Тема 4

Молекулярные (сложные) суждения

Сложные суждения

- Исчисление высказываний
  - Понятие высказывания
  - Формы высказываний
  - Логические значения высказываний
- Виды сложных суждений
  - Отрицание
  - Конъюнкция
  - Дизъюнкция
  - Исключающая (строгая) дизъюнкция
  - Импликация
  - Эквиваленция (эквивалентность)
- Логические отношения между сложными суждениями и их членами
- Функция истинности
  - Вычисление функции истинности
  - Равносильные формулы

Исчисление высказываний
Понятие высказывания

- Высказывание – предложение, выражающее суждение.
  - Если суждение, составляющее содержание (смысл) высказывания, истинно, то и высказывание истинно; ложным же называется высказывание, выражающее ложное суждение.
- Логические постоянные – логические союзы (связки) и кванторы.
  - Логические операторы – символы, представляющие логические связки и кванторы.
- Логические (пропозициональные) связки – слова и словосочетания «не», «неверно, что», «и», «или», «либо..., либо», «если..., то», «тогда и только тогда, когда» и др., а также их ближайшие синонимы.
- Кванторы – словосочетания «для всех… имеет место, что», «для некоторых имеет место, что» и их ближайшие синонимы.
- Элементарные высказывания – высказывания, не содержащие логических постоянных.
- Сложные высказывания – высказывания, содержащие логические постоянные.

Исчисление высказываний
Формы и логические значения высказываний

- Логические (истинностные) значения высказываний – «истинность» и «ложность».
- Предметная переменная – переменная, которая принимает значение из множества, для которого определён соответствующий предикат.
  - Предметные переменные принято обозначать строчными буквами латинского алфавита x, y, z.
- Формы высказываний – неполные высказывания, содержащие предметные переменные.
- Форма высказывания превращается в истинное или ложное высказывание в результате
  - подстановки единичных терминов вместо всех предметных переменных;
  - присоединения квантора.
- Истинность или ложность сложного высказывания является функцией логических значений элементарных высказываний, т.е. определяется в зависимости от истинности или ложности составляющих его элементарных высказываний.

Сложное (молекулярное) суждение

то, составными частями которого являются простые суждения или их сочетания

Например:

«Вечно он был занят либо судебной речью, либо домашними упражнениями, либо обдумывал, либо писал».

- Виды сложных суждений
- конъюнкция
- слабая дизъюнкция
- сильная дизъюнкция
- отрицание
- эквиваленция
- импликация

Символическая запись логических союзов

Логический союз	символ	аналог в естественном языке
Конъюнкция	$\wedge$, &, $\bullet$, $\times$ *	«и», «а», «но», «тогда как», «… при том, что …», запятая и т. п.
Слабая дизъюнкция	|, $\vee$, +,	«или», «либо», «или ..., или ...», «либо ..., либо …»
Строгая дизъюнкция	$\underline{\vee}$, $\oplus$, $\nLeftrightarrow$, $\tilde{\vee}$, $\vee\vee$	
Импликация	$\rightarrow$, $\supset$	«если ..., то ...»
Эквиваленция	$\leftrightarrow$, $\equiv$	«…тогда и только тогда, когда…»
Отрицание	$\neg$, ~	«неверно, что»,

Примеры

У одной девочки на носу выросли голубая и розовая ленты.	**a ∧ b**
Внутри этого устройства звенят болты и гайки.	**a ∨ b**
Эта рыба либо корюшка, либо ряпушка.	**a $\underline{\vee}$ b**
Если вещество является металлом, то оно электропроводно.	**a → b**
Фиорелло идёт в кино тогда и только тогда, когда там показывают комедию.	**a↔b**
Неверно, что слоны умеют летать.	**¬ a**

Понятия необходимого и достаточного условий

А является **достаточным** условием ***В***, если и **только если А и В** связны между собой таким образом, что в каждом случае, **когда имеется А, имеется и В**

А является **необходимым** условием **В**, если и **только если *А* и *В*** связаны между собой таким образом, что в каждом случае **при отсутствии А, отсутствует В**

(это высказывание эквивалентно высказыванию «Если В, то А»)

если А – необходимое условие В, то В – достаточное условие А, и наоборот

Способы отрицания суждений

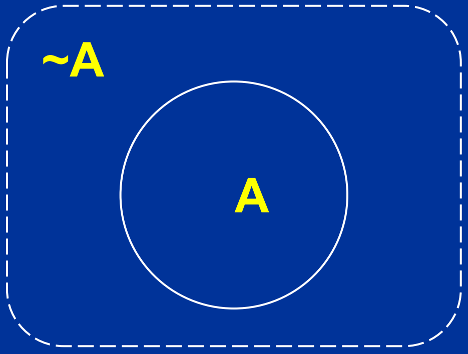
простое	Земля не является шаром
сложное	Неверно, что земля шар»

Виды сложных суждений
Отрицание (инверсия)

Отрицание –
логическая операция,
в результате которой из данного высказывания
получается высказывание, контрадикторное исходному.

Логическое значение отрицания
определяется следующим образом:
1) отрицание ложно, если отрицаемое суждение истинно,
2) отрицание истинно, если отрицаемое суждение ложно.

A	~A
и	л
л	и



Отрицание (инверсия)

если А истинно, то его отрицание ложно и наоборот

Неверно, что салат растет на деревьях.

А – салат растет на деревьях

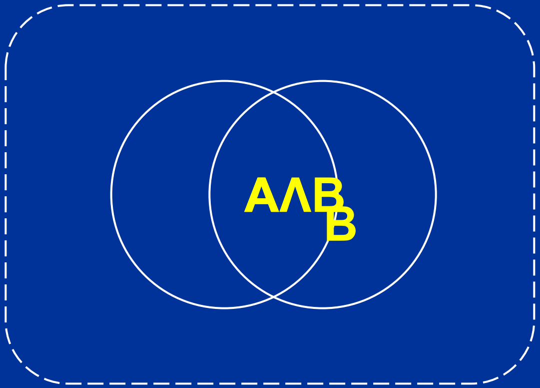
А	**¬ А**
И	Л
Л	И

Виды сложных суждений
Конъюнкция

Конъюнкция –
логическая операция,
соединяющая несколько высказываний с помощью союза (пропозициональной связки) «и».

Логическое значение конъюнкции определяется следующим образом:
1) конъюнкция истинна, только если все её члены истинны;
2) конъюнкция ложна, если хотя бы один из её членов ложен.

A	B	A Λ B
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л



Конъюнкция

истинна только в том случае, когда оба эти суждения истинны, а во всех остальных случаях конъюнкция ложна

Письмо пришло, но меня не было дома.

A – письмо пришло,
B – меня не было дома

A	B	$(A \wedge B)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Виды сложных суждений
Дизъюнкция

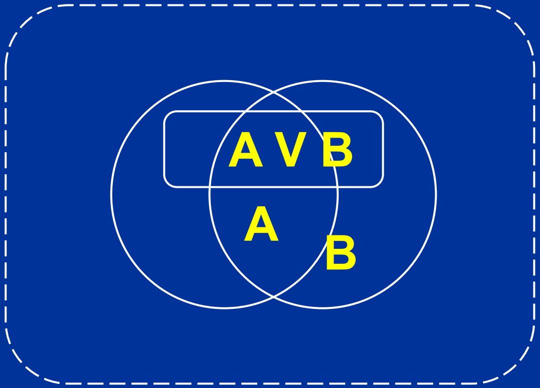
Дизъюнкция –
логическая операция,
соединяющая несколько высказываний с помощью союза (пропозициональной связки) «или».

Логическое значение дизъюнкции определяется следующим образом:

1) дизъюнкция истинна, если хотя бы один из её членов истинен;

2) дизъюнкция ложна, только если все её члены ложны.

A	B	A V B
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л



Слабая дизъюнкция

истинна при всех комбинациях значений *A* и *B*, кроме того, когда оба эти суждения ложны

Он изучает английский, или он изучает немецкий.

A – он изучает английский,
B – он изучает немецкий

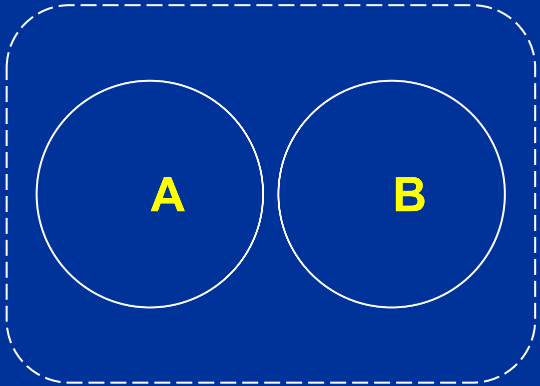
A	**B**	**(A ∨ B)**
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Виды сложных суждений
Исключающая (строгая) дизъюнкция

Исключающая (строгая) дизъюнкция –
логическая операция,
соединяющая два высказывания с помощью
союза (пропозициональной связки) «либо…, либо…».

Логическое значение исключающей (строгой) дизъюнкции определяется следующим образом: 1) строгая дизъюнкция истинна, если один из её членов истинен, а другой ложен;
2) строгая дизъюнкция ложна, если её члены оба истинны или оба ложны.

A	B	A $\underline{V}$ B
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	л



Полная и неполная дизъюнкция

Среди дизъюнктивных суждений следует различать полную и неполную дизъюнкцию.

Символически это суждение можно записать следующим образом: <A v B v C>.

Например: «Леса бывают лиственные, хвойные или смешанные». Полнота этого разделения (в символической записи обозначается знаком <...>) определяется тем, что не существует, помимо указанных, других видов лесов.

Неполным или открытым называют дизъюнктивное суждение, в котором перечислены не все признаки или не все виды определённого рода. В символической записи неполнота дизъюнкции должна быть выражена многоточием: v A v B v C... В естественном языке неполнота дизъюнкции выражается словами: ’’и т.д.’’, ’’и др.’’, ’’и тому подобное’’, ’’иные’’ и другими.

Строгая дизъюнкция

истинна только тогда,
когда значения А и В различны

Она наденет шубу или пальто.

А – она наденет шубу,
В – она наденет пальто

А	В	(А $\underline{\vee}$ В)
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Виды сложных суждений
Импликация

Импликация –
логическая операция,
соединяющая два высказывания с помощью
союза (пропозициональной связки) «если…, то…».

Логическое значение импликации определяется следующим образом:
1) импликация истинна во всех случаях, когда
антецедент ложен или консеквент истинен;
2) импликация ложна только если антецедент истинен, а консеквент ложен.

Антецедент –
первый член
импликации,
заключённый между
союзом «если» и
частицей «то».

A	B	A → B
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Консеквент –
второй член
импликации,
стоящий после
частицы «то».

Импликация

- В естественном языке «Если…, то…» – описание причинно-следственных отношений между явлениями.

- В логической интерпретации «Если А, то В» – антецедент (А) не есть причина, а консеквент (В) – не следствие.

Импликация

всегда истинна, кроме случая, когда антецедент (А) истинен, а консеквент (В) ложен

Если студент усердно готовится к экзамену, то он получает «пятёрку».

А	**В**	**(А → В)**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

А – студент усердно готовится к экзамену,
В – студент получает «пятёрку»

Виды сложных суждений
Эквиваленция (эквивалентность)

Эквиваленция –
логическая операция, соединяющая два высказывания
с помощью союза (пропозициональной связки)
«если и только если…, то…» или «тогда и только тогда, когда…».

Логическое значение эквиваленции определяется следующим образом:
1) эквиваленция истинна, если её члены оба истинны или оба ложны;
2) эквиваленция ложна, если один из её членов истинен, а другой ложен.

A	B	A ↔ B
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Эквиваленция

истинна при одинаковых значениях A и B

Если число является чётным, то тогда и только тогда, оно делится без остатка на 2.

A – число является чётным,
B – число делится без остатка на 2

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Логические выражения и таблицы истинности

Логическое выражение – формула, в которую входят логические переменные и знаки логических операций.

Пример:

$$F = (A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$$

Порядок выполнения логических операций:

1. Действия в скобках.
2. Инверсия, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность.

Для логического выражения можно построить ***таблицу истинности***, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний.

Таблицы истинности

Значение логических выражений принято записывать в виде **таблиц истинности**, в которых по действиям показано, какие значения принимает логическое выражение при всех возможных наборах его переменных.

Виды сложных суждений
Таблицы истинности

А	В	А Λ В	А V В	А <u>V</u> В	А → В	А ↔ В
и	и	и	и	л	и	и
и	л	л	и	и	л	л
л	и	л	и	и	и	л
л	л	л	л	л	и	и

Таблица истинности

A	B	(A ∧ B)	(A ∨ B)	(A ⊻ B)	(A → B)	(A ↔ B)	¬B
1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1

Формализация сложного суждения

В.В. Маяковский родился в 1891 г. или в 1893 г. Однако известно, что он родился не в 1891 г. следовательно, он родился в 1893 г.

А - В.В. Маяковский родился в 1891 г.

В - В.В. Маяковский родился в 1893 г.

$$((A \veebar B) \land \neg A) \rightarrow B$$

Определение количества строк и столбцов в таблице

- Количество строк = 2^n + одна строка для заголовка (n – число переменных в формуле)
- Количество столбцов = количество переменных + количество логических операций

Определение истинности сложного суждения

$((A \underline{\vee} B) \wedge \neg A) \to B$

A	B	$(A \underline{\vee} B)$	$\neg A$	$((A \underline{\vee} B) \wedge \neg A)$	$((A \underline{\vee} B) \wedge \neg A) \to B$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	Л	И

Пример 1

Построим таблицу истинности для выражения F = (A v B) & (¬A v ¬B)

1. *Количество строк = 2^2 + 1(заголовки столбцов) = 5*

2. *Количество столбцов = 2 + 5(v, &, ¬, v, ¬) = 7*

3. *Расставим порядок выполнения операций:*

1 5 2 4 3

(A v B) & (¬A v ¬B)

4. *Построим таблицу:*

A	B	A v B	¬A	¬B	¬A v ¬B	(A v B) & (¬A v ¬B)
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Пример 2

Составление таблицы истинности для формулы

$$((A \Rightarrow B) \,\&\, \neg B) \Rightarrow \neg A$$

A	B	A=>B	⌉B	(A=>B)&⌉B	⌉A	((A=>B)&⌉B)=>⌉A

Пример 2

Составление таблицы истинности для формулы

$$((A \Rightarrow B) \,\&\, \neg B) \Rightarrow \neg A$$

A	B	A=>B	⌉B	(A=>B)&⌉B	⌉A	((A=>B)&⌉B)=>⌉A
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Пример 2

Составление таблицы истинности для формулы

$$(\overline{A \vee C} \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$$

A	B	C	$A \vee C$	$\overline{A \vee C}$	$(\overline{A \vee C} \Rightarrow B)$	$(\overline{A \vee C} \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1

Пример 2

Составление таблицы истинности для формулы

$$(\overline{A \vee C} \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$$

1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0

- Формулы
  - тождественно-истинные
    - истинные при всех наборах истинностных значений переменных
  - тождественно-ложные
    - ложные при всех наборах истинностных значений переменных
  - выполнимые (нейтральные)
    - то истинные, то ложные при различных наборах истинностных значений входящих в них переменных

Исследование суждений

1) Определить тип анализируемого языкового выражения, является ли оно вопросительным, побудительным или повествовательным предложением.

2) Если предложение повествовательное или представляет собой риторический вопрос, восклицание, то содержит суждение. Определить, является ли суждение простым или сложным.

Исследование суждений

3) Если суждение простое, определить, является ли оно экзистенциальным, реляционным или атрибутивным.

4) Если суждение атрибутивное, определить его тип по соединенной классификации по качеству и количеству.

5) Указать, является ли оно выделяющим или исключающим.

6) Определить модальность суждения.

7) Выделить термины (субъект и предикат) суждения и определить их распределённость в суждении.

Исследование суждений

8) Если суждение сложное, определить входящие в него простые суждения и типы соединяющих их логических связок.

9) выявить логическую форму суждения, записав ее в виде соответствующей формулы.

10) Проверить логическую правильность сложного суждения, построив таблицу истинности.

Логические отношения между сложными суждениями и их членами

- Как явствует из определения отрицания, отрицание и отрицаемое высказывание находятся в отношении контрадикторности.
- Конъюнкция является подчиняющим суждением по отношению к любому из своих членов, а также к дизъюнкции с теми же членами.
- Дизъюнкция является подчинённым суждением по отношению к любому из своих членов , а также к конъюнкции с теми же членами.
- Члены истинной исключающей дизъюнкции контрадикторны друг другу, члены ложной исключающей дизъюнкции являются равнозначными (равносильными) суждениями, а сама исключающая дизъюнкция контрадикторна эквиваленции с теми же членами.
- Антецедент истинной импликации является подчиняющим суждением по отношению к консеквенту, а консеквент – подчиняющим суждением по отношению к самой импликации.
- Члены истинной эквиваленции являются равнозначными (равносильными) суждениями, члены ложной эквиваленции контрадикторны друг другу, сама же эквиваленция контрадикторна исключающей дизъюнкции с теми же членами.

Логические отношения между сложными суждениями и их членами

- **Конъюнкция** является **подчиняющим** суждением по отношению к любому из своих членов, а также к **дизъюнкции** с теми же членами.

Если A Λ B истинно, то A истинно.	(A Λ B) → A
Если A ложно, то A Λ B ложно.	~ A → ~ (A Λ B)
Если A Λ B истинно, то B истинно	(A Λ B) → B
Если B ложно, то A Λ B ложно.	~ B → ~ (A Λ B)
Если A Λ B истинно, то A V B истинно.	(A Λ B) → (A V B)
Если A V B ложно, то A Λ B ложно.	~ (A V B) → ~ (A Λ B)

Логические отношения между сложными суждениями и их членами

- **Дизъюнкция** является **подчинённым** суждением по отношению к любому из своих членов , а также к **конъюнкции** с теми же членами; члены истинной дизъюнкции **субконтрарны** друг другу.

• Если A истинно, то A V B истинно.	A → (A V B)
• Если A V B ложно, то A ложно.	~ (A V B) → ~ A
• Если B истинно, то A V B истинно.	B → (A V B)
• Если A V B ложно, то B ложно.	~ (A V B) → ~ B
• Если A Λ B истинно, то A V B истинно.	(A Λ B) → (A V B)
• Если A V B ложно, то A Λ B ложно.	~ (A V B) → ~ (A Λ B)
• Если A V B истинно и A ложно, то B истинно.	((A V B) Λ ~ A) → B
• Если A V B истинно и B ложно, то A истинно.	((A VV B) Λ ~ B) → A

Логические отношения между сложными суждениями и их членами

- Члены истинной исключающей дизъюнкции контрадикторны друг другу, члены ложной исключающей дизъюнкции являются равнозначными (равносильными) суждениями, а сама исключающая дизъюнкция контрадикторна эквиваленции с теми же членами.

  - Если A VV B истинно и A истинно, то B ложно. — $((A \vee\!\vee B) \wedge A) \rightarrow \sim B$
  - Если A VV B истинно и B истинно, то A ложно. — $((A \vee\!\vee B) \wedge B) \rightarrow \sim A$
  - Если A VV B истинно и A ложно, то B истинно. — $((A \vee\!\vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$
  - Если A VV B истинно и B ложно, то A истинно. — $((A \vee\!\vee B) \wedge \sim B) \rightarrow A$
  - Если A VV B истинно, то A ↔ B ложно. — $(A \vee\!\vee B) \rightarrow \sim (A \leftrightarrow B)$
  - Если A VV B ложно, то A ↔ B истинно. — $\sim (A \vee\!\vee B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
  - Если A ↔ B истинно, то A VV B ложно. — $(A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim (A \vee\!\vee B)$
  - Если A ↔ B ложно, то A VV B истинно. — $\sim (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \vee\!\vee B)$

Логические отношения между сложными суждениями и их членами

- Антецедент истинной импликации является подчиняющим суждением по отношению к консеквенту, а консеквент – подчиняющим суждением по отношению к самой импликации.

  - Если $A \rightarrow B$ истинно и A истинно, то B истинно. — $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
  - Если $A \rightarrow B$ истинно и B ложно, то A ложно. — $((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$
  - Если B истинно, то $A \rightarrow B$ истинно. — $B \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - Если $A \rightarrow B$ ложно, то B ложно. — $\sim (A \rightarrow B) \rightarrow \sim B$

Логические отношения между сложными суждениями и их членами

- Члены истинной эквиваленции являются равнозначными (равносильными) суждениями, члены ложной эквиваленции контрадикторны друг другу, сама же эквиваленция контрадикторна исключающей дизъюнкции с теми же членами.

- Если A ↔ B истинно и A истинно, то B истинно.
- Если A ↔ B истинно и A ложно, то B ложно.
- Если A ↔ B истинно и B истинно, то A истинно.
- Если A ↔ B истинно и B ложно, то A ложно.
- Если A ↔ B истинно, то A VV B ложно.
- Если A ↔ B ложно, то A VV B истинно.
- Если A VV B истинно, то A ↔ B ложно
- Если A VV B ложно, то A ↔ B истинно.

$((A \leftrightarrow B) \land A) \rightarrow B$

$((A \leftrightarrow B) \land \sim A) \rightarrow \sim B$

$((A \leftrightarrow B) \land B) \rightarrow A$

$((A \leftrightarrow B) \land \sim B) \rightarrow \sim A$

$(A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim (A \veebar B)$

$\sim (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \veebar B)$

$(A \veebar B) \rightarrow \sim (A \leftrightarrow B)$

$\sim (A \veebar B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

$(A \leftrightarrow B) \veebar (A \veebar B)$

$(A \land B) \lor (\sim A \land \sim B)$

Функция истинности

Вычисление функции истинности

A	B	A Λ B	(A Λ B) → B	((A Λ B) → B) V B
и	и	и	и	и
и	л	л	и	и
л	и	л	и	и
л	л	л	и	и

Функция истинности
Вычисление функции истинности

A	B	A Λ B	(A Λ B) → B	((A Λ B) → B) Λ B
и	и	и	и	и
и	л	л	и	л
л	и	л	и	и
л	л	л	и	л

Функция истинности
Равносильные формулы

A	B	~ B	A → ~ B
и	и	л	л
и	л	и	и
л	и	л	и
л	л	и	и

A	B	A Λ B	~ (A Λ B)
и	и	и	л
и	л	л	и
л	и	л	и
л	л	л	и

Функция истинности
Равносильные формулы

Отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний:

$$\sim (A \land B) = \sim A \lor \sim B$$

Отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний:

$$\sim (A \lor B) = \sim A \land \sim B$$

Законы де Моргана

Импликация равносильна дизъюнкции отрицания антецедента и (утверждения) консеквента:

$$A \rightarrow B = \sim A \lor B$$

Отрицание импликации равносильно конъюнкции (утверждения) антецедента и отрицания консеквента:

$$\sim (A \rightarrow B) = A \land \sim B$$

Вопросы?