^2}{2} << T_1 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}$$

Значит, в этом случае лишь небольшая доля кинетической энергии подвижного тела переходит в тепло, а легкое неподвижное тело приобретает скорость, почти равную скорости подвижного тела.

2) Абсолютно упругий удар

При абсолютно упругом ударе выполняются два закона сохранения - закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. На рисунке скорости тел после удара помечены штрихом.



Запишем законы сохранения

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1(\upsilon_1')^2}{2} + \frac{m_2(\upsilon_2')^2}{2} \qquad (6.4.3)$$

Из них после преобразований получаем

$$\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_2'$$

$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_1' \qquad (6.4.4)$$

Равенство (6.4.4) означает, что при абсолютно упругом ударе *относительная скорость двух шаров сохраняет свой модуль, но меняет свое направление*.

Подставляя **(6.4.4)** в **(6.4.3)**, получаем

$$\vec{\upsilon}_1' = \frac{2m_2\vec{\upsilon}_2 + (m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\upsilon}_2' = \frac{2m_1\vec{\upsilon}_1 + (m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.4.5)$$

Рассмотрим *частные* случаи.

1) Пусть шары *одинаковые*, и один из шаров до удара был неподвижным, например, $\vec{\upsilon}_2 = 0$. Тогда

$$\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_1 \quad ; \quad \vec{\upsilon}_1' = 0$$

Значит, после удара первый шар остановился, а второй шар движется со скоростью первого шара, которую тот имел до удара.

***Шары как бы обменялись скоростями*.**

2) **Пусть теперь массы шаров** ***сильно отличаются***, **например**

$$m_2 >> m_1 \quad ; \quad \vec{\upsilon}_1' \approx -\vec{\upsilon}_1 + 2\vec{\upsilon}_2 \quad ; \quad \vec{\upsilon}_2' \approx \vec{\upsilon}_2$$

Следовательно:

а) **2-ой большой шар почти не меняет своего движения,**

б) **если до удара 2-ой большой шар был неподвижным** $\vec{\upsilon}_2 \approx 0$ **, то 1-ый малый шар после удара меняет направление своего движения на противоположное** $\vec{\upsilon}_1' \approx -\vec{\upsilon}_1$,

с) **скорость малого шара увеличивается, если большой шар двигался ему навстречу и уменьшается, если большой шар двигался в ту же сторону.**