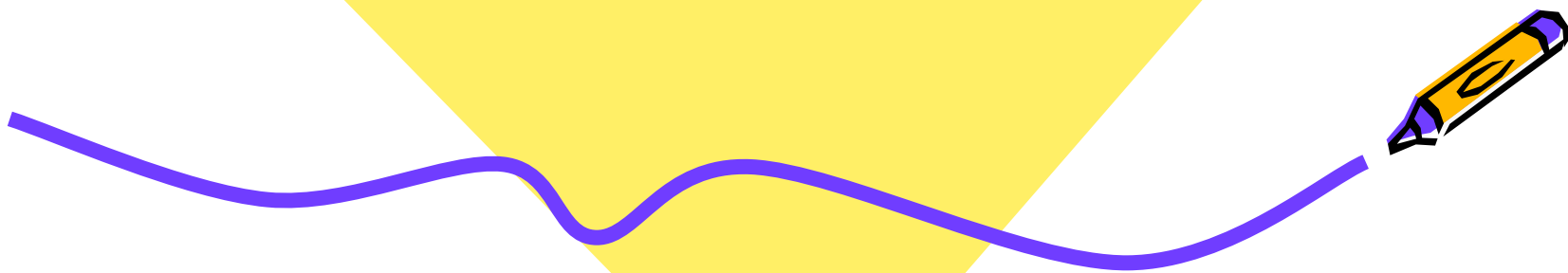




Элементы
комбинаторики.



Оглавление:



- 1. Понятие комбинаторики.
Способы решения простейших комбинаторных задач.
- 2. Перестановки.
- 3. Размещения.
- 4. Сочетания

Слайд 3

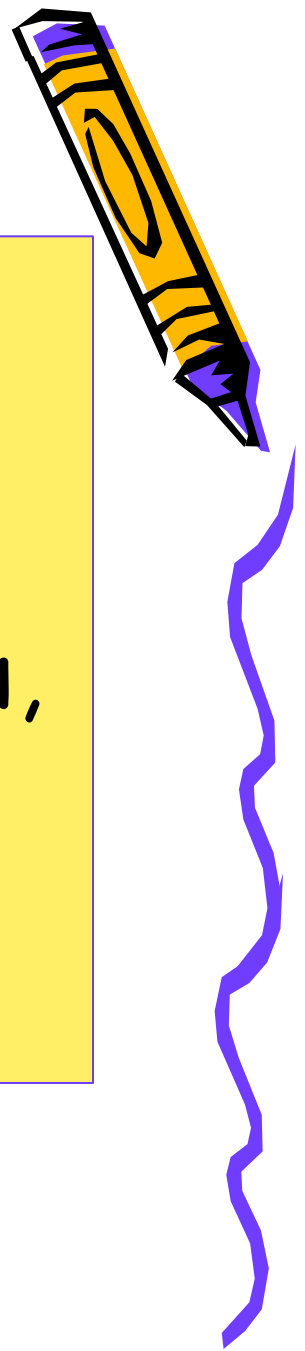
Слайд 27

Слайд 51

Слайд 59

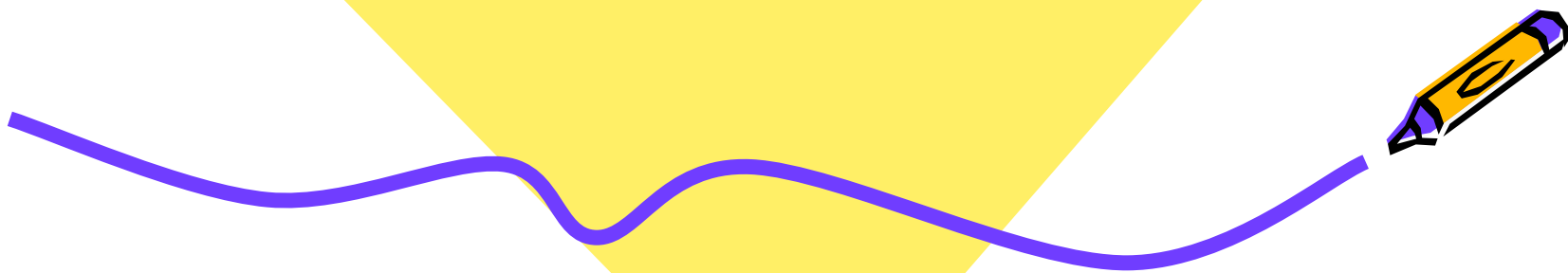


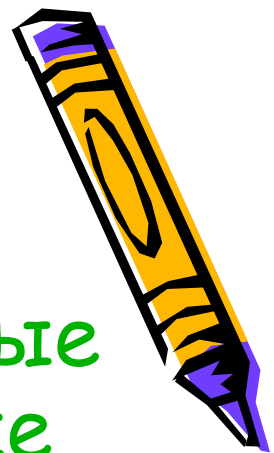
Основная цель: знакомство с понятиями «перестановка», «размещение», «сочетание» и соответствующими формулами, выработка умений решать несложные комбинаторные задачи.





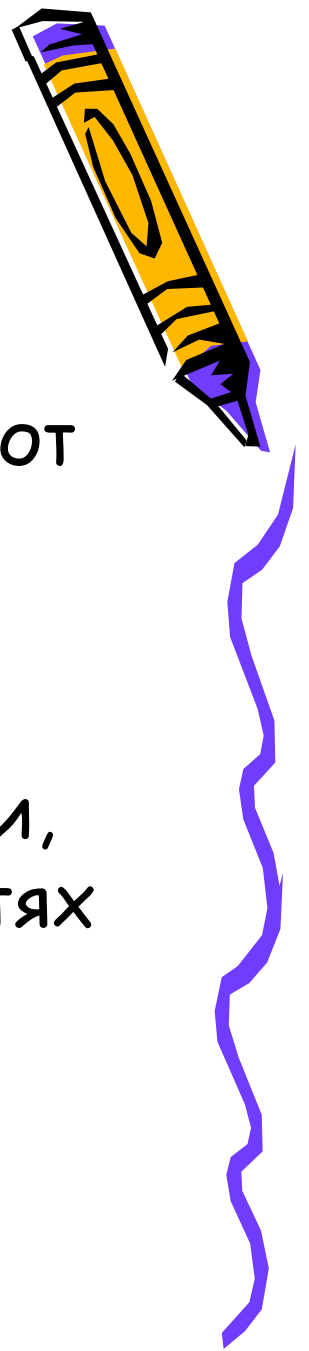
Элементы комбинаторики.





- В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название **комбинаторных** задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют **комбинаторикой**.





- Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать».
- Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний.



Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.



- **Пример 1.**
Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека - Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях.
- Сколько существует вариантов выбора этой пары?



Решение:

- Составим сначала все пары, которые входят Антонов. Получим 3 пары: **АГ, АС, АФ.**
- Выпишем пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две: **ГС, ГФ.**
- Составим пары, в которые входит Сергеев, но не входят Антонов и Григорьев. Такая пара только одна: **СФ.**
- Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров уже составлены.
- Итак, мы получили 6 пар: **АГ, АС, АФ,**

**ГС, ГФ,
СФ.**





- Итак, мы получили 6 пар: АГ, АС, АФ,
ГС, ГФ,
СФ.

Значит, всего существует **6 вариантов** выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют **перебором возможных вариантов**.



Пример 2.



- Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр **1,3,5,7**, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

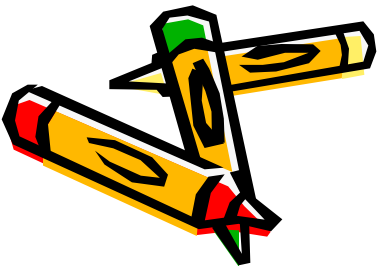


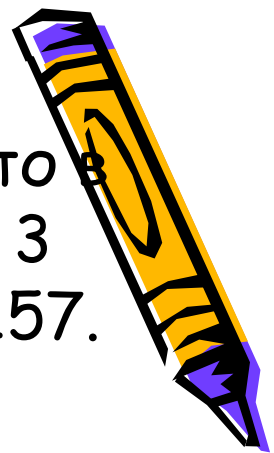
Решение:



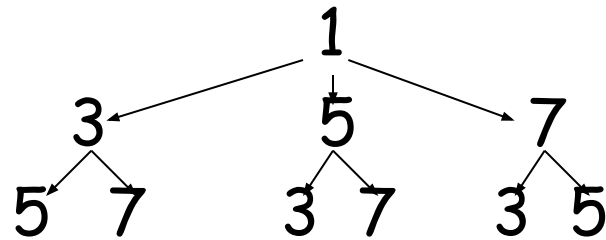
- Пусть на **первом месте** стоит цифра **1**.
- На **втором месте** может быть записана любая из цифр **3, 5** или **7**. Запишем, например, на втором месте цифру 3.
- Тогда в качестве **третьей цифры** можно взять **5** или **7**. Получим два числа 135 и 137.

- 1
- 3 ↙
- 5 7 →



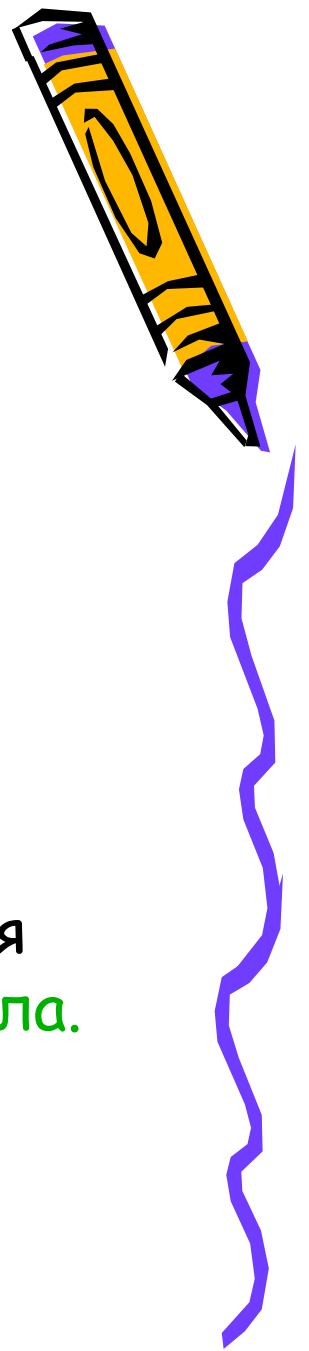


- 2) Если на втором месте записать цифру 5, то в качестве третьей цифры можно взять цифру 3 или 7. В этом случае получим числа 153 и 157.
- Если же, наконец, на втором месте записать цифру 7, то получим числа 173 и 175.



- Итак, мы составили все числа, которые начинаются с цифры 1. Таких чисел шесть:
135, 137, 153, 157, 173, 175.





- Аналогичным способом можно составить числа, которые начинаются с **цифры 3**, с **цифры 5**, с **цифры 7**.
- Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых шесть чисел:
- 135, 137, 153, 157, 173, 175.
315, 317, 351, 357, 371, 375,
513, 517, 531, 537, 571, 573,
713, 715, 731, 735, 751, 753.

Таким образом из цифр 1,3,5,7 (без повторения цифр) можно составить **24 трехзначных числа**.





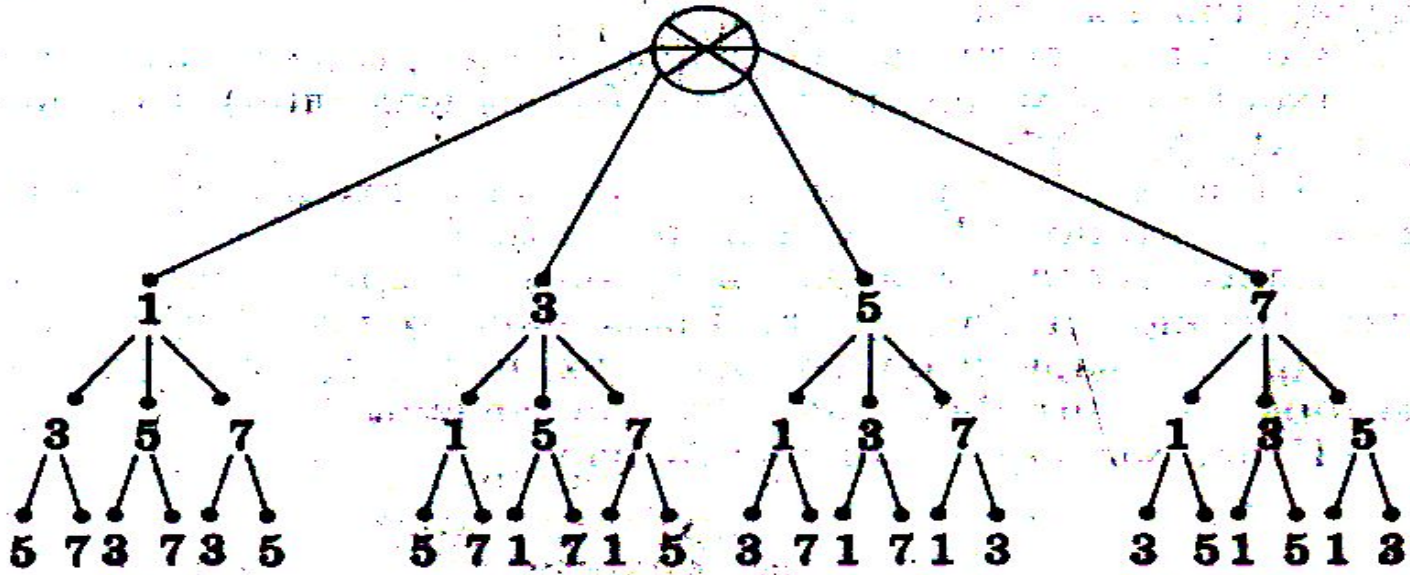
Проведенный перебор вариантов
проиллюстрирован на схеме.

Такую схему называют **деревом возможных вариантов**.

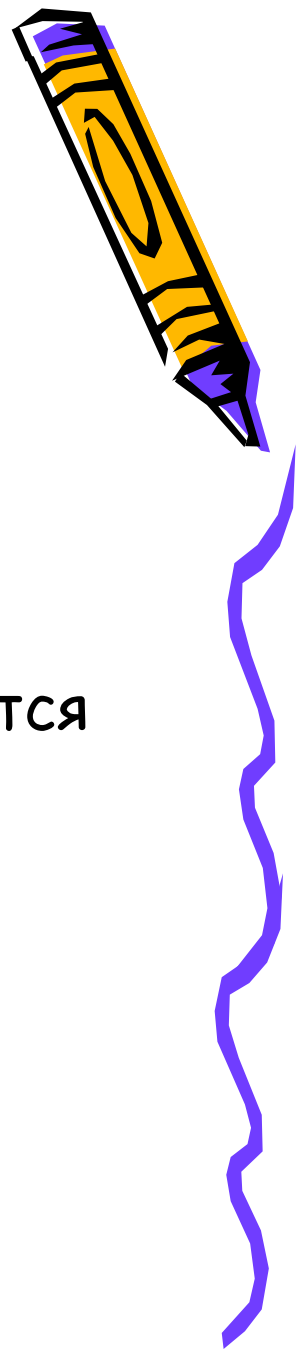
**Первая
цифра**

**Вторая
цифра**

**Третья
цифра**

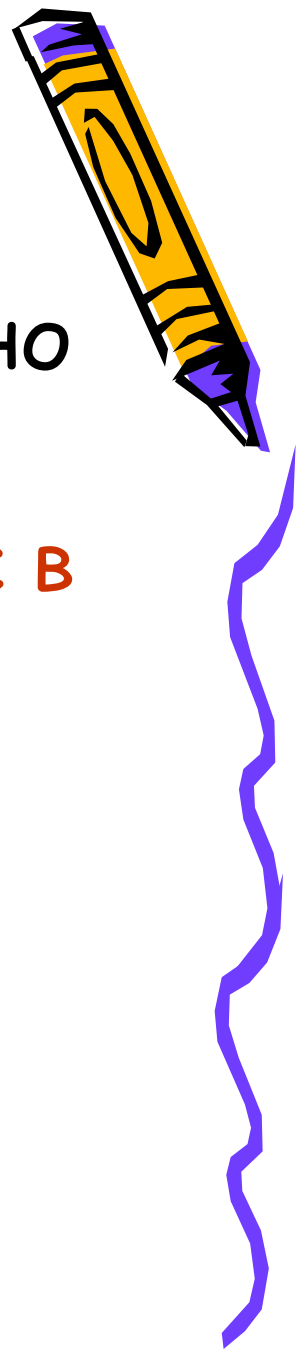


Второй способ решения.



- Ответить на поставленный вопрос в задаче можно не выписывая сами числа. То есть путем рассуждения.
- Первую цифру можно выбрать **четырьмя способами**.
- Так как после выбора первой цифры останутся три, то **вторую** цифру можно выбрать **тремя способами**.
- Наконец, **третью** цифру можно выбрать (из оставшихся двух) уже **двумя способами**.





- Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2$, т.е. 24.
- Отвечая на поставленный вопрос в задаче, мы использовали, так называемое комбинаторное правило умножения.



Общий вид комбинаторного правила умножения.



- Пусть имеется n элементов и требуется выбрать одним за другим некоторые k элементов.
- Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать из оставшихся элементов n_2 способами, затем третий элемент - n_3 способами и т.д., то **число способов**, которыми могут быть выбраны все k элементов, **равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$** .



Пример 3.



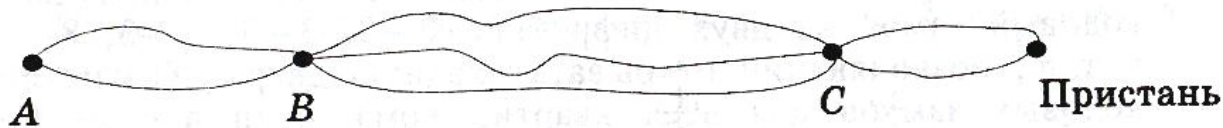
- Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C - три дороги, из города C до пристани - две дороги.



Туристы хотят проехать из города A через города B и C к пристани.

Сколькими способами они могут выбрать маршрут ?

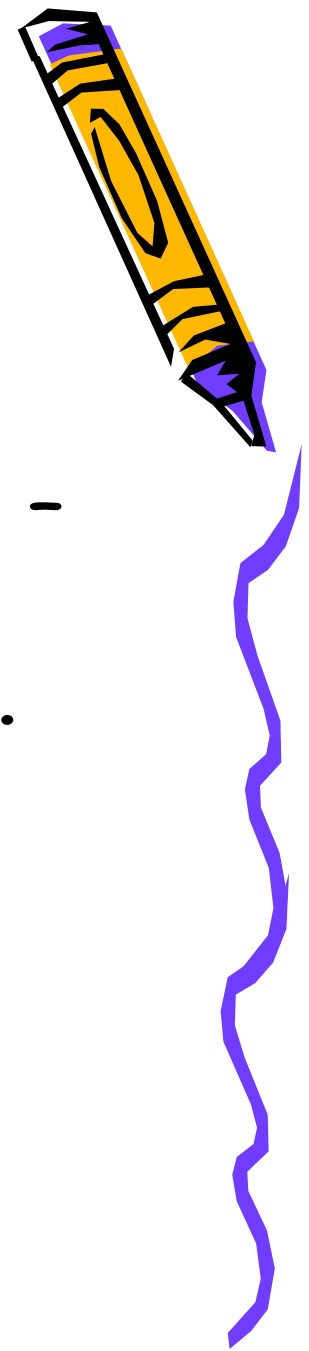




- **Решение.**
- Путь из А в В туристы могут выбрать **двумя** способами. Далее в каждом случае они могут проехать из В в С **тремя** способами. Значит, имеются $2 \cdot 3$ вариантов маршрута из А в С. Так как из города С на пристань можно попасть **двумя** способами, то всего существует $2 \cdot 3 \cdot 2$, **т.е. 12, способов** выбора туристами маршрута из города А к пристани.



Задача 1.



- В кафе предлагают
- два первых блюда:

борщ, рассольник -

и четыре вторых блюда:

гуляш, котлеты, сосиски, пельмени.

Укажите все обеды из двух блюд,
которые может заказать посетитель.

- Проиллюстрируйте ответ, построив дерево возможных вариантов.



Задача 2.



• У Ирины 5 подруг:

Вера,

Зоя,

Марина,

Полина

и Светлана.

Она решила двух из них пригласить в кино.

Укажите все возможные варианты выбора подруг.

Сколько таких вариантов?



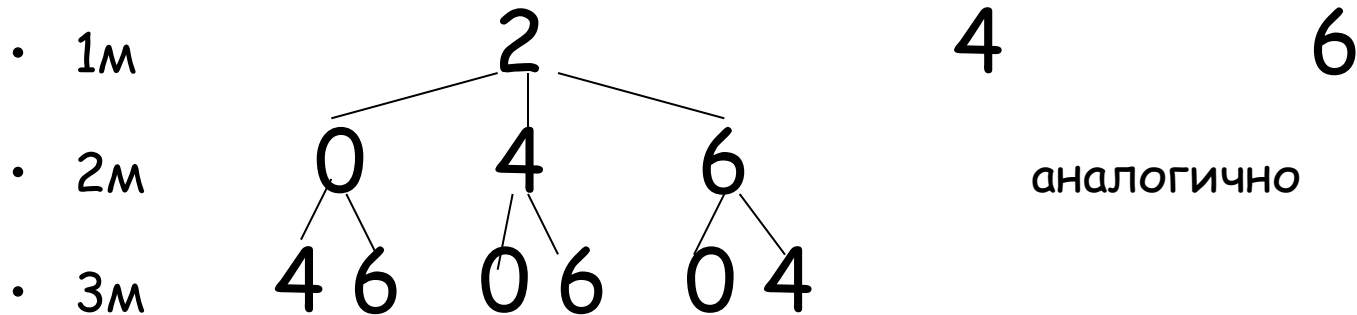
Задача 3.



- Используя цифры **0,2,4,6**, составьте все возможные **трёхзначные числа**, в которых цифры не повторяются.



Решение.



- Если на первом месте стоит цифра 2, то возможны шесть вариантов чисел: 204, 206, 240, 246, 260, 264.
- Аналогичные рассуждения проводятся, если на первом месте будет стоять цифра 4 или 6.
- Значит, существует $3 \times 6 = 18$ трехзначных чисел, в которых цифры 0, 2, 4, 6 не повторяются.



Задача 4

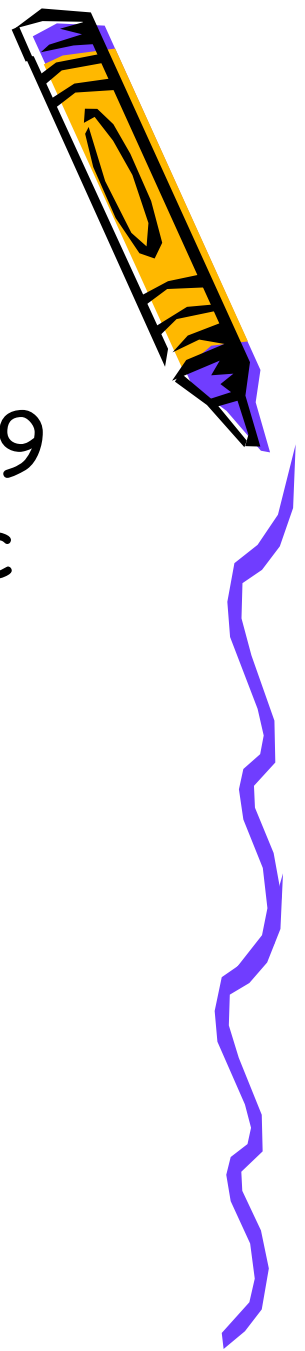


- Из цифр **1,2,3** составьте все возможные двузначные числа при условии, что:
 - а) цифры в числе не повторяются;
 - б) допускается повторение цифр в числе.



Задача 5.

- В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии.
- Сколько всего партий было сыграно?



Решение.



• * * * * * * * * *

(способ перебора)

1 2 3 4 5 6 7 8 9

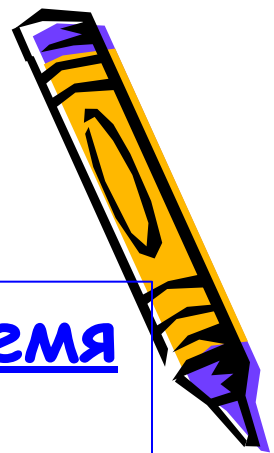
Первый с 8 - ю, второй с 7 - ю, третий с 6-ю, четвертый с 5-ю,
пятый с 4 - мя, шестой с 3 - мя, седьмой с 2 - мя, восьмой с 1-
м.

Всего $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ партий было сыграно.

Ответ: 36 партий.

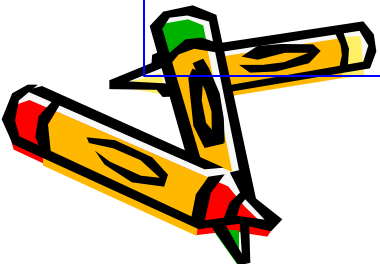


ИТОГ:



- Комбинаторные задачи решаются тремя способами:
- 1) с помощью простого перебора;
- 2) с помощью дерева возможных вариантов;
- 3) по правилу умножения.
- У каждого способа есть свои преимущества и недостатки.

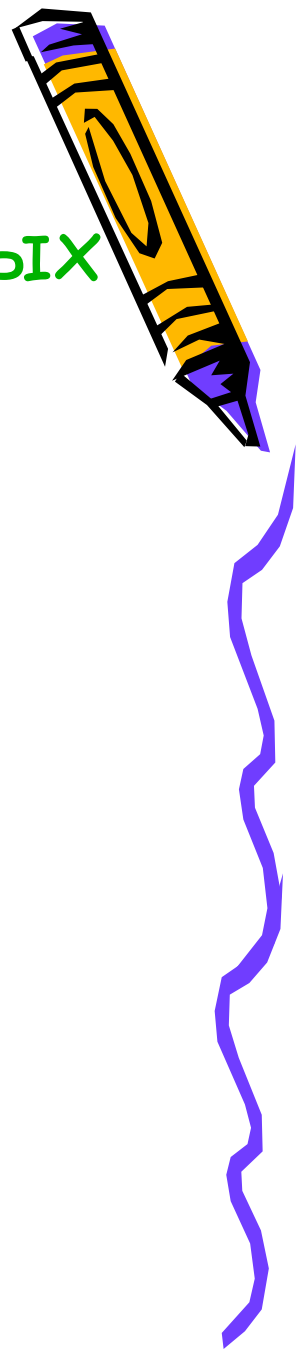
• Выбор решения за вами !



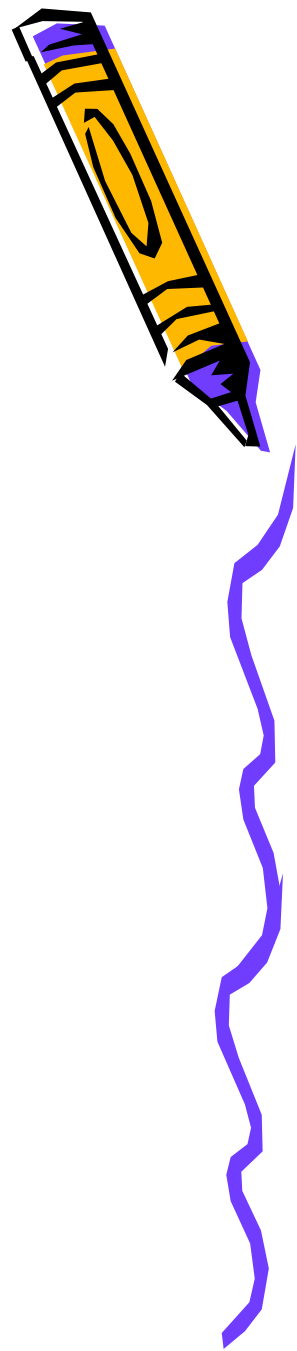
Факториал- $n!$

Определение: Произведение первых подряд идущих n натуральных чисел называют факториалом, обозначают $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$



Перестановки.



- Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются перестановки.



Перестановки.

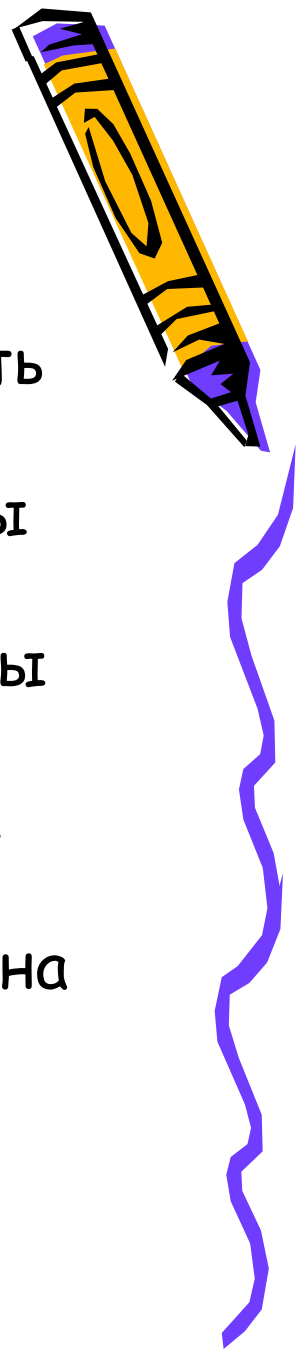
Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же *n различных* элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

$$P_n = n!$$

Где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, $1! = 1$; $0! = 1$.



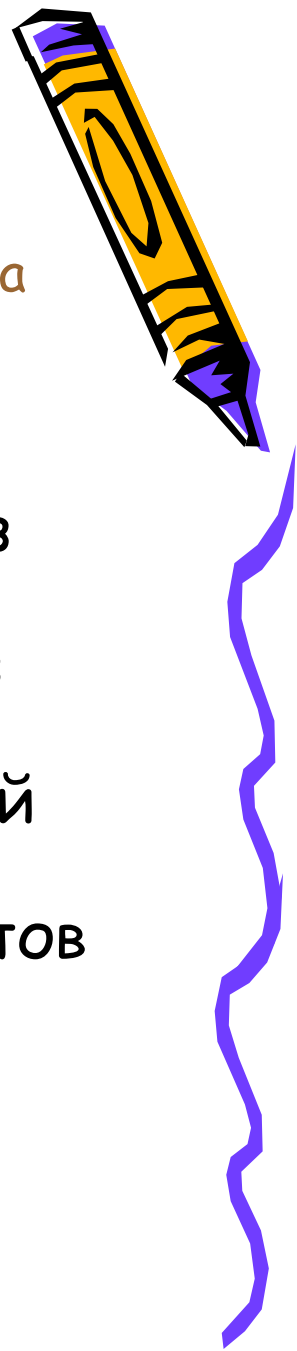
Рассмотрим задачу:



- Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами **а, в и с**. Эти книги можно расставить на полке по-разному.
- Если первой поставить книгу **а**, то возможны такие расположения книг: **abc, acb**.
- Если первой поставить книгу **в**, то возможны следующие варианты: **bac, bca**.
- Если первой поставить книгу **с**, то получим такие расположения: **сba, сab**.
- Получили **6 вариантов** расположения книг на полке.



Второй способ решения:

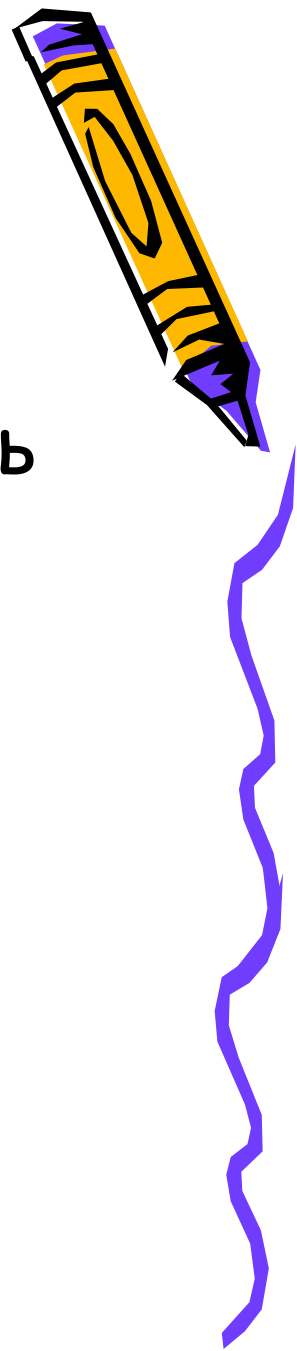


- Для того, чтобы найти число перестановок из трёх элементов, можно не выписывать эти перестановки, а воспользоваться правилом умножения.
- Будем рассуждать так:
- На первое место можно поставить любой из трёх элементов;
- На второе место можно поставить любой из двух оставшихся элементов;
- На третье место можно поставить последний третий элемент.
- Значит, число перестановок из трех элементов равно $3 \cdot 2 \cdot 1$, т.е. 6. (вариантов)

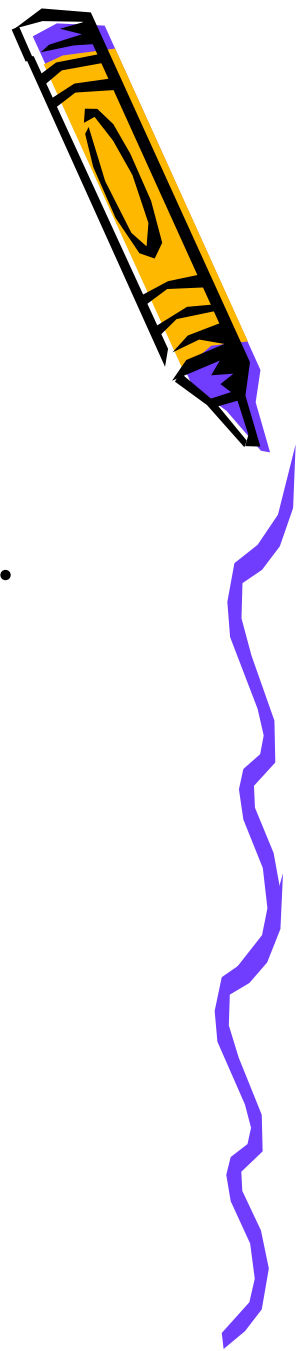


Задача 1.

- Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на 8 беговых дорожках?



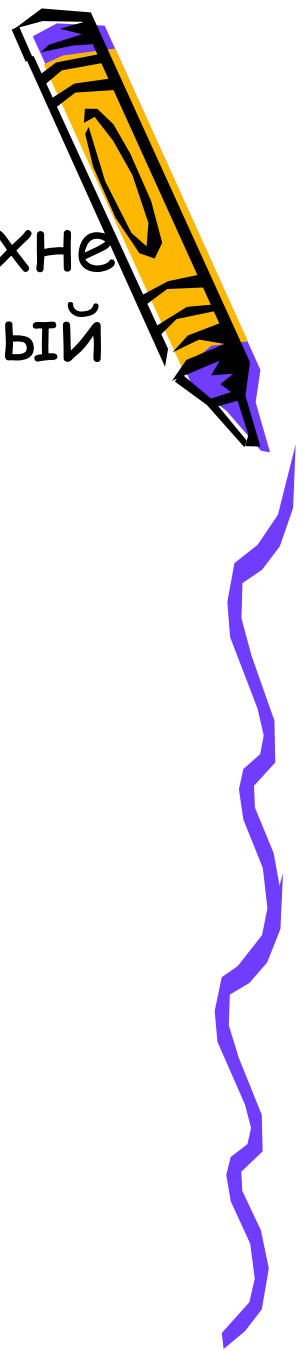
Решение.



- Существует P_8 всевозможных перестановок из 8 элементов, т.е.
- $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\ 320$ (способов)
- Ответ: **40 320** способов.



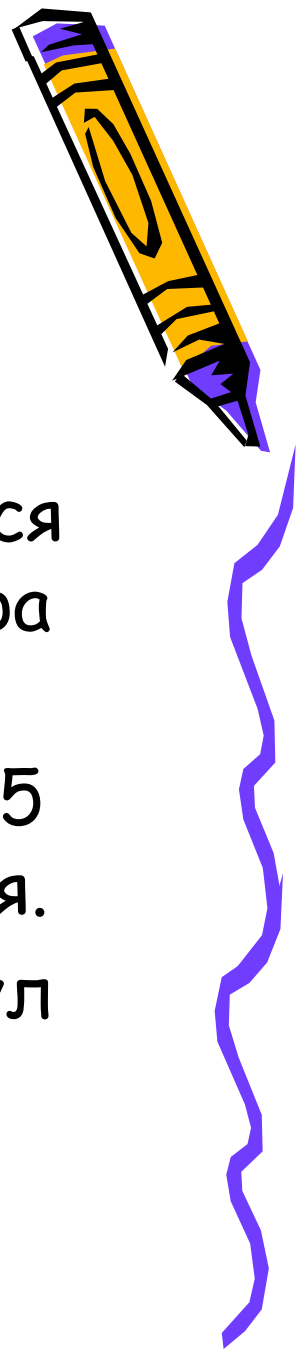
Задача 2



- В семье - **6 человек**, и за столом в кухне стоят **6 стульев**. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти 6 стульев по новому.
- Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?
- (т.е. нас интересует сколько всего существует различных способов их размещения на стульях).

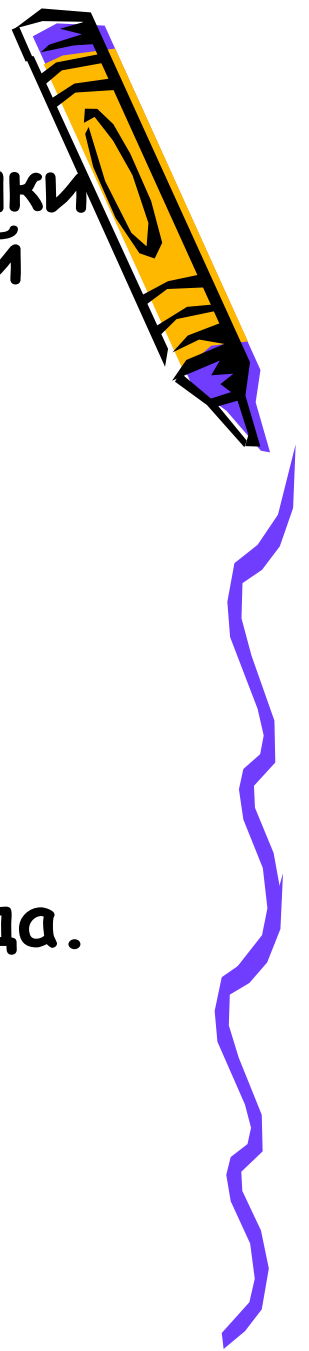


Будем рассуждать так:



- Будем считать, что в семье **бабушка, дедушка, мама, папа, дочь и сын**.
- Предположим, что **первой** усаживается бабушка. У неё есть 6 вариантов выбора стула.
- **Вторым** садится дедушка. У него есть 5 вариантов выбора стула из оставшихся.
- **Третьим** садится мама и выбирает стул из 4 оставшихся.





- У папы будет уже 3 варианта, у дочки - 2, ну а сын сядет на единственный незанятый стул.
- По правилу умножения получаем:
 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных способов размещения.

Таким образом,

в «игру с рассаживаниями»

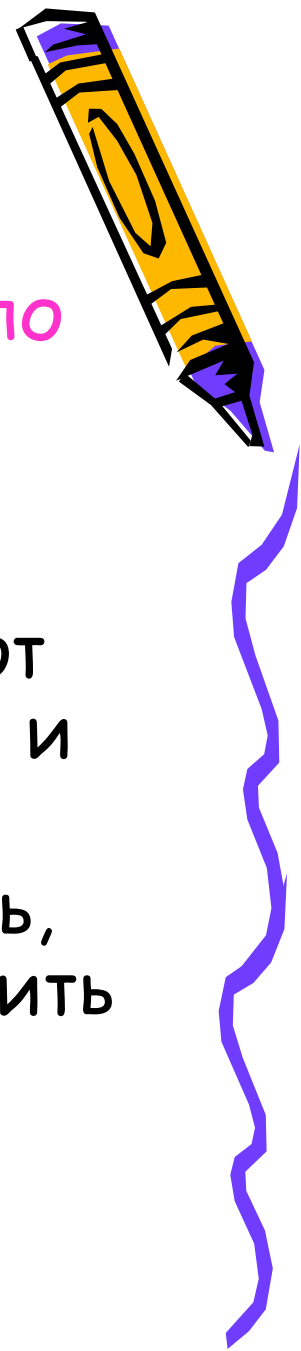
семья может играть 720 дней,

т.е. почти 2 года.

Ответ : 720.

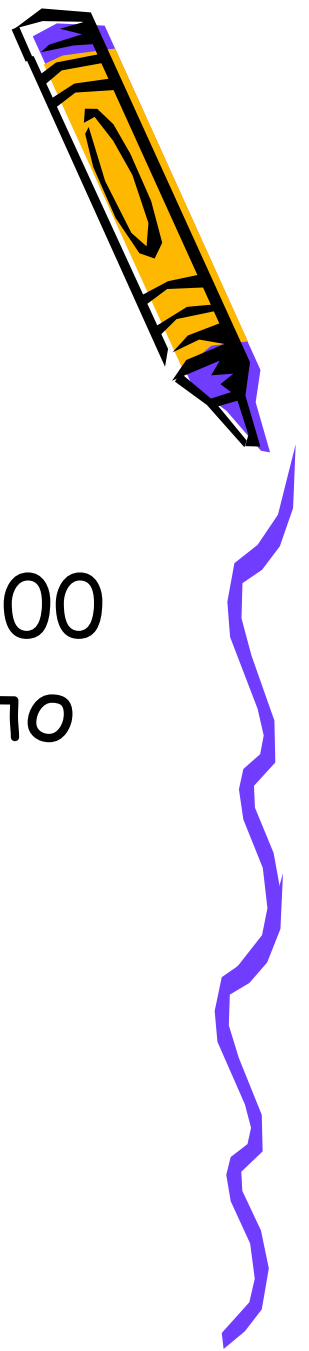


Задача 3.



- Десять разных писем раскладывают по одному в десять конвертов. Сколько существует способов такого раскладывания?
- Предложенная ситуация отличается от предыдущей тем, что там были люди и стулья, а здесь письма и конверты.
- Однако и здесь, и там требуется узнать, сколькими способами можно разместить n предметов на n местах.





- Решение.
- Повторяя предыдущее решение, получаем, что всего имеется $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$ способов раскладывания писем по конвертам.

Более 3,5 миллионов!!!



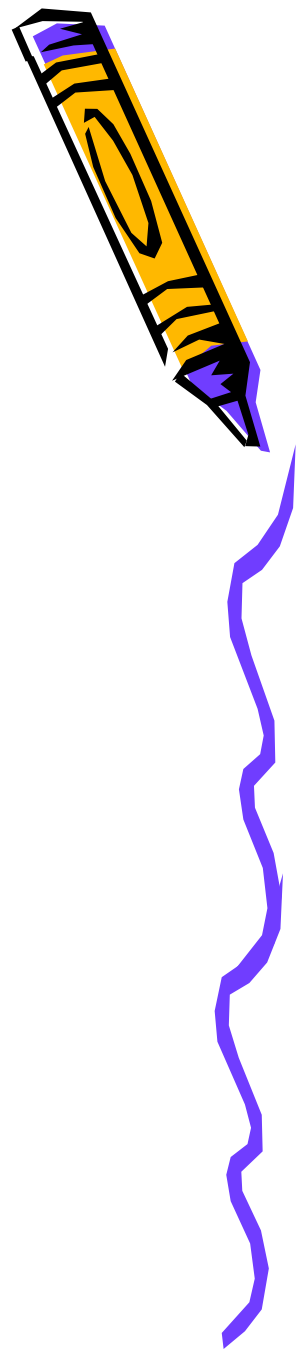
Таким образом, число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P_n = n!$



- **Задача 4.**
- Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?
- **Решение.**
- Т.к. число способов равно числу перестановок из 8 элементов, то по формуле числа перестановок находим, что
- $P_n = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$
- **Значит, существует 40 320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках.**



Несколько первых значений для $n!$



- $1! = 1$
- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $5! = 4! \cdot 5 = 120$
- $6! = 5! \cdot 6 = 720$ и т.д.



Задача 5.



- Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0,2,4,6?

- Решение.

Из цифр 0,2,4,6 можно получить P_4 перестановок. Но из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с нуля, т.к. натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число перестановок с нулем в начале равно трём, т.е. P_3 . Значит, искомое число четырехзначных чисел равно $P_4 - P_3$

- Получаем:

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$



Задача 6.



- Имеется 9 различных книг, четыре из которых - учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?
- **Решение.**
- Сначала рассмотрим учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов разложения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280$.

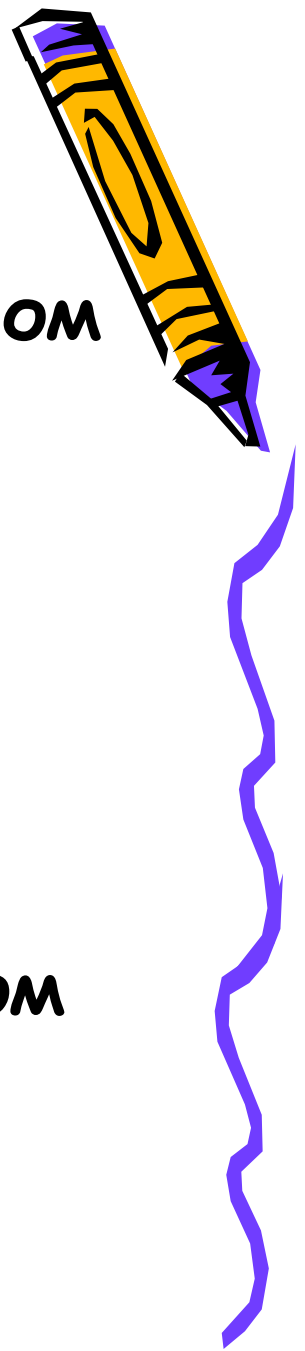


Задача 7.

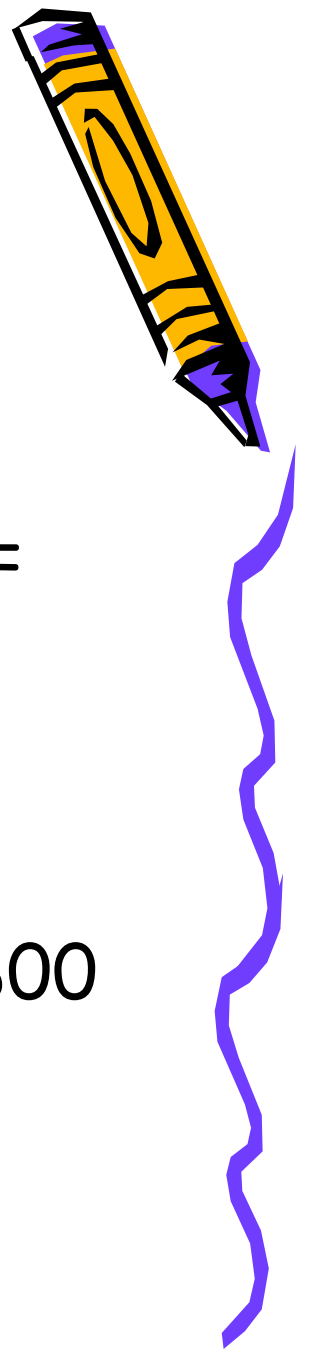
11 футболистов строятся перед началом матча. Первым становится капитан, вторым вратарь, а остальные случайным образом.

а) Сколько существует способов построения?

б) Сколько существует способов построения, если первым стоит капитан, а остальные в произвольном порядке?



Решение.

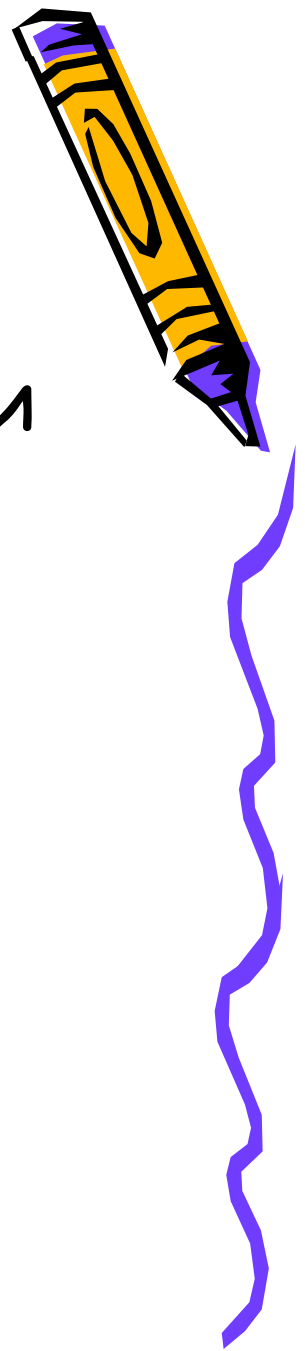


- а) К В
- Т.к. капитан и вратарь занимают постоянные первые два места, то всевозможных перестановок будет $P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$ (способов).
- б) т.к. только капитан занимает постоянное место, то всевозможных перестановок будет $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ (способов)



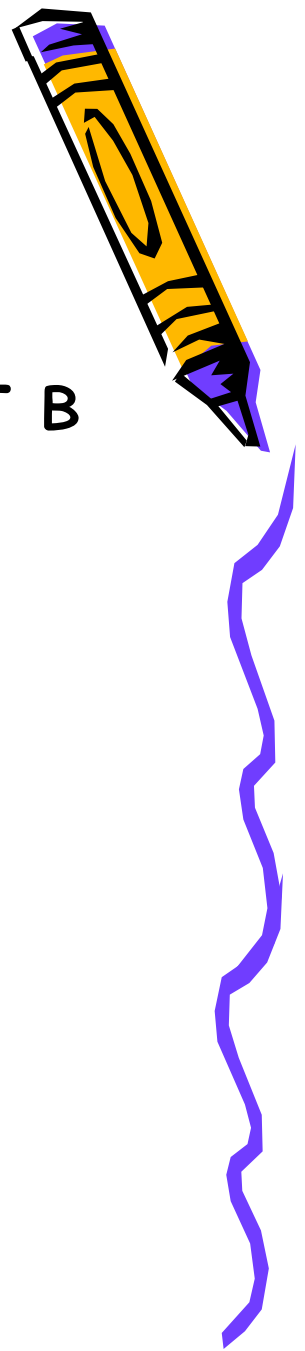
Задача 8.

- Сколькими способами можно обозначить вершины куба буквами А, В, С, D, E, F, G, К?



Задача 9.

- В гостинице семь одноместных номеров, и семеро гостей желают в них разместиться, причем трое заранее зарезервировали конкретные номера.
- Найдите число способов расселения семи гостей по семи номерам.



Задача



- а) На дверях четырех одинаковых кабинетов надо повесить таблички с фамилиями четырех заместителей директора. **Сколькими способами можно это сделать?**

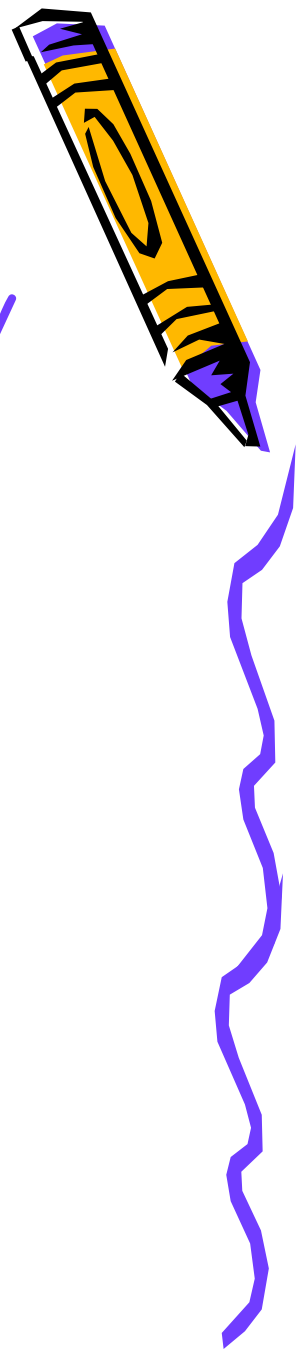




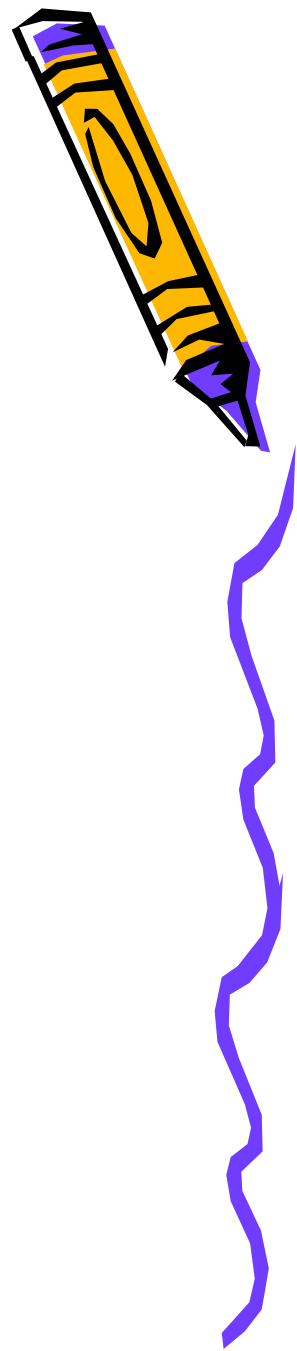
- б) В 9 классе в среду 5 уроков:
алгебра, геометрия, физкультура,
русский язык, английский язык.
- Сколько можно составить вариантов расписания на этот день?
- Сколько можно составить вариантов расписания, если алгебра и геометрия стоят вместе?



- в) Сколькими способами четыре вора могут разбежаться по одному на все четыре стороны?
- г) Адъютант должен развести пять копий приказа генерала по пяти полкам. Сколькими способами он может выбрать маршрут доставки копий приказа?



ОТВЕТЫ:



- 1. №8. 40320 способов.
- 2. №9. 24 способа.
- 3. №10. а) 24
- б) 120
- в) 24
- г) 120.



Размещения.

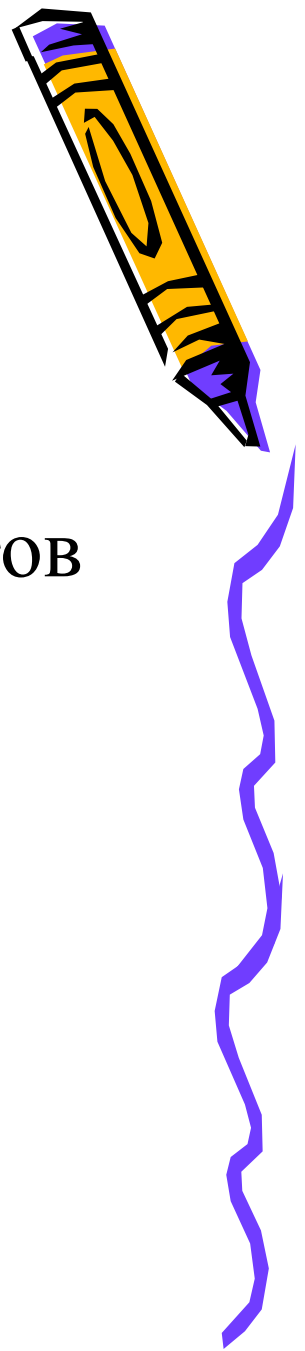
Размещениями называют комбинации, составленные из *n различных* элементов по *m* элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$



Если *m = n*, то

$$A_n^m = n! = P_n$$



Размещения

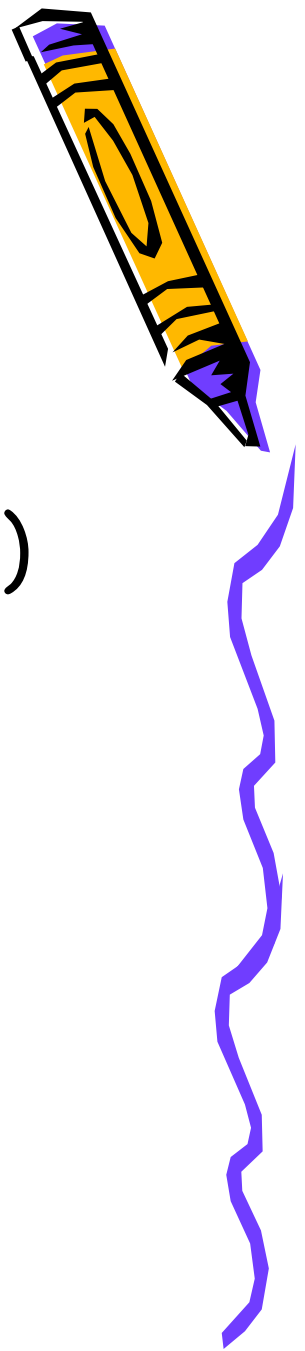


- Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.
- Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k (читают: «А из n по k »).
- Два размещения из n элементов по k считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.



Задача 1.

- Сколько трёхзначных чисел (без повторения цифр в записи числа) можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6?



Решение:



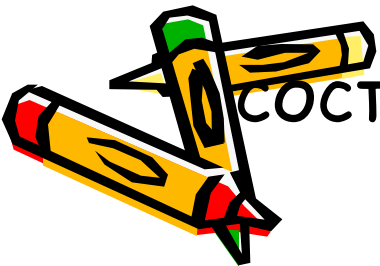
- 1) Если бы среди цифр не было нуля, то число трёхзначных чисел, которые можно составить из этих цифр, равно числу размещений из 7 элементов по 3.
- 2) т.к. среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трёхзначное число, то из размещений из 7 элементов по 3 надо исключить те размещения, у которых первым элементом является цифра 0.

0 ..

Их число равно числу из 6 элементов по 2.

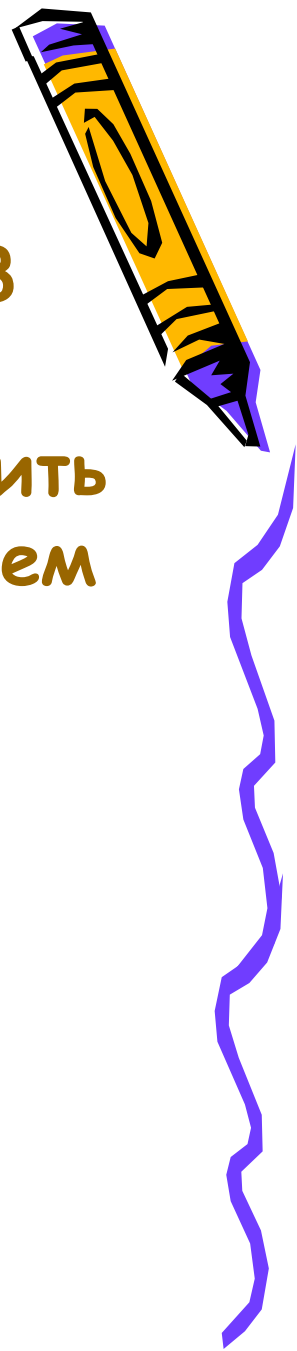
$$210 - 30 = 180 \text{ способов}$$

составления трехзначных чисел.

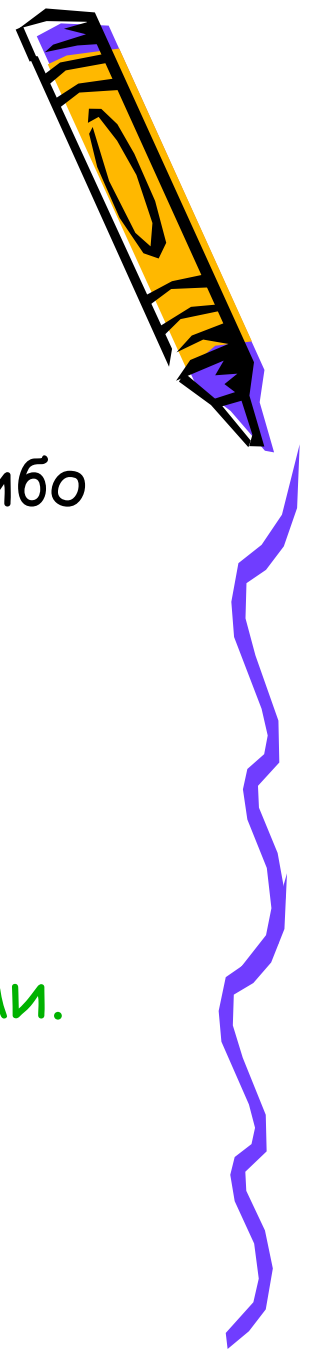


Задача 2.

- Учащиеся второго класса изучают 8 предметов.
- Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?



Решение.



- Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов.
- Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 8 элементов по 4.
- Имеем:

$$A_n^n = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

- Расписание можно составить 1680 способами.



Задачи для решения:

1. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?
2. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
3. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?
4. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

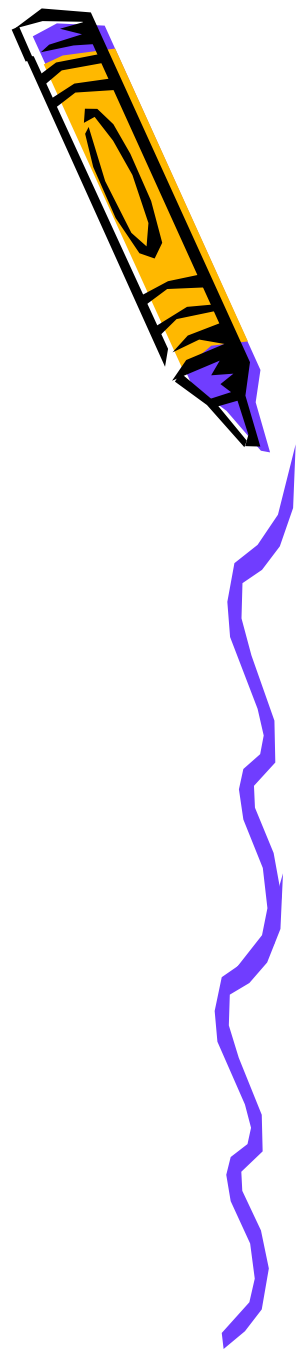


5. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал семи различных цветов?
6. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?
7. Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?
8. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места: а) 2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий.
9. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая отлична от нуля?



ОТВЕТЫ:

- 1. 24 способами.
- 2. 870 способами.
- 3. 336 способами.
- 4. 840 способами.
- 5. 210 способами.
- 6. 2730 способами.
- 7. 27 907 200 способами.
- 8. а) 30 способами; б) 360 способами; в) 720 способами.
- 9. 544 320 номеров.



Сочетания.



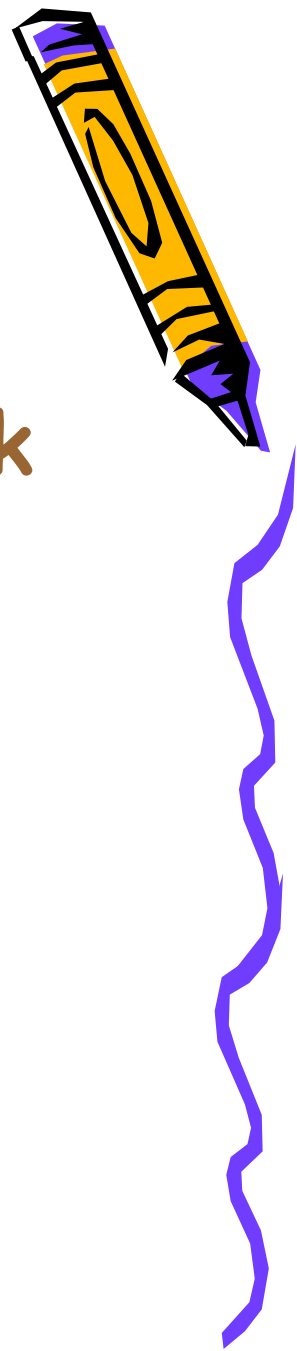
Сочетаниями называют комбинации, составленные из *n различных* элементов по *m* элементов которые отличаются только составом элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



Сочетания.

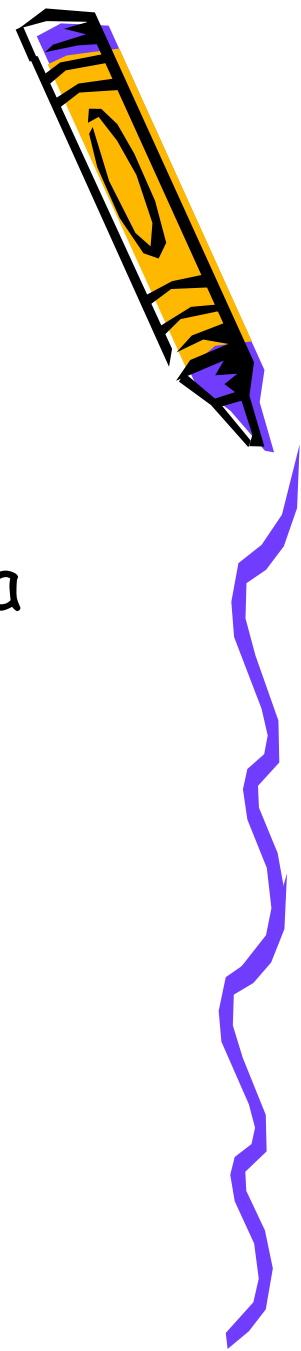
- Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.



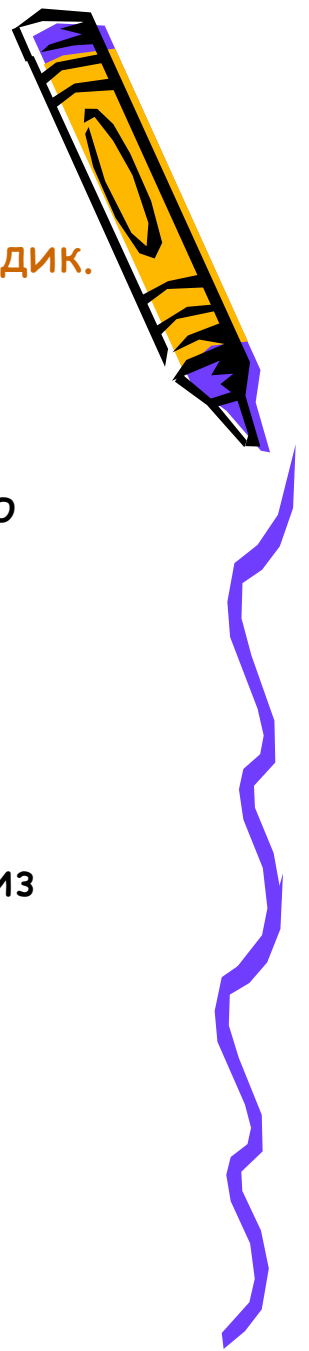
В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k

(читают «С из n по k »)



Задача 1.



- Пусть имеются 5 гвоздик разного цвета. Обозначим их буквами a, b, c, d, e . Требуется составить букет из трёх гвоздик. Выясним, какие букеты могут быть составлены.
- Если в букет входит гвоздика a , то можно составить такие букеты: $abc, abd, abe, acd, ace, ade$.
- Если в букет не входит гвоздика a , но входит гвоздика b , то можно получить такие букеты: bcd, bce, bde .
- Если в букет не входят ни гвоздика a , ни гвоздика b , то возможен только один вариант составления букета: cde .
- Итак, рассмотрены всевозможные способы составления букетов, в которых по - разному сочетаются три гвоздики из данных пяти.
- Говорят, что мы составили все возможные сочетания из 5 элементов по 3.

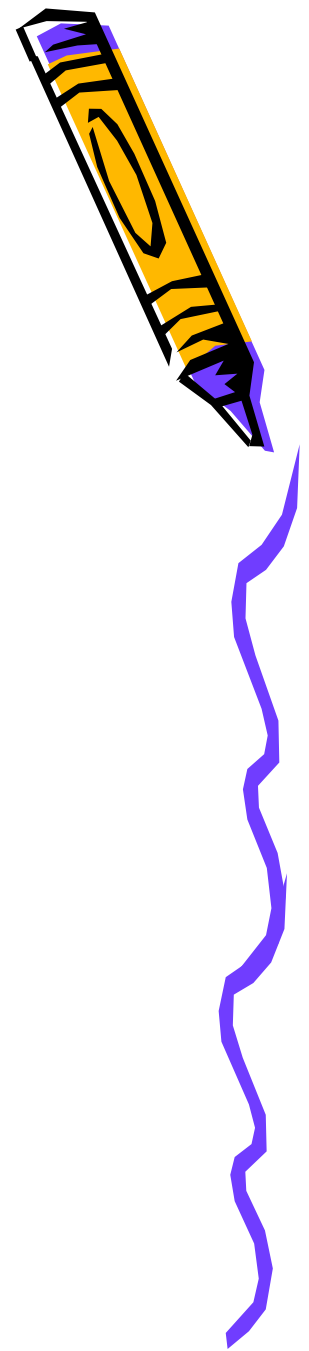
$$C_5^3 = 10$$



Формула числа сочетаний.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$





Эту формулу можно использовать и в случае, когда $n = k$, если принять по определению, что $0! = 1$.

- **Пример 1.**
- Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
- Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3.

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

- Трех дежурных можно выбрать 455 способами.



Пример 2.

Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

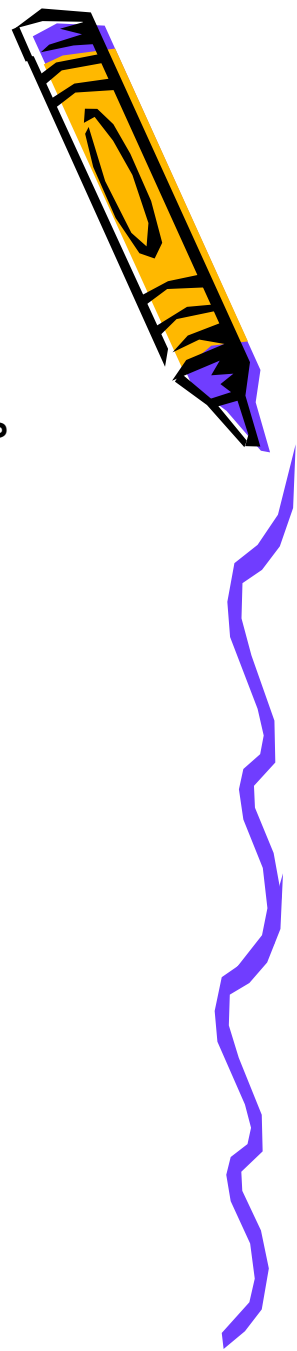
- Выбрать 3 яблока из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать две груши из 6 можно C_6^2 способами.

Так как при каждом выборе яблок груши можно выбрать C_6^2

Способами, то сделать выбор фруктов, о котором говорится в задаче, можно

$$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 1260$$

способами.



Задачи для решения:

1. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
2. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них три набора?
3. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

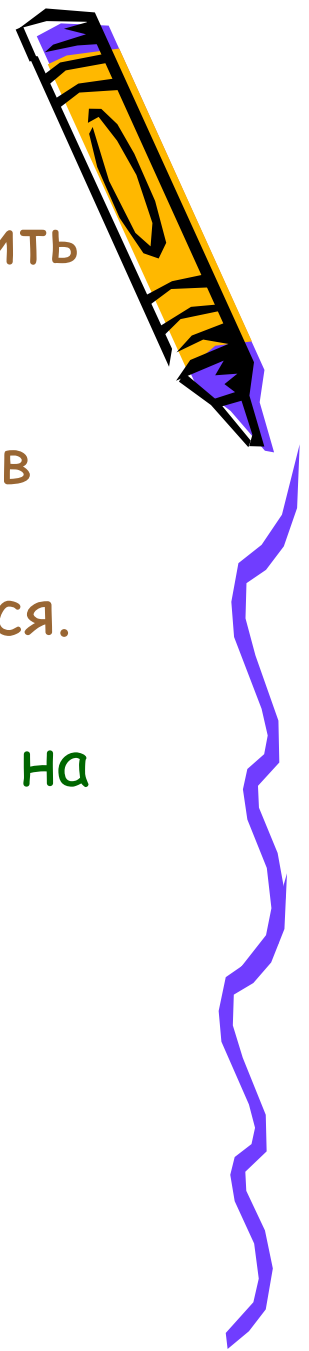


4. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами можно это сделать, если:

- а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку;
- б) заведующий лабораторией должен остаться.

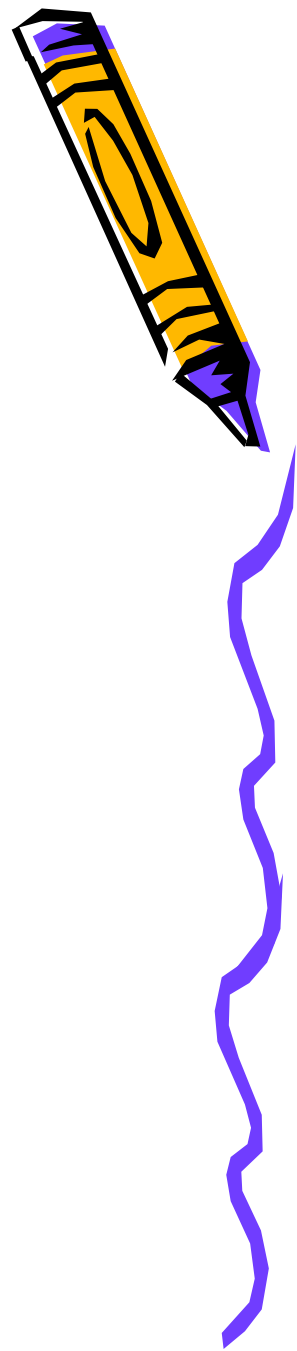
5. На полке стоит 12 книг: англо - русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:

- а) словарь нужен ему обязательно;
- б) словарь ему не нужен.



Отвeты:

- 1. 21 способом.
- 2. 56 способами.
- 3. 210 способами.
- 4. а) 462 способами; б) 252 способами.
- 5. а) 55 способами; б) 165 способами.



Литература:

1. Макарычев Ю.Н.

- Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. Пособие для учащихся 7 - 9 кл. общеобразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; под ред. С.А. Теляковского. - 4-е изд.-М.: Просвещение, 2006.

2..Макарычев Ю.Н.

- Изучение алгебры в 7 - 9 классах : кн. Для учителя / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова. - 2-е изд. - М.: Просвещение,2006.

3. Мордкович А.Г., Семенов П.В.

- События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Доп. Параграфы к курсу алгебры 7 - 9 кл. общеобразоват. Учреждений. - 3 - е изд. - М.: Мнемозина, 2005.

