Лекция №4 (1139, 1140)

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАНГ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ.

Летучка

(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Матрица – это…
2) Определитель матрицы – это…
3) Матрица A называется невырожденной, если …
4) Определение обратной матрицы A^{-1} : …
5) Формула для решения системы уравнений с помощью обратной матрицы: $X =$

Летучка(ответы)

1) Матрица – это прямоугольная таблица чисел.

2) Определитель матрицы –это число, которое соответствует каждой квадратной матрице.

3) Матрица A называется невырожденной, если $|A| \neq 0$.

4) Определение обратной матрицы A^{-1} :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

5) Формула для решения системы уравнений с помощью обратной матрицы: $X = A^{-1} \cdot B$.

Элементарные преобразования

Пусть задана система из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Элементарными преобразованиями уравнений системы называются:

1. перестановка местами двух любых уравнений системы;
2. умножение какого-либо уравнения системы на число $\alpha \neq 0$;
3. прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на любое число β.

Элементарные преобразования не изменяют решения системы, то есть приводят к эквивалентной системе.

Пример элементарных преобразований

Пусть задана система из 4 уравнений с 4 неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Переставим местами первое и четвертое уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \quad \Big| \times (-3) \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на число -3:

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases} \quad +$$

Сложим первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 8x_2 + 0 \cdot x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ -8x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Можно убедиться что числа: $x_1 = 1;$
$x_2 = 2;$
$x_3 = 3;$
$x_4 = 4;$

являются решениями заданной системы и любой преобразованной системы.

(сделать проверку дома)

Исследование системы уравнений

$$A \cdot X = B$$

не имеет
ни одного
решения
несовместна

имеет
хотя бы одно
решение
совместна

имеет
единственное
решение
определенная

имеет
более одного
решения
неопределенная

Исследование системы уравнений

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение.

Совместная система называется неопределенной, если она имеет более одного решения.

Исследовать и решить систему - это значит:

- установить, совместна она или несовместна;
- если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной;

- в случае определенной системы найти ее единственное решение;
- в случае неопределенной системы указать множество всех ее решений.

(какой ответ следует дать в случае несовместной системы?)

Запишем систему уравнений в матричной форме: $A \cdot X = B$

Если A -квадратная невырожденная матрица, то система совместна и имеет единственное решение. (назовите два известных способа)

Пусть теперь задана система, в которой число уравнений m не равно числу неизвестных n $(m \neq n$, система общего вида).

Матрица такой системы $A_{m \times n}$ является прямоугольной.

Элементарным преобразованиям уравнений соответствуют в матрице $A_{m \times n}$:

1. перестановка двух строк;
2. умножение строки матрицы на число $\alpha \neq 0$;
3. прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на любое число β.

ВОПРОС: если эти действия применить к столбцам, изменятся ли решения системы ?

ОТВЕТ: перестановка столбцов не изменяет решения; другие действия (2. и 3.) изменяют, поэтому они запрещены для столбцов.

Ранг матрицы

С помощью элементарных преобразований матрицу системы $A_{m\times n}$ можно привести к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2\,r} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{r\,r} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- все нулевые строки являются последними (их можно вычеркнуть);
- все элементы, расположенные левее и ниже первого ненулевого элемента каждой строки, равны нулю:

Число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы назовем ее РАНГОМ и обозначим $r = \operatorname{rang} A$.

Выделенный определитель порядка r назовем БАЗИСНЫМ МИНОРОМ.

Пример вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times 3 \; + \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times 2 \; + \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} + \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 2 \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 11 \; +$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times (-5) \; + \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = \operatorname{rang} A = 2;$$