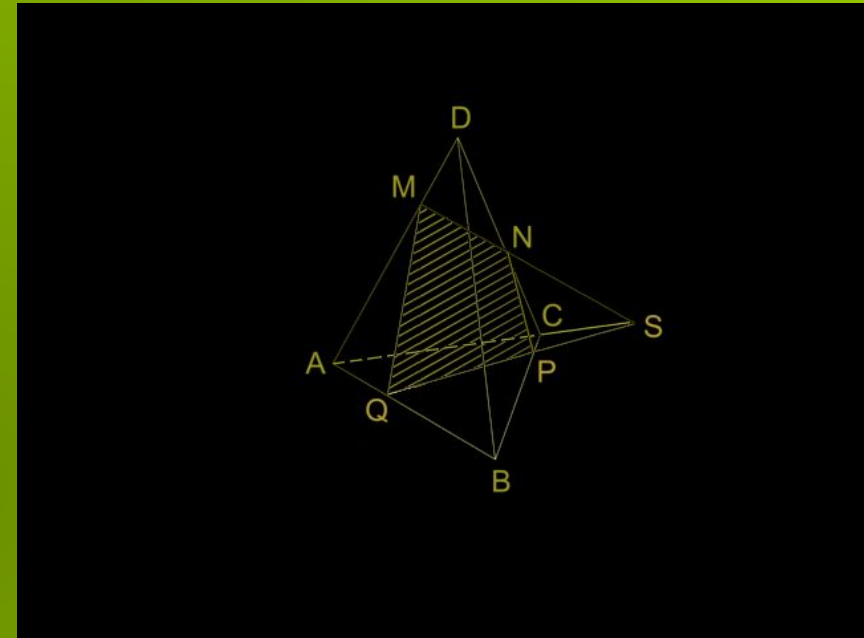


Построение сечения многогранника плоскостью

Сечения многогранника плоскостью используются при решении многих стереометрических задач. Мною разобраны некоторые способы построения сечений, а также задачи связанные с их построением. Рассмотрены сечения плоскостями, проходящими через данную точку и прямую, через три данные точки, а также сечения, когда секущая плоскость задана одним из условий.

Плоскость проходит через три данные точки

На рисунке показано построение сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M , N , P на ребрах тетраэдра. Точки M и N заданы так, что прямые MN и AC не параллельны. Отрезки MN и AP являются сторонами сечения. Точка P – общая для плоскостей MNP и ABC . Вторую общую точку находим в пересечении прямых MN и AC , $S=MN \cap AC$. Прямая SP – линия пересечения плоскостей MNP и ABC . Пересечение этой прямой с ребром AB дает вершину Q сечения, $Q=SP \cap AB$. Сечение – четырехугольник $MNPQ$.



Плоскость проходит через данную точку и прямую

Дано:

Длина ребра куба равна a . Найти площадь сечения проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1 .

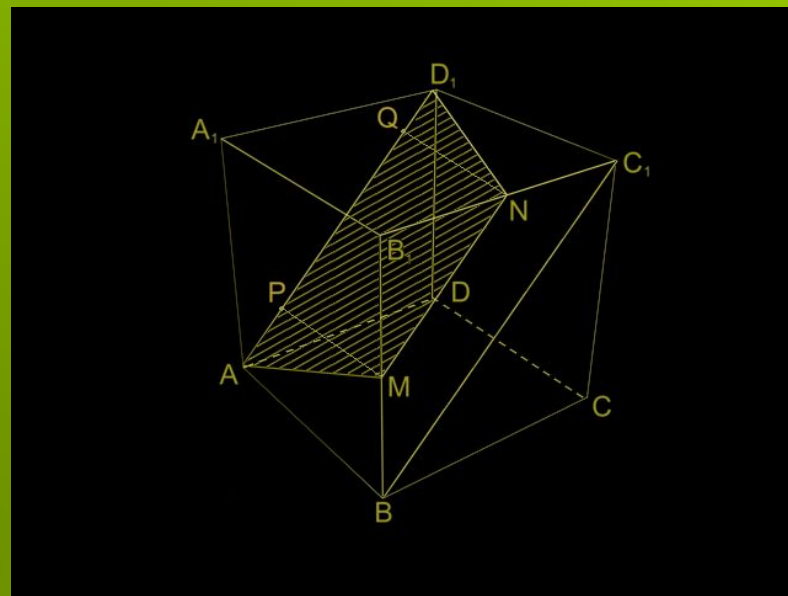
Решение:

Обозначим секущую плоскость α . отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости α и граням куба, поэтому являются сторонами сечения. Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C . Плоскости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому линия пересечения плоскостей и BB_1C_1C параллельна прямой AD_1 . Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, эта линия пересечения параллельна и прямой BC_1 . Проводим через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую, параллельную прямой BC_1 , ее пересечение с ребром B_1C_1 дает вершину сечения. Сечение – трапеция $AMND_1$, $MN \parallel AD_1$.

Найдем длины сторон этой трапеции. Имеем $AD_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, отрезок MN – средняя линия в треугольнике BB_1C_1 , поэтому $MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. В прямоугольных треугольниках ABM и D_1C_1N ($AB = C_1D_1 = a$, $BM = NC_1 = \frac{a}{2}$) находим $AM = D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Значит, трапеция $AMND_1$ равнобедренная. Найдем ее высоту. Опускаем перпендикуляры MP и NQ на основание AD_1 , получаем $PQ = MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $D_1Q = PA = \frac{1}{2}(D_1A - PQ) = \frac{a}{2}$. В прямоугольном треугольнике D_1QN ($D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $D_1Q = \frac{a}{2}$) находим $NQ = \frac{3a}{4}$. Определим площадь сечения

$$S = \frac{1}{2} (MN + D_1A) \cdot NQ = \frac{9}{8} a^2.$$

Ответ: $\frac{9}{8} a^2$



Плоскость проходит через две точки параллельно ребру (прямой).

Дано:

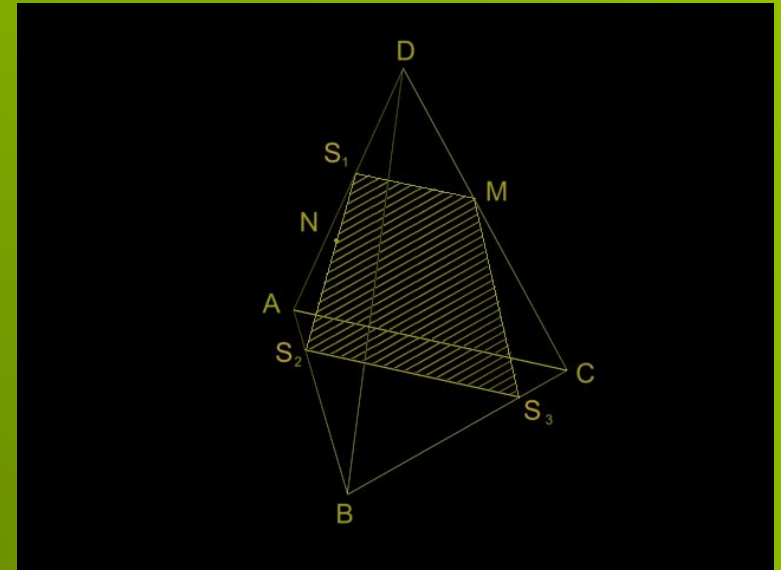
На рисунке показано построение сечения тетраэдра плоскостью, параллельной ребру AC и проходящей через точку M ребра CD и точку N в грани ABD .

Решение:

Построение основано на следующей теореме:

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей

параллельна данной прямой. Обозначим плоскость сечения α . Плоскость ACD имеет с плоскостью α общую точку M и содержит прямую AC , параллельную плоскости α . Следовательно, линия пересечения этих плоскостей проходит через точку M параллельно прямой AC . В соответствии с этим построена сторона MS_1 сечения, $MS_1 \parallel AC$. Проведя прямую S_1N , найдем вторую сторону сечения – S_1S_2 . На рисунке точка N дана так, что точка S_2 принадлежит ребру AB . Плоскость ABC также содержит прямую AC , параллельную плоскости сечения. Поэтому сторона сечения S_2S_3 проведена параллельно ребру AC . Отрезок S_3M – четвертая сторона сечения. Сечение $MS_1S_2S_3$ – трапеция ($MS_1 \parallel AC \parallel S_2S_3$).



Построение сечений многогранника
плоскостью, заданной точкой и
условием параллельности или
перпендикулярности к указанным
прямым и плоскостям.

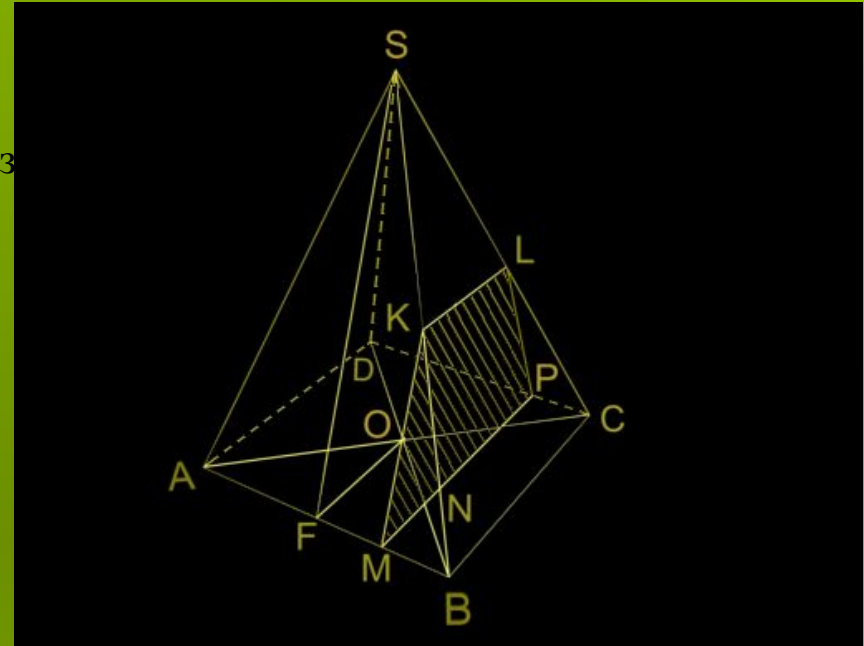
1. Плоскость проходит через данную точку перпендикулярно к данной прямой.

Дано:

На ребре AB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ дана точка M , $BM = AB$. Через точку M проведена секущая плоскость перпендикулярно к прямой AB . Построить сечение и вычислить его площадь, если сторона основания пирамиды равна a , а высота пирамиды H .

Решение:

На ребре AB пирамиды $SABCD$ откладываем отрезок $BM = AB$. Через точку M в грани ASB проводим $MK \perp AB$ (точка K лежит на ребре, $MK \parallel SF$, где SF – апофема пирамиды), а в основании $ABCD$ проводим $MP \perp AB$, где точка P лежит на ребре DC ($MP \parallel FO$). Плоскости SFO и KMP параллельны между собой и перпендикулярны к AB , следовательно, перпендикулярны к основанию $ABCD$ пирамиды. Так как $BC \parallel MP$, то прямая BC параллельна секущей плоскости KMP . Поэтому грань BSC , имея с секущей плоскостью общую точку K , пересекается с нею по прямой $KL \parallel BC$ – по теореме, обратной теореме о параллельности прямой и плоскости. Искомое сечение трапеция $MKLP$. Пусть N – точка пересечения диагонали BD основания пирамиды и отрезка MP . Но $KN \parallel SO$ как линии пересечения параллельных плоскостей SFO и KMP третьей плоскостью DSB . Поскольку SO перпендикулярна к плоскости основания пирамиды, то и отрезок KN перпендикулярен к этой плоскости. Следовательно, $KNMP$, отрезок KM – высота трапеции $MKLP$.



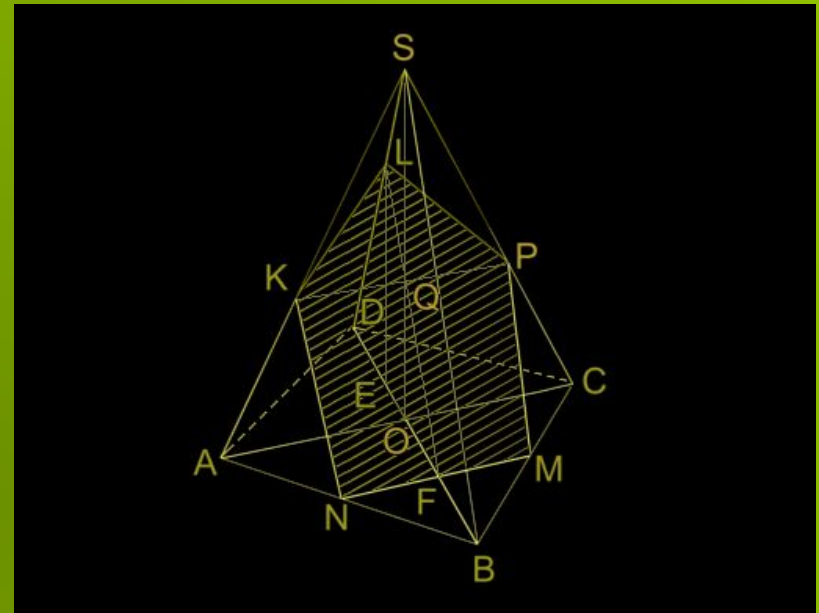
2. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым. Пример 1.

Дано:

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через середину M стороны BC основания параллельно диагонали AC основания и боковому ребру SB . Вычислить площадь сечения, если длина стороны основания пирамиды a , а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α .

Решение:

Ссылаясь на упомянутую выше теорему, последовательно строим линии пересечения секущей плоскости с плоскостями основания ABC , DSB и ASC . Эти построения дают нам все искомые вершины сечения. Из хода построения следует, что N – середина AB , точка Q – середина SO , следовательно, точки K и P – середины боковых ребер SA и SC пирамиды соответственно. Отсюда: $KN \parallel SB \parallel PM$. Кроме того $QF \parallel KN \parallel PM$. Но $QFNM$, в чем легко убедиться применив теорему о трех перпендикулярах. Следовательно, сечение составлено из прямоугольника $KNMP$ и равнобедренного треугольника KLP , имеющих общее основание KP .



2. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым. Пример 2.

Дано:

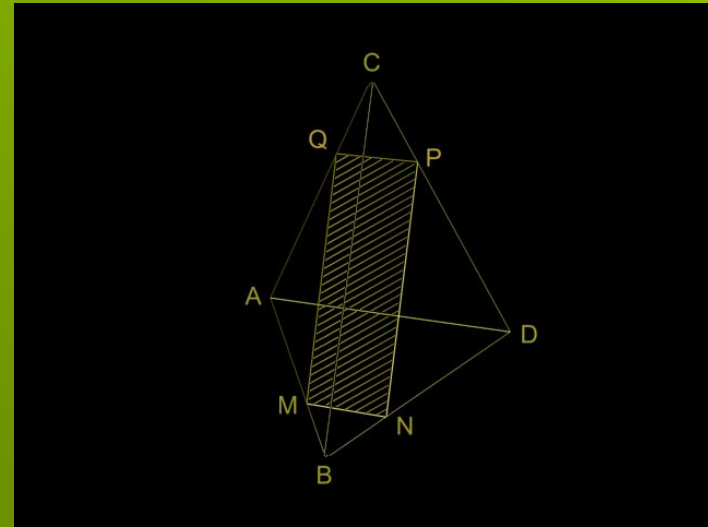
На ребре АВ тетраэдра расположена точка М так, что $AM:AB = \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку М и параллельно ребрам AD и BC. При каком значении λ это сечение будет ромбом, если $AD:BC = m$?

Решение:

Секущую плоскость обозначим α . Линия пересечения этой плоскости с плоскостью ABD параллельна прямой AD ($AD \parallel \alpha$). Проводим $MN \parallel AD$. Линии пересечения плоскостей BCA и BCD с плоскостью α параллельны прямой BC ($BC \parallel \alpha$). Строим $MQ \parallel BC$ и $NP \parallel BC$. Четвертая сторона сечения PQ параллельна ребру AD. Сечение – параллелограмм MNPQ ($MN \parallel AD \parallel PQ$, $NP \parallel BC \parallel MQ$).

Выразим длины сторон параллелограмма MNPQ через длины ребер AD и BC. Из подобия треугольников AMQ и ABC имеем $MQ:BC = AN:AB = \lambda$, откуда $MQ = \lambda * BC$. Теперь находим $BM = AB - AM = (1 - \lambda) * AB$ и из подобия треугольников BMN и BAD получаем $MN:AD = BM:BA = 1 - \lambda$, т.е. $MN = (1 - \lambda) * AD$. подставляя в равенство $MN = MQ$ получаем выражения, будем иметь $(1 - \lambda) * AD = \lambda * BC$, откуда $\lambda = \frac{AD}{BC + AD} = \frac{m}{m + 1}$

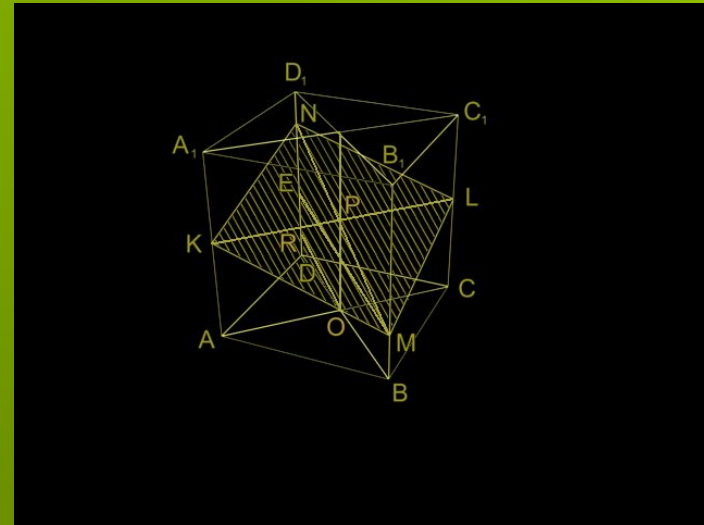
Ответ: сечение будет ромбом при $\lambda = \frac{m}{m + 1}$.



3. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым.

Дано:

В основании прямой призмы лежит ромб. В плоскости меньшего диагонального сечения призмы дана прямая MN , пересекающая оба боковых ребра призмы. Через эту прямую проведена секущая плоскость, параллельная диагонали основания призмы. Построить сечение и исследовать его форму.



Решение:

Пусть в ромбе $ABCD$ $BD < AC$. Тогда меньшее диагональное сечение призмы проходит через BD . Построение искомого сечения не составляет труда. Находим точку P пересечения прямой MN с осью OO_1 призмы, в ее диагональном сечении AA_1C_1C проводим $KL \parallel AC$. Остается соединить последовательно отрезками точки K, M, L, N пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами призмы.

Из условия следует, что секущая плоскость пересекает все боковые ребра параллелепипеда. В сечении получаем параллелограмм (противоположные боковые грани пересекаются секущей плоскостью по параллельным прямым). В данном случае сечение является ромбом. Для этого достаточно доказать, что в параллелограмме $KMLN$ диагонали взаимно перпендикулярны. Последнее следует из того, что проекцией наклонной на плоскости основания призмы является диагональ DB основания, но $AC \perp DB$, поэтому $AC \perp NM$ (для доказательства последнего утверждения можно провести $OR \parallel MN$ и применить теорему о трех перпендикулярах). А так как $KL \parallel AC$, то $KL \perp NM$.

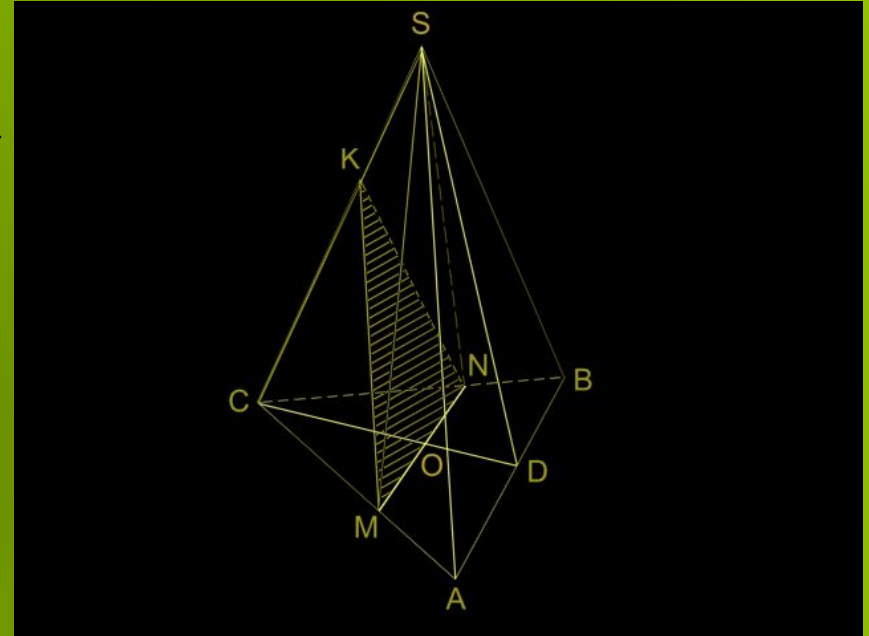
4. Плоскость проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Дано:

Построить сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.

Решение:

Пусть секущая плоскость параллельна грани ASB пирамиды $SABC$. После проведения через центр O основания пирамиды прямой $MN \parallel AB$ следы секущей плоскости в боковых гранях можно строить по-разному: либо провести $OK \parallel SD$ (SD – апофема пирамиды) и соединить точку K с точками M и N , либо провести $NK \parallel BS$ и $MK \parallel AS$ (прямые MK и NK пересекаются в точке K на ребре SC). Можно, проведя $NK \parallel BS$ и получив точку K , соединить ее с точкой M .



5. Плоскость проходит через данную прямую и перпендикулярна к данной плоскости (не перпендикулярной к данной прямой).

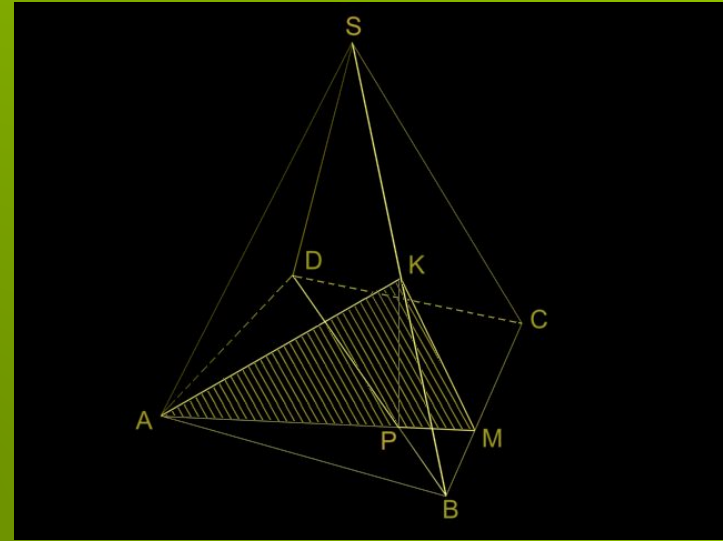
Дано:

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через медиану AK боковой грани ASB и перпендикулярно к плоскости основания.

Решение:

Медиана боковой грани правильной пирамиды не перпендикулярна к плоскости основания, поэтому условия задачи определяют единственную секущую плоскость.

Если в условии задачи речь идет о перпендикулярности плоскости β к плоскости α , нужно постараться из удобной для нас точки плоскости β провести перпендикуляр к плоскости α . В данном случае удобнее всего из конца K медианы AK боковой грани ASB опустить перпендикуляр на плоскость основания. Поскольку точка K лежит в плоскости DSB , перпендикулярной к плоскости основания, основание P этого перпендикуляра будет лежать на прямой BD пересечения перпендикулярных плоскостей DSB и ABC . Остается в плоскости основания пирамиды провести прямую AP и найти точку M ее пересечения прямой BC . В полученном треугольнике AKM построенный отрезок KP является высотой. Таким образом, в этом случае в ходе построения не только выяснена форма, но и построена высота треугольника AKM , необходимая для определения его площади.



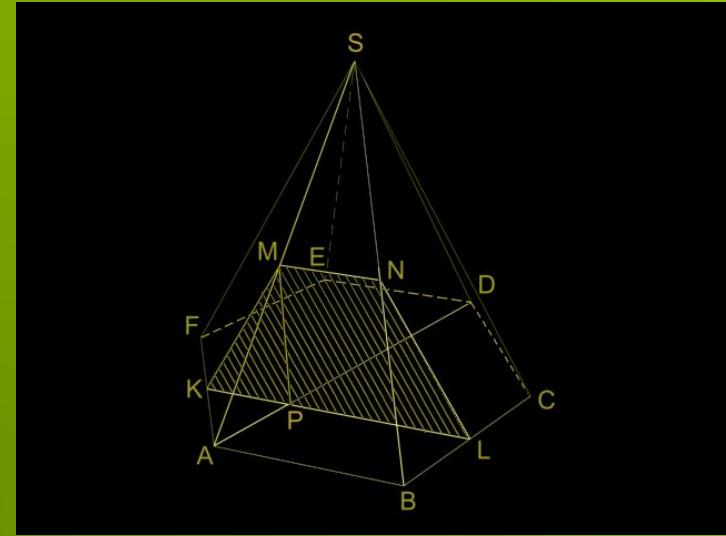
6. Плоскость проходит через данную точку, перпендикулярна к данной плоскости и параллельна данной прямой.

Дано:

Построить сечение правильной шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину бокового ребра параллельно стороне основания и перпендикулярно к плоскости основания пирамиды.

Решение:

Пусть секущая плоскость проходит через середину M бокового ребра SA данной пирамиды $SABCDEF$ параллельно стороне основания AB . Как и в предыдущей задаче, прежде всего опустим из точки M перпендикуляр MP на плоскость Основания пирамиды. Основание P этого перпендикуляра окажется на OA . Затем через точку P (середину OA) проведем $KL \parallel AB$. Точки K и L – середины сторон AF и BC основания пирамиды. Через M проводим $MN \parallel AB$ (это следует из условия параллельности секущей плоскости прямой AB). В сечении получена равнобедренная трапеция $KMNL$, отрезок MP – ее высота.



7. Плоскость проходит через данную прямую под данным углом к данной плоскости.

Дано:

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через большую диагональ основания под углом α к плоскости основания.

Решение:

Решение таких задач начинаем с построения двугранного угла. Это облегчает дальнейшие построения и установление формы сечения.

Пусть в данной правильной шестиугольной призме O – центр, FC – большая диагональ основания. Проводим $OKDE$ (K – середина DE), $KK_1 \parallel DD_1$. Плоскость O_1OK перпендикулярна к плоскости основания призмы и к диагонали FC основания (так как $FCOK$ и FCO_1K). Остается в этой плоскости провести луч OL под данным углом α к OK , чтобы получить линейный угол LOK двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы.

Точка L принадлежит секущей плоскости и плоскости грани DD_1E_1E . Эти плоскости пересекаются по прямой MN , проходящей через L параллельно прямой DE . Трапеция $CNMF$ – искомое сечение. Из хода построения следует, что эта трапеция – равнобокая, отрезок LO служит ее высотой.

