Тема 4:

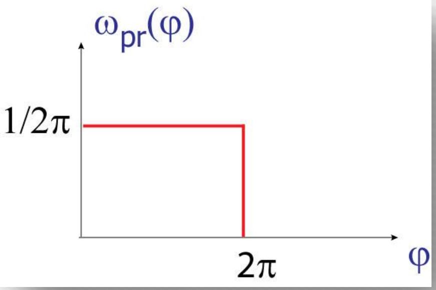
Часть 4:

Оптимальное обнаружение и различение сигналов с неизвестной начальной фазой.

Оптимальное различение двух полностью известных сигналов

Оптимальное обнаружение сигнала

(сигнал с неизвестной начальной фазой)



Сигнал

$$s_{\lambda,\varphi}(t) = \lambda \underbrace{U(t)}_{\text{закон АМ}} \cos\left(\omega_0 t + \underbrace{\psi(t)}_{\text{закон ФМ}} + \varphi\right)$$

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = \int_0^\infty p_{ps}(\lambda \mid \varphi) w_{pr}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{ps}(\lambda \mid \varphi) d\varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{q(\lambda,\varphi)} d\varphi\right) e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda)$$

Корреляционный интеграл:

$$q(\lambda,\varphi) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t) s_{\lambda,\varphi}(t)\,dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\lambda U(t)\cos\left(\omega_0 + \psi(t) + \varphi\right)dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{q(\lambda,\varphi)}\,d\varphi = I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(\lambda)\right) \qquad Z(\lambda) = \sqrt{Z^c(\lambda)^2 + Z^s(\lambda)^2}$$

$$Z^c(\lambda) = \int_0^T y(t)\lambda U(t)\cos\left(\omega_0 t + \psi(t)\right)dt \qquad Z^s(\lambda) = \int_0^T y(t)\lambda U(t)\sin\left(\omega_0 t + \psi(t)\right)dt$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(сигнал с неизвестной начальной фазой)

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = c I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(\lambda)\right) e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda)$$

$\lambda = 1$

$$p_{ps}(1) = c I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(1)\right) e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}$$

$\lambda = 0$

$$Z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0(0) = 1$$

$$p_{ps}(0) = c p_{pr}(0) = c(1 - p_{pr})$$

Случай, когда $p_{ps}(1) > p_{ps}(0)$:

$$c I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(1)\right) e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr} > c(1 - p_{pr}) \quad \Rightarrow \quad \ln I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(1)\right) > \underbrace{\frac{E_c}{G_0} + \ln\frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}}_{h}$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(сигнал с неизвестной начальной фазой)

Алгоритм оптимального обнаружения

$$\ln I_0\left(\frac{2}{G_0}Z\right) > h$$

$$\text{порог } h = \frac{E_{\text{c}}}{G_0} + \ln\frac{1-p_{pr}}{p_{pr}}$$

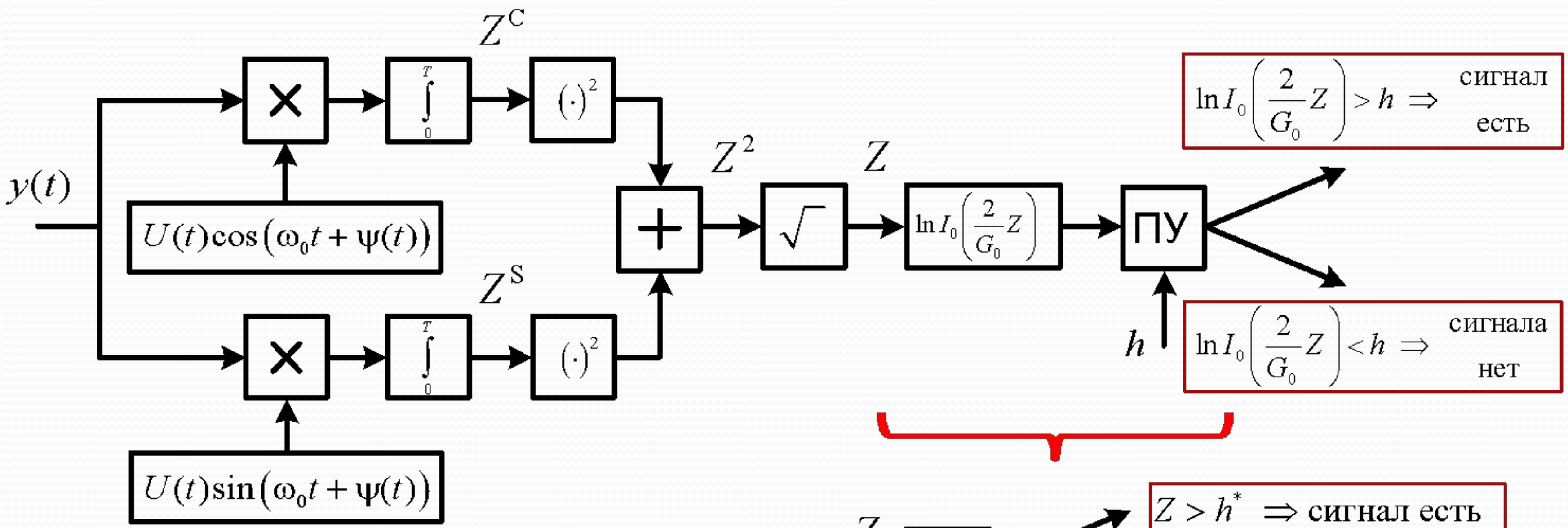
$$Z = \sqrt{Z^{\text{c}\,2} + Z^{\text{s}\,2}}$$

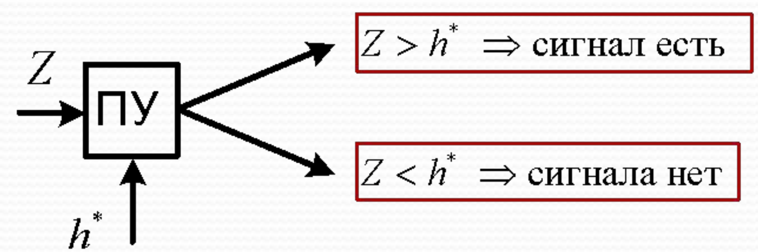
$$Z^{\text{c}} = \int_0^T y(t)U(t)\cos\left(\omega_0 t + \psi(t)\right)dt$$

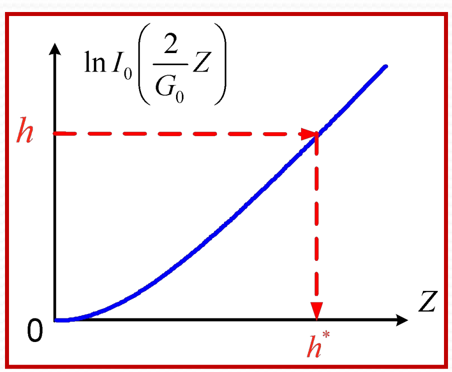
$$Z^{\text{s}} = \int_0^T y(t)U(t)\sin\left(\omega_0 t + \psi(t)\right)dt$$

Оптимальный корреляционный обнаружитель

(сигнал с неизвестной начальной фазой)







Оптимальный порог

$$h = \frac{E_c}{G_0} + \ln\frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}, \quad h^* = \frac{G_0}{2} I_0^{-1}\left(e^h\right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(сигнал с неизвестной начальной фазой)

Критерий Неймана-Пирсона: $p_{\text{обн}} = \max$ при заданной допустимой $p_{\text{ЛТ}}$

Вероятность ложной тревоги $p_{\text{ЛТ}} = \mathbf{P}\left\{ Z > h^{*} \middle| \lambda = 0 \right\} = \int\limits_{h^{*}}^{\infty} w(Z \mid \lambda = 0)\, dZ$

Так как $Z = \sqrt{Z^{\text{c}\,2} + Z^{\text{s}\,2}}$, то по аналогии с огибающей шума $U = \sqrt{U_{\text{ш}}^{\text{c}\,2} + U_{\text{ш}}^{\text{s}\,2}}$

$w(Z \mid \lambda = 0) = \dfrac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}},\ Z > 0$ – распределение Релея с параметром $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\left\{Z^{\text{C}}\right\}} = \sqrt{\mathbf{D}\left\{Z^{\text{S}}\right\}}$

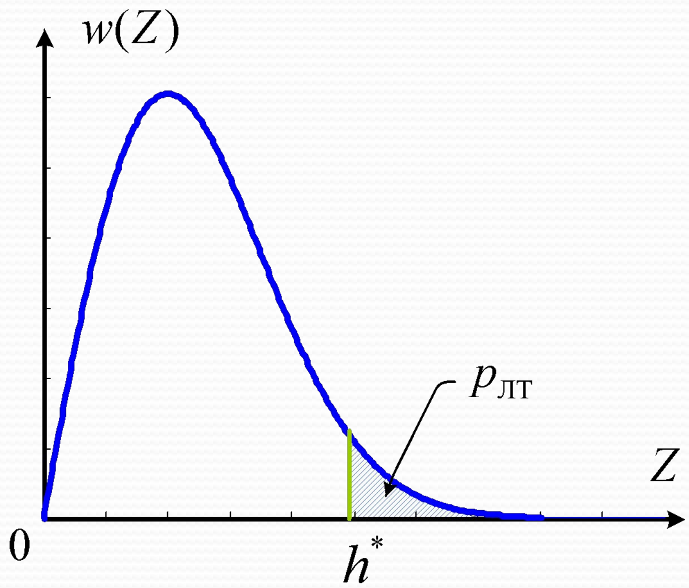
$$\begin{Bmatrix} Z^{\text{c}} \\ Z^{\text{s}} \end{Bmatrix} = \int\limits_{0}^{T} y(t) U(t) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\omega_0 t + \psi(t)\right) dt$$

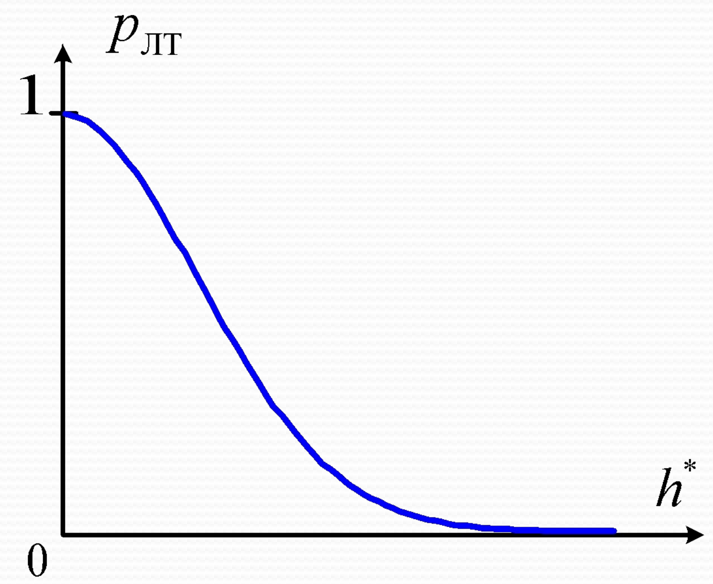
Дисперсия интеграла $\int\limits_{0}^{T} n(t) s(t)\, dt$ не зависит от вида сигнала и равна $\dfrac{G_0}{2} E_{\text{c}}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{D}\left\{Z^{\text{C}}\right\} = \mathbf{D}\left\{Z^{\text{S}}\right\} = \frac{G_0}{2} E_{\text{c}} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{G_0}{2} E_{\text{c}}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(сигнал с неизвестной начальной фазой)





Вероятность ложной тревоги

$$p_{ЛТ} = \int_{h^*}^{\infty} \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}} dZ = e^{-\frac{h^{*2}}{2\sigma^2}}$$

Порог

$$h^* = \sigma\sqrt{-2\ln p_{ЛТ}}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(сигнал с неизвестной начальной фазой)

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \int_{h^*}^{\infty} w(Z \mid \lambda = 1)\, dZ$$

По аналогии с огибающей суммы сигнала и шума

$$w(Z \mid \lambda = 1) = \frac{Z}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Z Z_c}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{Z^2 + Z_c^2}{2\sigma^2}},\ Z \geq 0$$

– распределение Райса с параметрами и Z σ.

$Z_c = \sqrt{Z_c^{c2} + Z_c^{s2}}$ – напряжение на входе ПУ при отсутствии ш ума; $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\{Z^C\}} = \sqrt{\mathbf{D}\{Z^S\}} = \sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}$

$$Z_c^c = \int_0^T \left[U(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi)\right]\left[U(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t))\right] dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T U^2(t)\cos(\varphi)\, dt}_{E_c \cos\varphi} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T U^2(t)\cos(2\omega_0 t + 2\psi(t) + \varphi)\, dt}_{\ll E_c \text{ при } T \gg \frac{1}{2 f_0}} \approx E \cos\varphi$$

$$Z_c^s = \int_0^T \left[U(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi)\right]\left[U(t)\sin(\omega_0 t + \psi(t))\right] dt \approx E_c \sin\varphi$$

$$Z_c = \sqrt{Z_c^{c^2} + Z_c^{s^2}} \approx$$

$$\approx \sqrt{(E_c \cos\varphi)^2 + (E_c \sin\varphi)^2} =$$

$$= E_c$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(сигнал с неизвестной начальной фазой)

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \int_{h^*}^{\infty} w(Z \mid \lambda = 1)\,dZ = \int_{h^*}^{\infty} \frac{Z}{\sigma^2} I_0\left(\frac{ZZ_{\text{c}}}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{Z^2+Z_{\text{c}}^2}{2\sigma^2}}\,dZ = \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{Z}{\sigma} \\ x_{\text{c}} &= \frac{Z_{\text{c}}}{\sigma} \\ x_{h^*} &= \frac{h^*}{\sigma} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int_{x_{h^*}}^{\infty} x I_0(x x_{\text{c}}) e^{-\frac{x^2+x_{\text{c}}^2}{2}}\,dx = Q\left(x_{\text{c}}, x_{h^*}\right) = Q\left(\frac{Z_{\text{c}}}{\sigma}, \frac{h^*}{\sigma}\right)$$

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} x I_0(\alpha x) e^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}}\,dx \; - \; Q\text{-функция Маркума}$$

$$\frac{Z_{\text{c}}}{\sigma} = \frac{E_{\text{c}}}{\sqrt{\frac{G_0}{2} E_{\text{c}}}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}$$

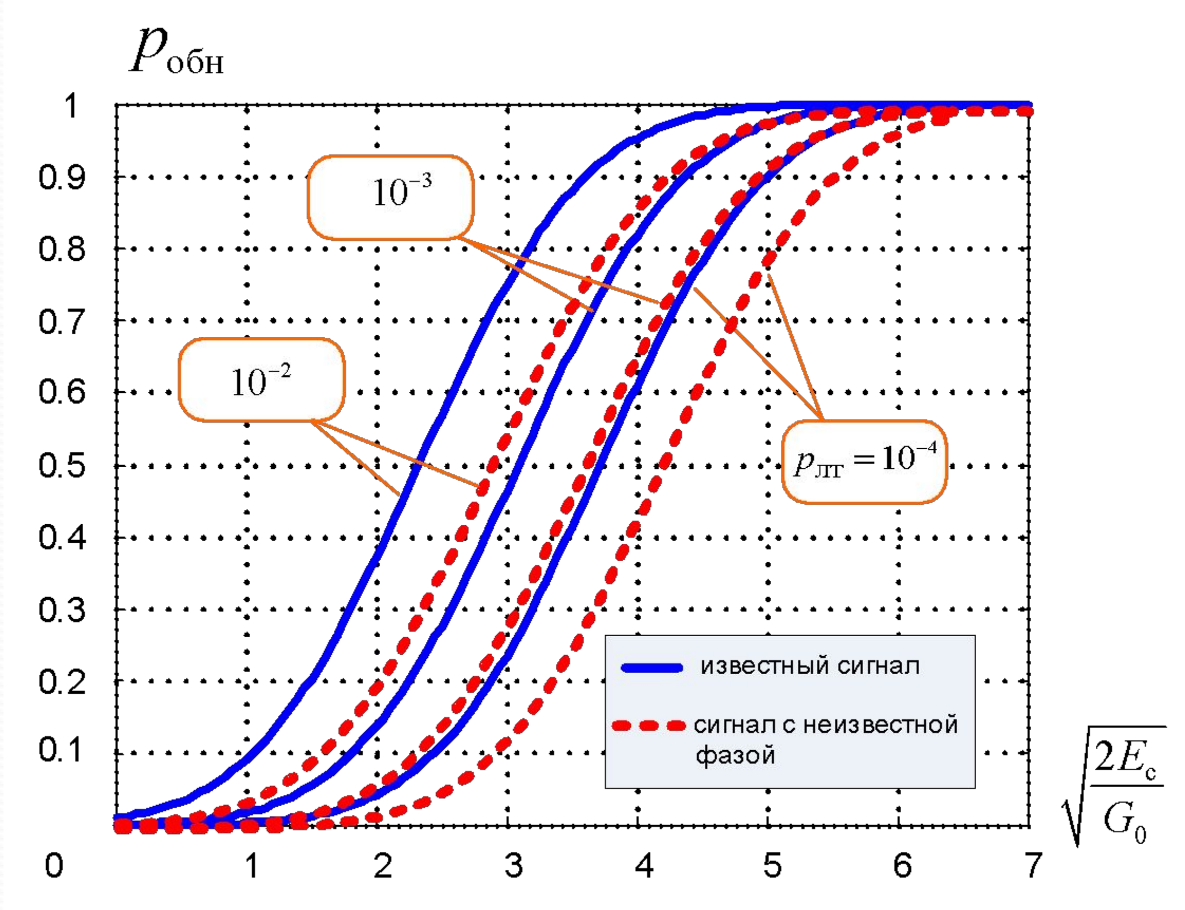
$$\frac{h^*}{\sigma} = \sqrt{-2\ln p_{\text{ЛТ}}}$$

$$p_{\text{обн}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}, \sqrt{-2\ln p_{\text{ЛТ}}}\right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

Характеристики (кривые) обнаружения

по критерию Неймана-Пирсона



Оптимальное различение полностью известных сигналов

Принятая смесь сигнала и шума

$$y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если сигнал } s_1(t) \\ 0, & \text{если сигнал } s_2(t) \end{cases}$$

$$s_\lambda(t) = \lambda s_1(t) + \left(1 - \lambda\right) s_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \text{различение} \\ \text{сигналов} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{оценка} \\ \text{параметра } \lambda \end{bmatrix}$$

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = e^{q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t) s_\lambda(t)\, dt \text{ — корреляционный интеграл}$$

$$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t)\, dt \text{ — энергия сигнала}$$

Оптимальное различение двух полностью известных сигналов

$\lambda = 1$	$\lambda = 0$
$s_\lambda(t) = s_1(t)$	$s_\lambda(t) = s_2(t)$
$q(1) = \dfrac{2}{G_0}\int\limits_0^T y(t)s_1(t)dt \overset{def}{=} q_1$	$q(0) = \dfrac{2}{G_0}\int\limits_0^T y(t)s_2(t)dt \overset{def}{=} q_2$
$E_\text{c}(1) = \int\limits_0^T s_1^2(t)dt \overset{def}{=} E_{\text{c}1}$	$E_\text{c}(0) = \int\limits_0^T s_2^2(t)dt \overset{def}{=} E_{\text{c}2}$
$p_{ps}(1) = p^{q_1 - \frac{E_{\text{c}1}}{G_0}} p_{pr}(1)$	$p_{ps}(0) = p^{q_2 - \frac{E_{\text{c}2}}{G_0}} p_{pr}(0)$
p_{ps1} $\qquad$ p_{pr1}	p_{ps2} $\qquad$ p_{pr2}

Оптимальное различение двух полностью известных сигналов

Оценка параметра

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 \ (\text{сигнал } s_1(t)), \text{ если } & p_{ps1} > p_{ps2} \\ 0 \ (\text{сигнал } s_2(t)), \text{ если } & p_{ps1} < p_{ps2} \end{cases}$$

Случай, когда $p_{ps1} > p_{ps2}$:

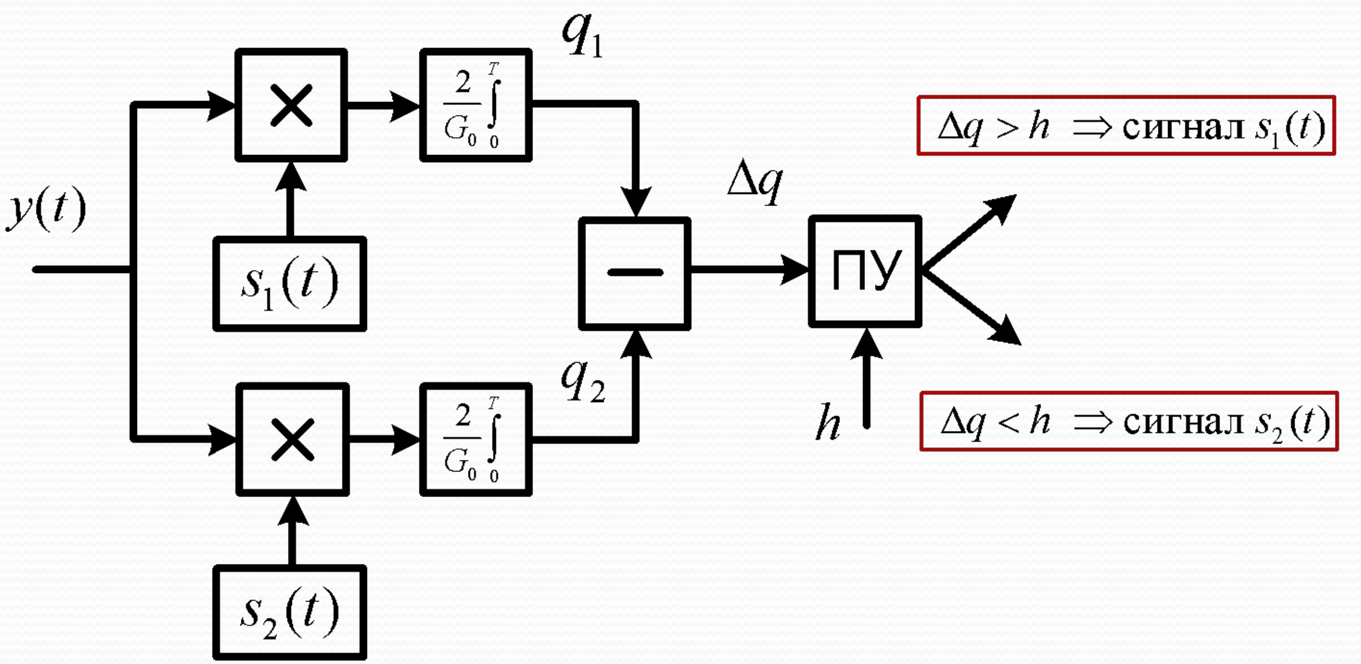
$$ce^{q_1} e^{-\frac{E_{c1}}{G_0}} p_{pr1} > ce^{q_2} e^{-\frac{E_{c2}}{G_0}} p_{pr2} \quad \Rightarrow \quad e^{q_1 - q_2} > \frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} e^{\frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}}$$

$$\underbrace{q_1 - q_2}_{\Delta q} > \underbrace{\ln \frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} + \frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}}_{\text{порог } h}$$

Алгоритм оптимального различения

$$\Delta q = q_1 - q_2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_1(t) dt - \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_2(t) dt > h$$

Оптимальный приёмник различения двух известных сигналов



Оптимальный порог

$$h = \ln\frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} + \frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

Равновероятные сигналы с одинаковой энергией

$$\left\{\begin{aligned} p_{pr1} &= p_{pr2} = \frac{1}{2} \\ E_{c1} &= E_{c2} = E_{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; h = 0$$

Вероятность ошибки различения

$$p_{ош} = p(s_2 \,|\, s_1)\cdot p_{pr1} + p(s_1 \,|\, s_2)\cdot p_{pr2} = \frac{1}{2}\left[p(s_2 \,|\, s_1) + p(s_1 \,|\, s_2)\right]$$

условные вероятности ошибок при приёме сигналов

$$p(s_1 \,|\, s_2) = \mathbf{P}\{\Delta q > h \,|\, s_2\} = \int_{h=0}^{\infty} w(\Delta q \,|\, s_2)\, d(\Delta q)$$

$$p(s_2 \,|\, s_1) = \mathbf{P}\{\Delta q < h \,|\, s_1\} = \int_{-\infty}^{h=0} w(\Delta q \,|\, s_1)\, d(\Delta q)$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

Статистические характеристики напряжения на входе ПУ

$$\Delta q = q_1 - q_2 = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\underbrace{\left(s_1(t) - s_2(t)\right)}_{\Delta s(t)}dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\Delta s(t)dt = \Delta q_{\text{с}} + \Delta q_{\text{ш}}$$

Математическое ожидание

$$\overline{\Delta q} = \Delta q_{\text{с}} = \begin{cases} \left(\Delta q_{\text{с}} \mid s_1\right) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T s_1(t)\Delta s(t)dt, & \text{если действует } s_1(t) \\ \left(\Delta q_{\text{с}} \mid s_2\right) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T s_2(t)\Delta s(t)dt, & \text{если действует } s_2(t) \end{cases}$$

Дисперсия $\mathbf{D}\{\Delta q\} = \sigma^2_{\Delta q} = \sigma^2_{\Delta q_{\text{ш}}} = \overline{\left(\Delta q_{\text{ш}}\right)^2}$

Шумовая составляющая $\Delta q_{\text{ш}} = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T n(t)\Delta s(t)dt$

не зависит от того, какой сигнал действует

$$\Rightarrow \sigma^2_{\Delta q} = \frac{2E_{\Delta s}}{G_0}$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

Условные плотности вероятности

$$w(\Delta q \mid s_1) = \frac{1}{\sigma_{\Delta q}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\Delta q - (\Delta q_{\text{c}} \mid s_1)\right)^2}{2\sigma_{\Delta q}^2} \right)$$

$$w(\Delta q \mid s_2) = \frac{1}{\sigma_{\Delta q}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\Delta q - (\Delta q_{\text{c}} \mid s_2)\right)^2}{2\sigma_{\Delta q}^2} \right)$$

Условное математическое ожидание

$$(\Delta q_{\text{c}} \mid s_1) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s_1(t)\Delta s(t)dt \qquad (\Delta q_{\text{c}} \mid s_2) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s_2(t)\Delta s(t)dt$$

Дисперсия $\sigma_{\Delta q}^2 = \frac{2E_{\Delta s}}{G_0}$, где $E_{\Delta s} = \int_0^T \Delta s(t)^2 dt$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

$$E_{\Delta s}=\int_0^T \Delta s(t)^2\,dt=\int_0^T \left[s_1(t)-s_2(t)\right]^2 dt=\underbrace{\int_0^T s_1(t)^2\,dt}_{E_{\text{с}1}=E_{\text{с}}}-2\int_0^T s_1(t)s_2(t)\,dt+\underbrace{\int_0^T s_2(t)^2\,dt}_{E_{\text{с}2}=E_{\text{с}}}=$$

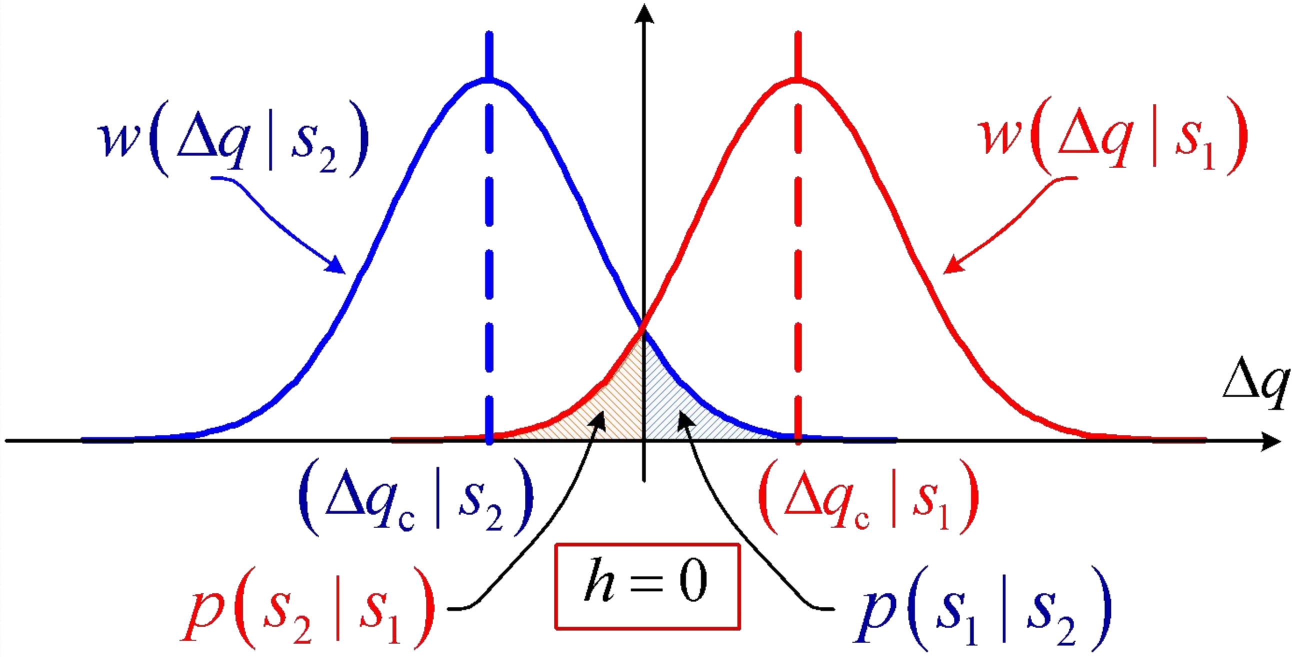
$$=2E_{\text{с}}\left(1-\underbrace{\frac{1}{E_{\text{с}}}\int_0^T s_1(t)s_2(t)\,dt}_{r_{12}\ \text{– коэфф.взаимной корреляции сигналов}}\right)=2E_{\text{с}}\left(1-r_{12}\right)\quad\Rightarrow\quad \sigma^2_{\Delta q}=\frac{4E_{\text{с}}\left(1-r_{12}\right)}{G_0}$$

$$\left(\Delta q_{\text{с}}\,|\,s_1\right)=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_1(t)\Delta s(t)\,dt=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_1(t)\left(s_1(t)-s_2(t)\right)dt=\frac{2E_{\text{с}}\left(1-r_{12}\right)}{G_0}$$

$$\left(\Delta q_{\text{с}}\,|\,s_2\right)=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_2(t)\Delta s(t)\,dt=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_2(t)\left(s_1(t)-s_2(t)\right)dt=\frac{2E_{\text{с}}\left(r_{12}-1\right)}{G_0}=-\left(\Delta q_{\text{с}}\,|\,s_1\right)$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

Условные плотности вероятности и условные вероятности ошибок



$$p(s_1 \mid s_2) = \int_{h=0}^{\infty} w(\Delta q \mid s_2)\, d(\Delta q) \qquad p(s_2 \mid s_1) = \int_{-\infty}^{h=0} w(\Delta q \mid s_1)\, d(\Delta q)$$

$$p(s_2 \mid s_1) = p(s_1 \mid s_2)$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

$$p(s_2 \mid s_1) = \int\limits_{-\infty}^{0} w(\Delta q \mid s_1)\, d(\Delta q) = \Phi\left(\frac{0 - (\Delta q_{\text{c}} \mid s_1)}{\sigma_{\Delta q}} \right) = \Phi\left(\frac{-\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}(1 - r_{12})}{\sqrt{\frac{4E_{\text{c}}(1 - r_{12})}{G_0}}} \right) =$$

$$= \Phi\left(-\sqrt{\frac{E_{\text{c}}}{G_0}(1 - r_{12})} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{т.к. } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}}{=} 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_{\text{c}}}{G_0}(1 - r_{12})} \right) = p(s_1 \mid s_2)$$

Вероятность ошибки различения

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[p(s_2 \mid s_1) + p(s_1 \mid s_2) \right] = p(s_2 \mid s_1) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_{\text{c}}}{G_0}(1 - r_{12})} \right)$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

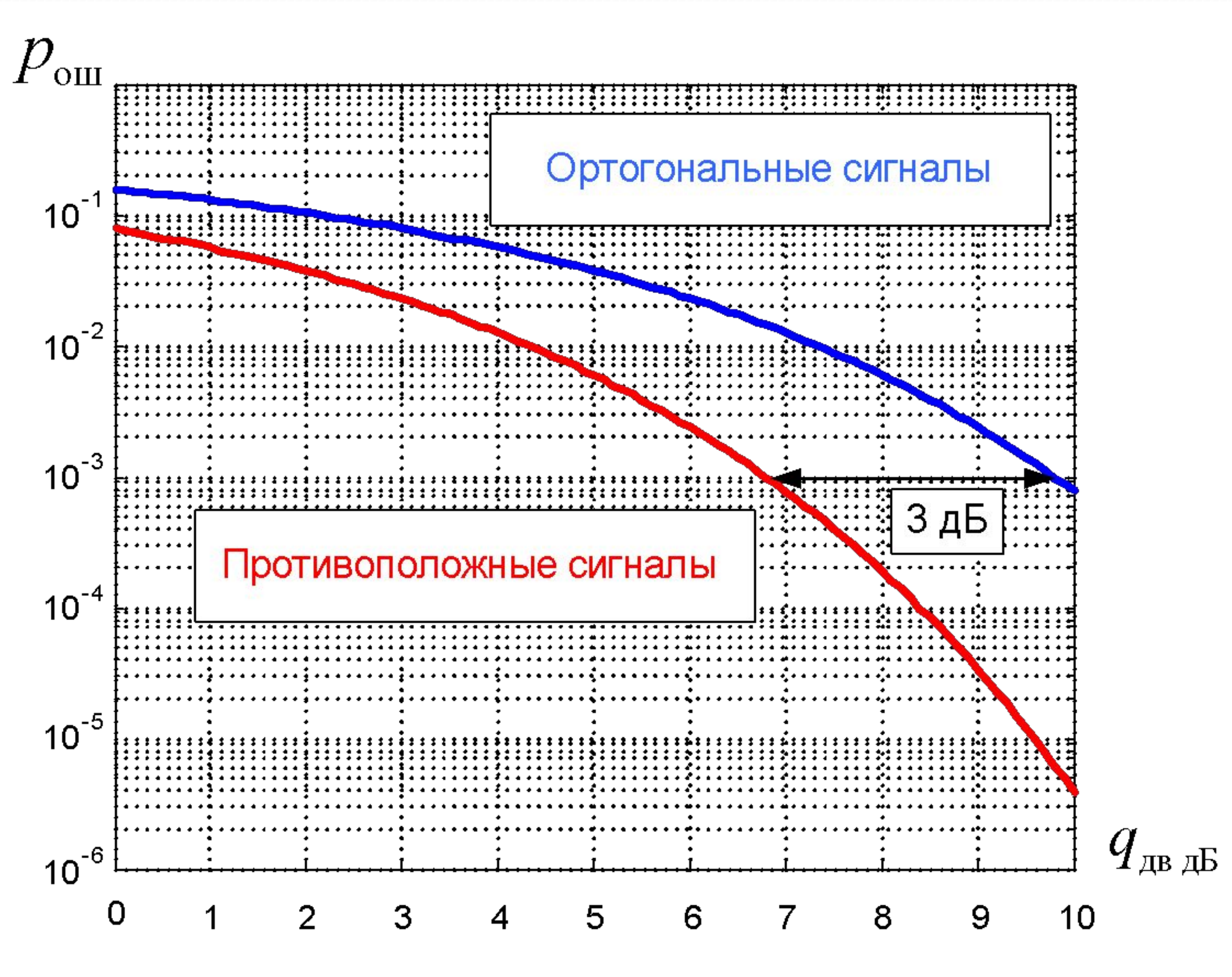
Противоположные сигналы: $r_{12} = -1$ $\quad p_{\text{ош. пр}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\dfrac{2E_{\text{с}}}{G_0}}\right) = p_{\text{ош min}}$

Ортогональные сигналы: $r_{12} = 0$ $\quad p_{\text{ош. орт}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\dfrac{E_{\text{с}}}{G_0}}\right)$

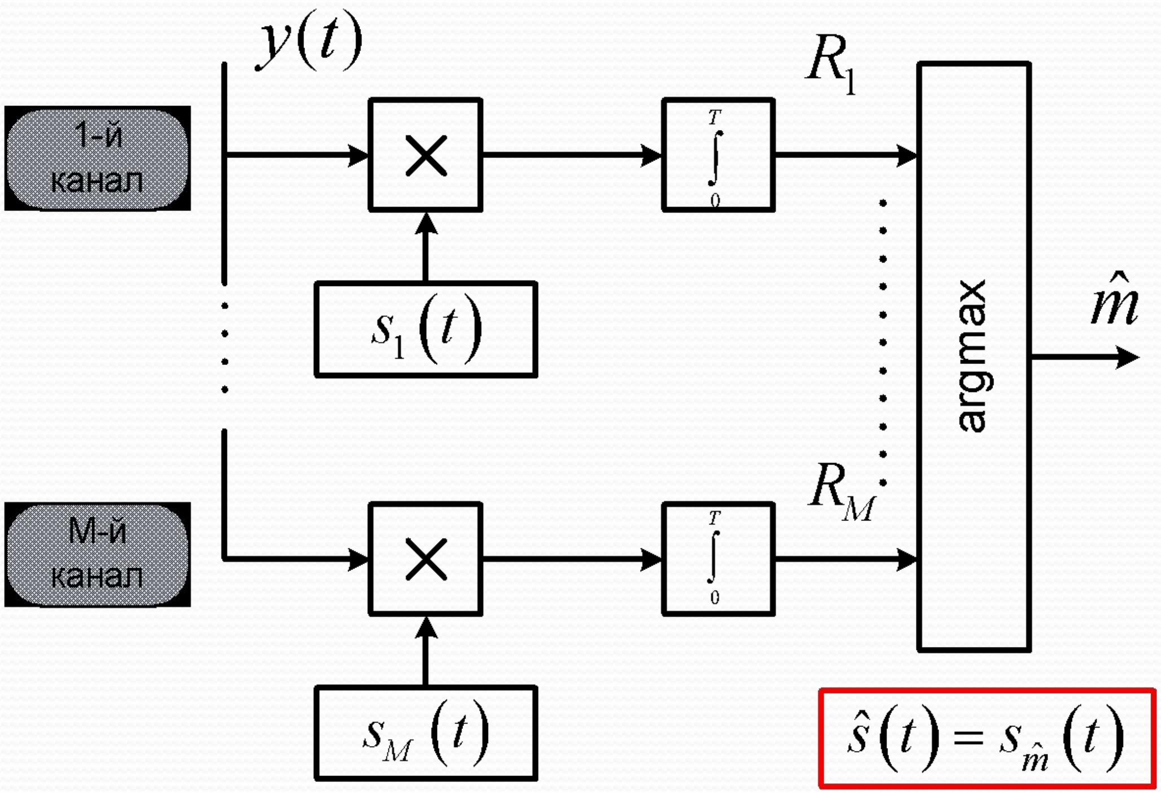
Неразличимые сигналы: $r_{12} = 1$ $\quad p_{\text{ош}} = \dfrac{1}{2} = p_{\text{ош max}}$

"Двоичное" отношение сигнал-шум $\quad q_{\text{дв}} = \dfrac{E_{\text{с}}}{G_0}, \quad q_{\text{дв дБ}} = 10\lg \dfrac{E_{\text{с}}}{G_0}$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов



Оптимальный приёмник для различения *M* равновероятных сигналов с одинаковой энергией



$$R_m = \int_0^T y(t) s_m(t)\, dt$$