Лекция 6.
Сумма и произведение вероятностей

6-1 Задача про шары

6-2 Сложение вероятностей

6-3 Произведение вероятностей

6-4 Формула полной вероятности

6-5 Формула Байеса

На прошлой лекции…

Дали определение вероятности: классическое, статистическое и субъективное.

Рассмотрели несколько формул из комбинаторики.

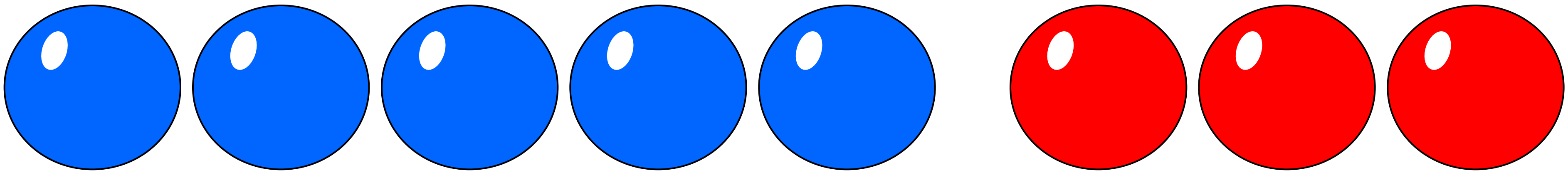
6-1
Задача про шары

Классическое определение вероятности

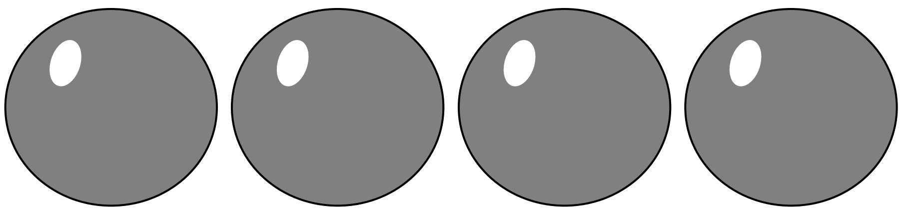
Формулы комбинаторики

Решим задачу

Имеется 5 синих шаров и 3 красных.



Выбирается 4 шара.



Какова вероятность, что среди них 3 синих?

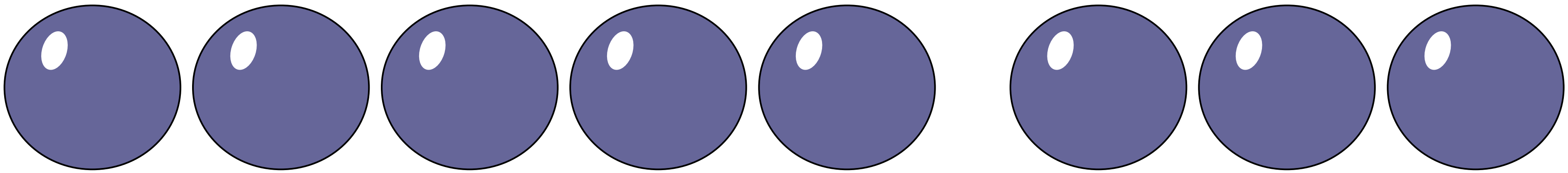
Решаем …

Будем использовать формулу классического определения вероятности:

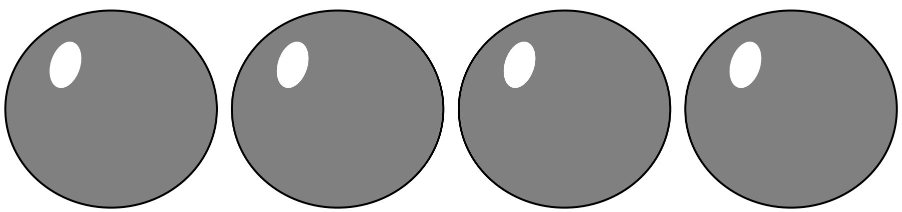
$$P(A) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

1. Сначала вычислим общее число исходов

Имеется восемь шаров.

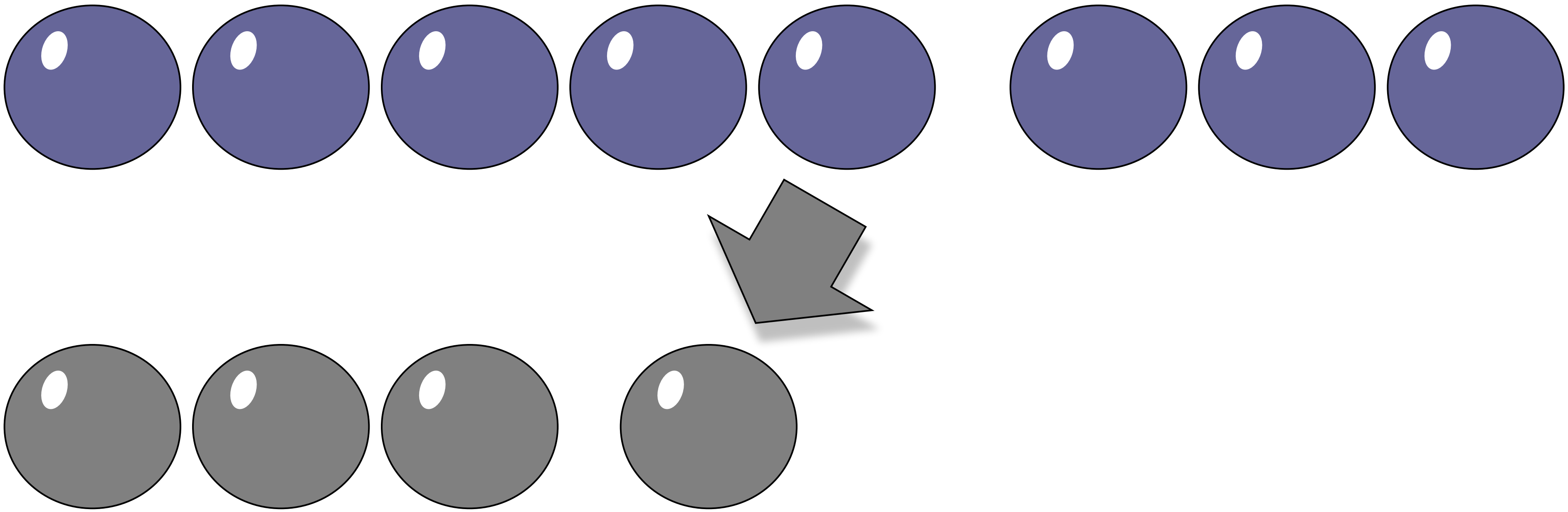


Выбирается 4 шара.



Сколькими способами из восьми шаров можно выбрать четыре?

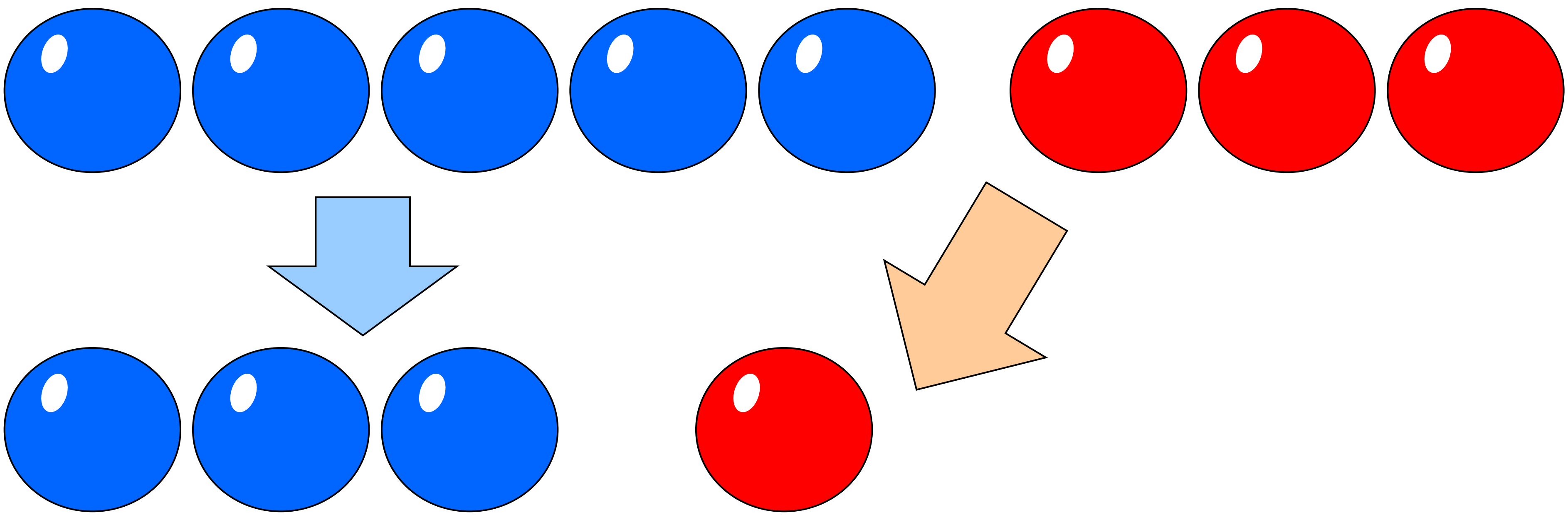
1. Сначала вычислим общее число исходов



Сочетания из 8 по 4: C_8^4

2. Теперь число благоприятных исходов

Из 5 синих шаров и 3 красных мы выбираем 3 синих и 1 красный.

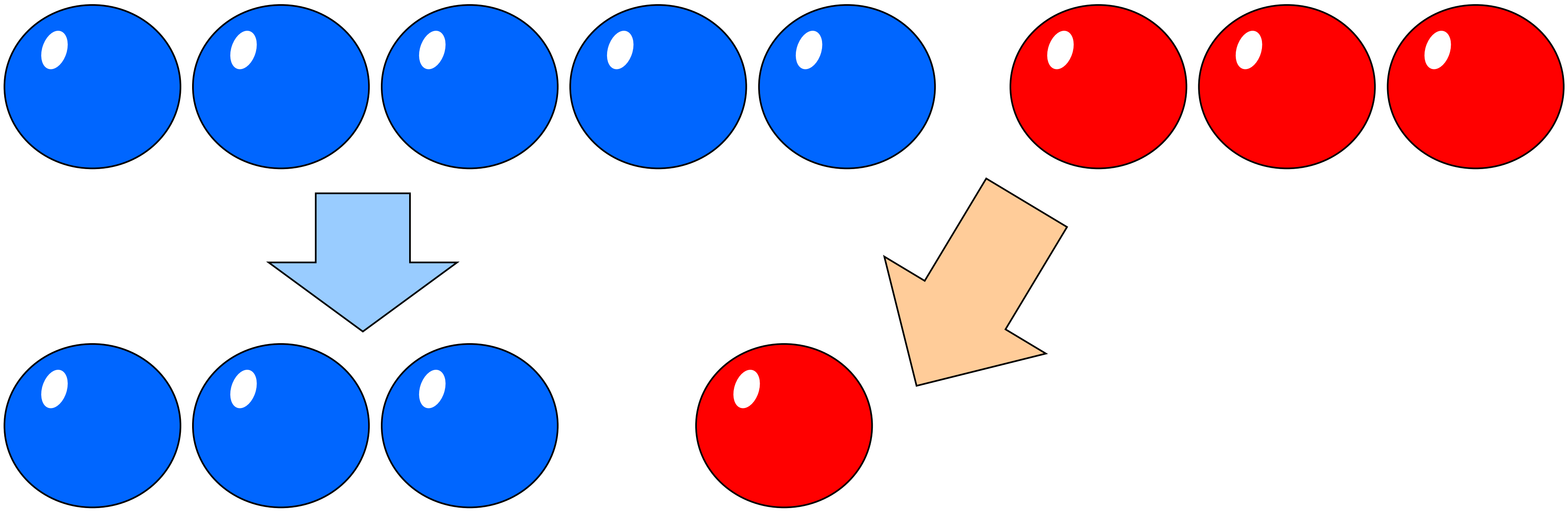


Сколькими способами из пяти синих можно выбрать три?

Сколькими способами из трех красных можно выбрать один?

2. Теперь число благоприятных исходов

Из 5 синих шаров и 3 красных мы выбираем 3 синих и 1 красный.



$$C_5^3 \times C_3^1$$

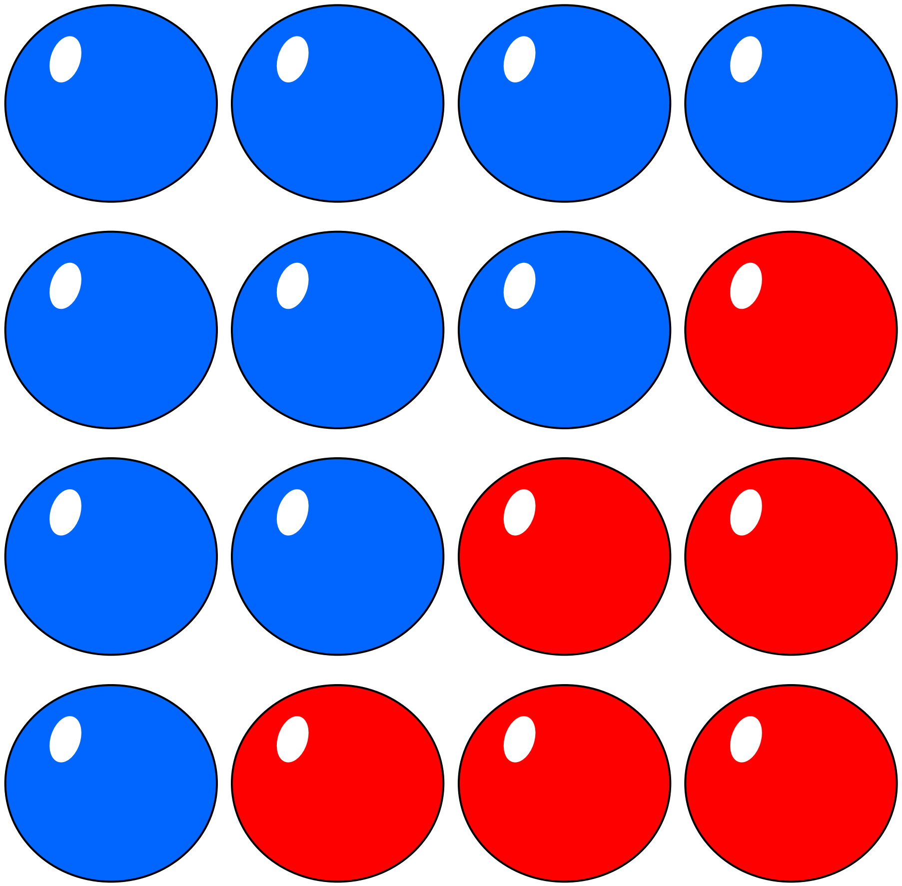
3. Подставляем в формулу

$$P(A) = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{4! \cdot 4!}{8!} = \frac{3}{7}$$

Ответ. С вероятностью 3/7.

Могли бы вычислить все исходы



P = 1/14

P = 3/7

P = 3/7

P = 1/14

Сумма = 1

Интерпретация

Из восьми восьмиклассников (пяти девушек и трех юношей) четыре пошли в турпоход. Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один юноша?

Пользуясь вычисленными вероятностями над сложить вероятности трех событий: 3/7 + 3/7 + 1/14 = 13/14.

Еще один способ: вычесть 1/14 (когда юношей нет) из единицы.

Это есть сумма вероятностей и вероятность обратного события, которые мы рассмотрим подробнее.

6-2
Сложение вероятностей

Для несовместных событий

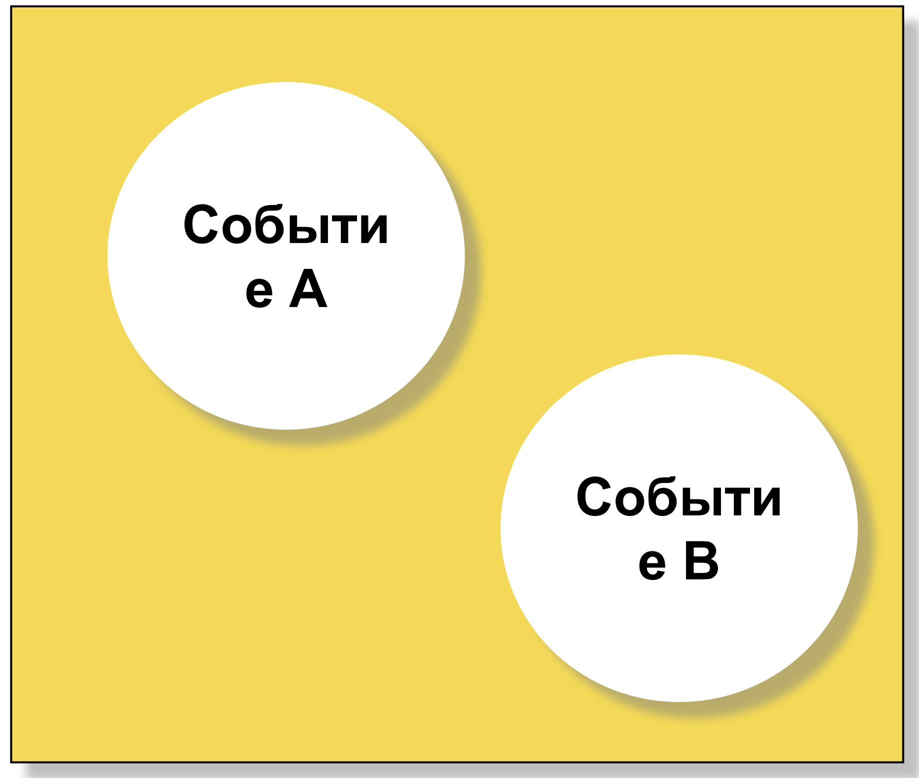
Для совместных событий

Противоположное событие

Правило сложения (несовместные события)

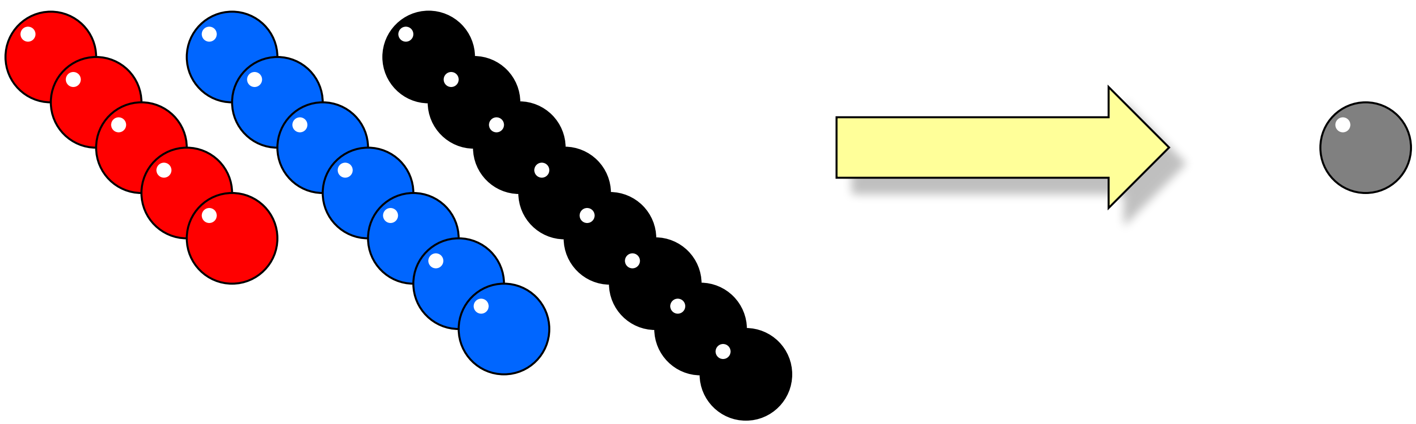
Если события несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$



Пример

В урне 20 шаров: 7 синих, 5 красных, остальные черные. Выбираем случайно один шар. С какой вероятностью он будет цветным?



20 шаров

1 шар

Пример

События:

A = { взят синий шар }

B = { взят красный шар }

A + B = { взят синий или красный шар }

Вероятности:

$P(A) = 7/20$

$P(B) = 5/20$

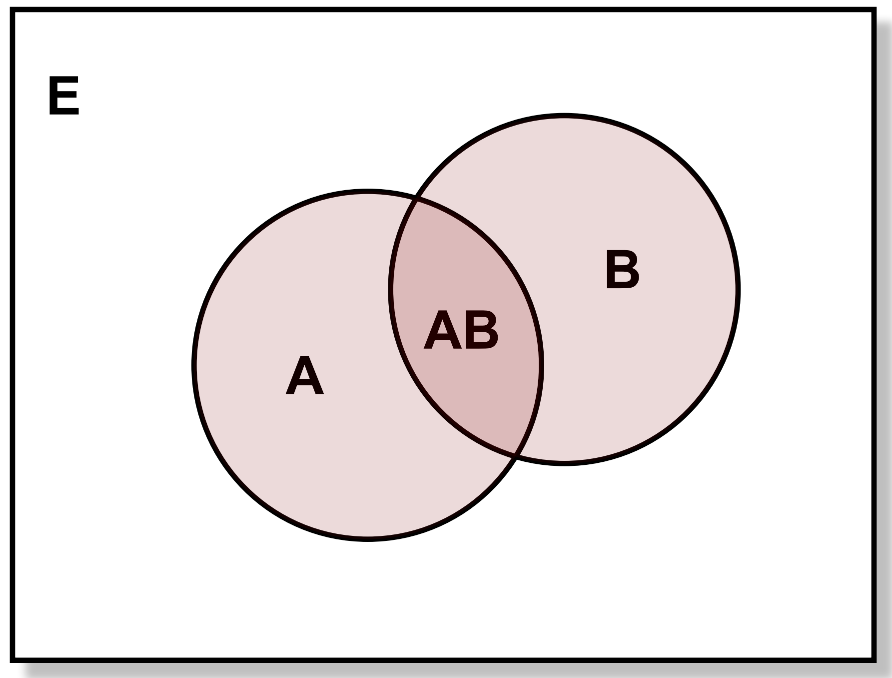
Поскольку события A и B несовместны, следовательно:

$P(A+B) = 7/20 + 5/20 = 12/20 = 0{,}6$

Правило сложения (совместные события)

Если два события совместны, то вероятность их суммы находится как сумма вероятностей этих событий минус вероятность их пересечения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Научный семинар

В аудитории на научном семинаре присутствуют 6 экономистов и 10 философов. Среди них 7 философов и 3 экономиста женщины.

	Женщины	Мужчины	Всего
Философы	7	3	**10**
Экономисты	4	2	**6**
Всего	**11**	**5**	**16**

Какова вероятность того, что случайно выбранный участник семинара окажется философом или мужчиной?

Научный семинар. Решение

Нас интересует вероятность суммы двух событий:

A = { выбран философ }

B = { выбран мужчина }

	Женщины	Мужчины	Всего
Философы	7	3	**10**
Экономисты	4	2	**6**
Всего	**11**	**5**	**16**

P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 10/16 + 5/16 – 3/16 = 12/16

Ответ. Вероятность равна 12/16.

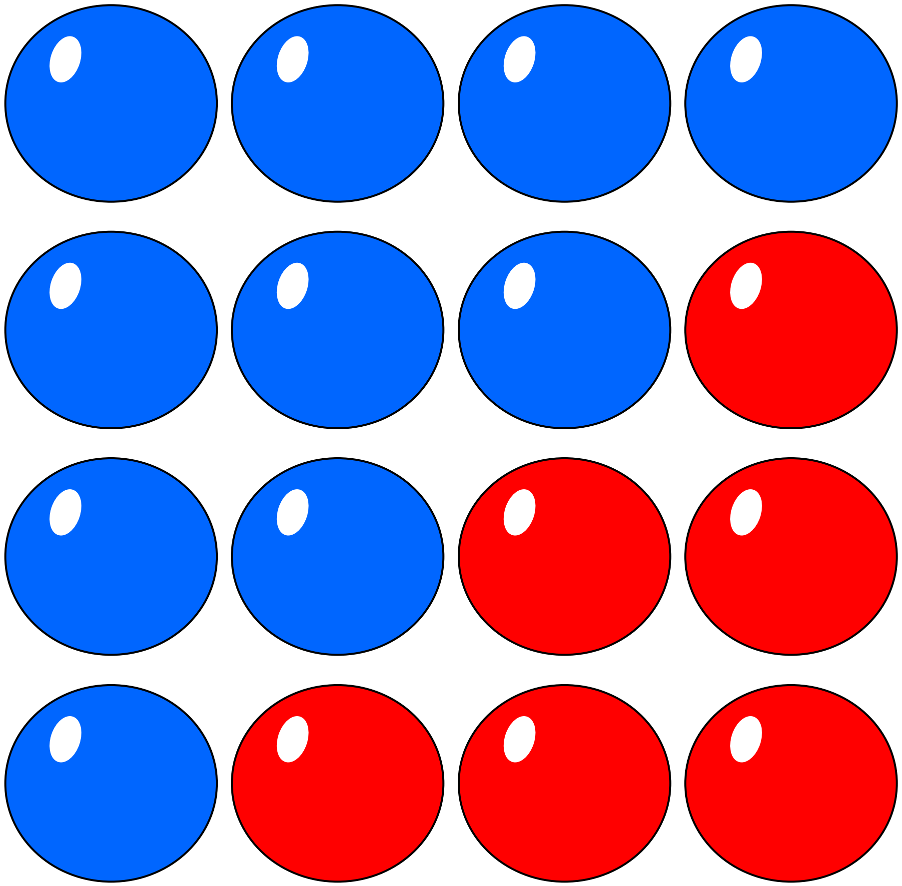
Противоположное событие

Противоположное событие включает все элементарные исходы, которые не включает *A*.

Вероятность противоположного события:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Противоположное событие



Нет красных

1/7

Хотя бы один красный

6/7

Сумма = 1

6-3
Умножение вероятностей

Независимые события

Зависимые события

Условная вероятность

Независимые события

События называются **независимыми**, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого.

Если события не являются независимыми, то говорят, что они **зависимы**.

Правило умножения (независимые события)

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Условная вероятность

Условной вероятностью называется вероятность события B при условии, что событие A наступило. Обозначается:

$$P(B / A)$$

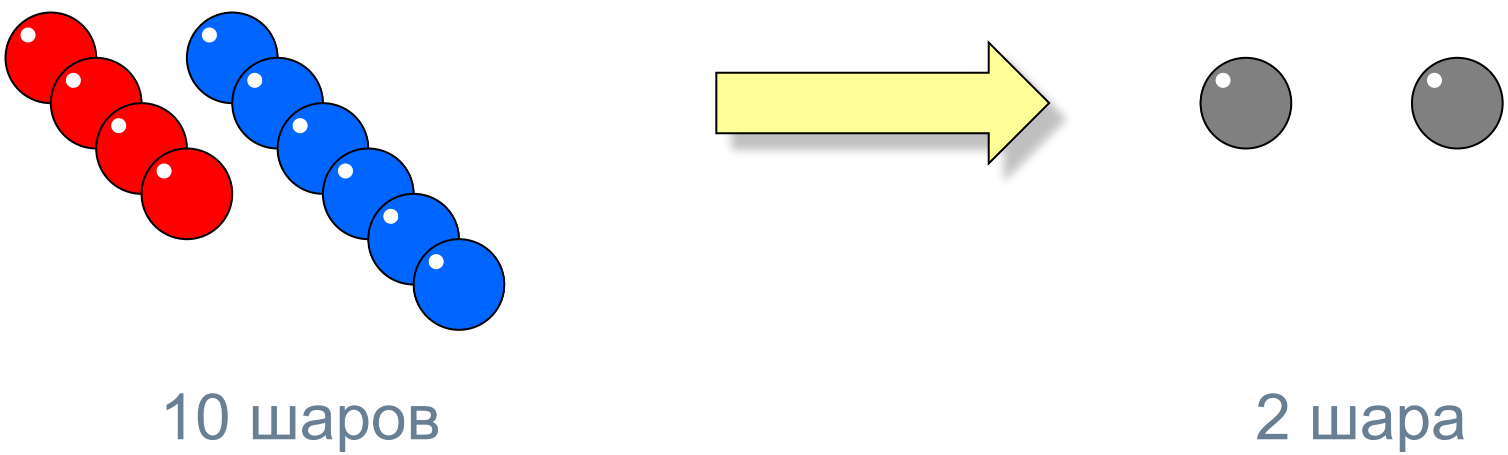
Правило умножения (зависимые события)

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

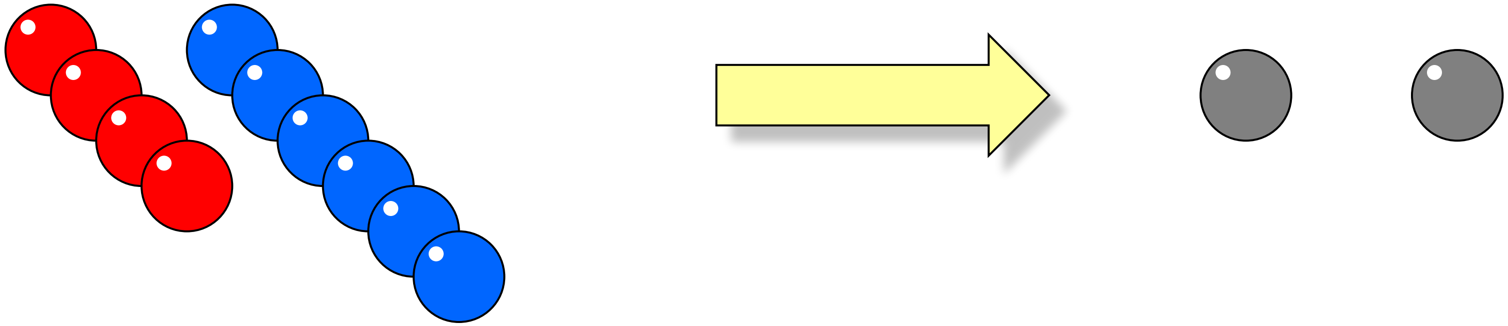
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Два шара из десяти

В урне находится десять шаров, из них 4 красных и 6 синих. Выбрали один шар и, не возвращая его в урну, выбираем второй. Какова вероятность того, что оба выбранных шара окажутся синими?



Два шара из десяти



10 шаров

2 шара

P(A) = P(первый шар синий) = 6/10

P(B/A) = P(второй шар синий / первый синий) = 5/9

P(AB) = P(A)· P(B/A) = P(оба синих) = 6/10 x 5/9 = 1/3

Формула для условной вероятности

Условная вероятность вычисляется по следующей формуле:

$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Итак, сравним…

Формула умножения вероятностей:

Для независимых событий $$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Для зависимых событий $$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Последняя формула учитывает изменение вероятности второго события после того, как произошло первое.

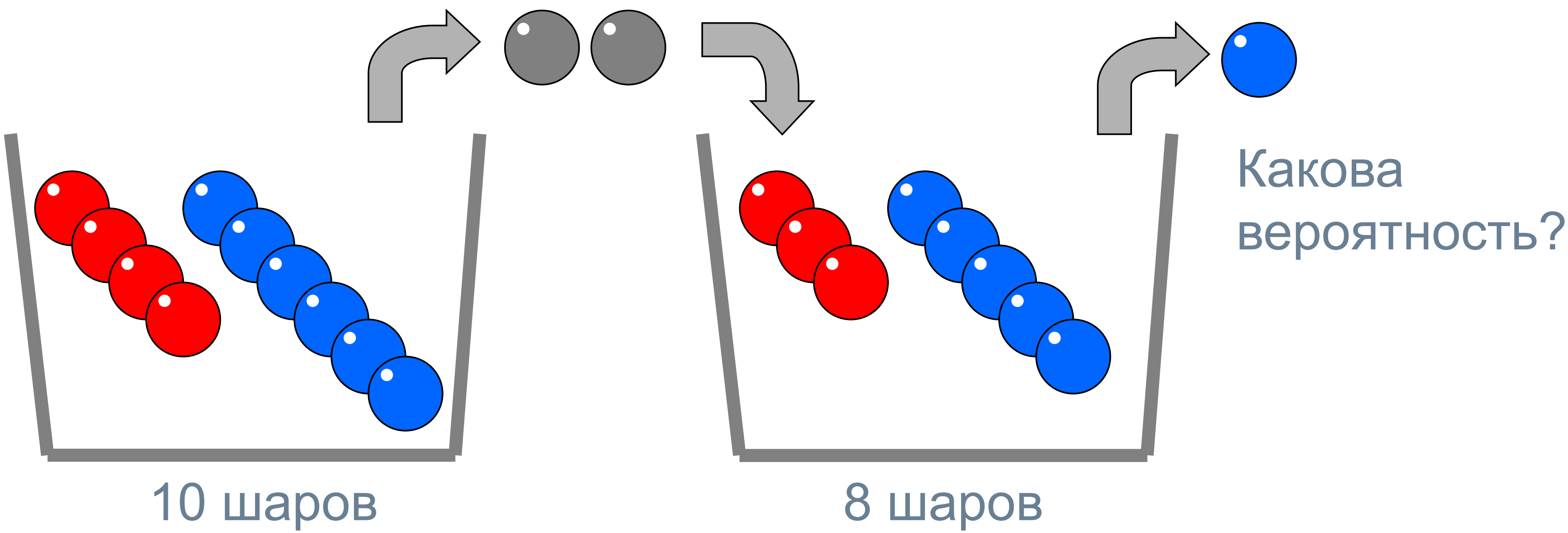
6-4
Формула полной вероятности

Объяснение формулы

Пример

Задача

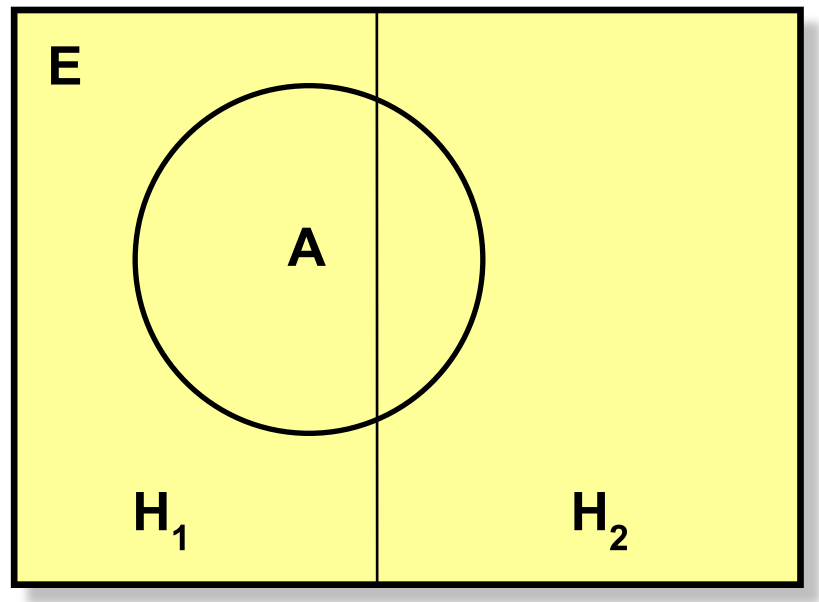
В первой урне было 4 красных и 6 синих шара. Во второй урне 3 красных и 5 синих. Два шара переложили из первой во вторую урну, и после этого из второй вытащили один шар. Какова вероятность, что он синий?



Формула полной вероятности

Если события H_1 и H_2 образуют полную группу событий, вероятность случайного события A находится по *формуле полной вероятности:*

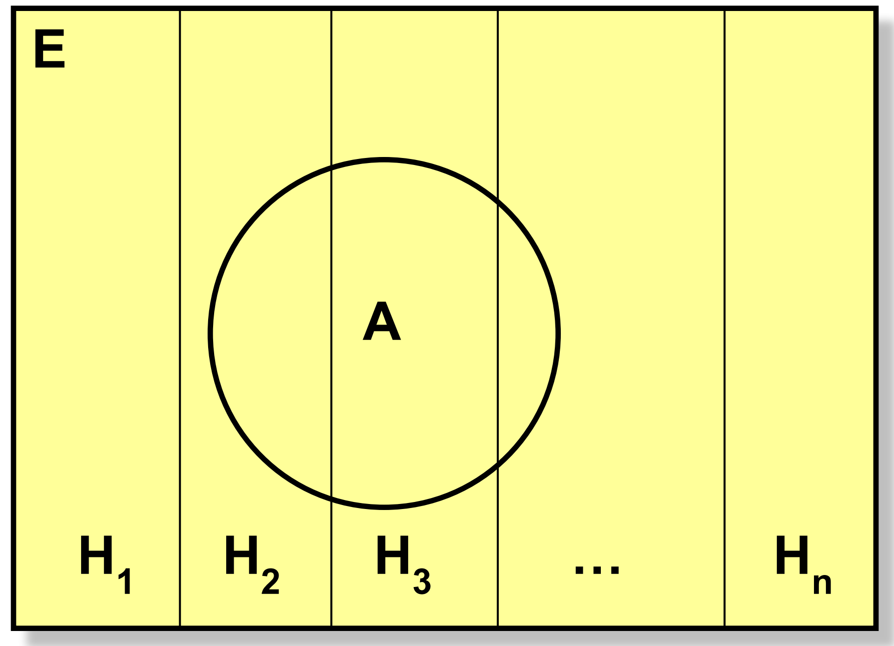
$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)$$



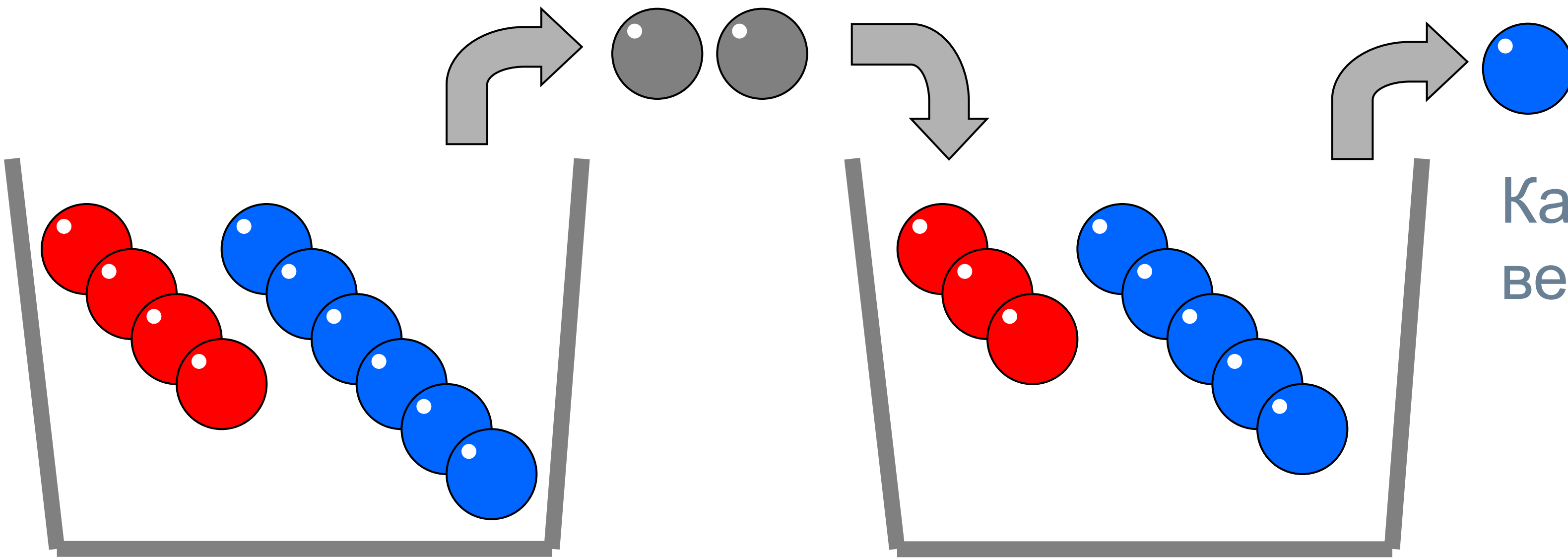
Формула полной вероятности

Если полная группа включает n событий, тогда формула полной вероятности имеет следующий вид:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$



Решаем задачу про шары

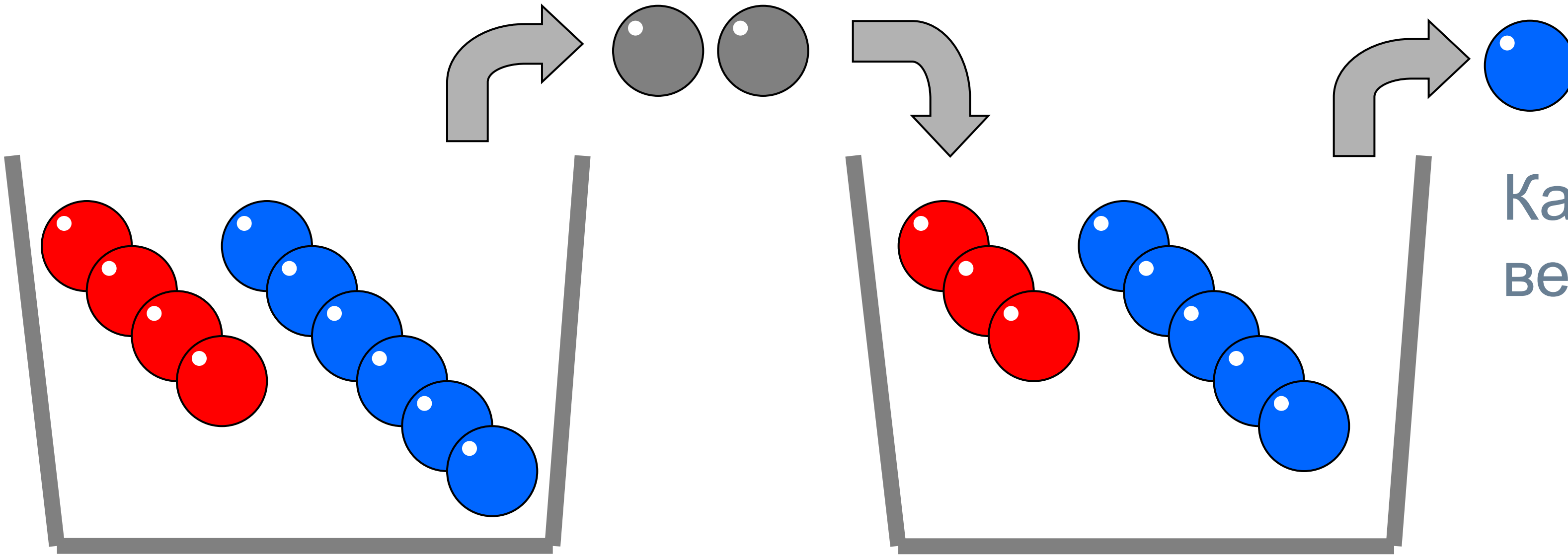


Какова вероятность?

Имеются три события, образующие полную группу:

H_1 = { переложили два красных шара }
H_2 = { переложили один красный и один синий шар }
H_3 = { переложили два синих шара }

Решаем задачу про шары



Какова вероятность?

Находим вероятности этих событий:

$P(H_1) = 4/10 \cdot 3/9 = 2/15$

$P(H_2) = 4/10 \cdot 6/9 + 6/10 \cdot 4/9 = 8/15$

$P(H_3) = 6/10 \cdot 5/9 = 5/15$

Решаем задачу про шары

Находим условные вероятности:

$P(A/H_1) = 5/10$
$P(A/H_2) = 6/10$
$P(A/H_3) = 7/10$

Подставляем в формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$
$$= 2/15 \cdot 5/10 + 8/15 \cdot 6/10 + 5/15 \cdot 7/10 =$$
$$= 31/50 = 0,62$$

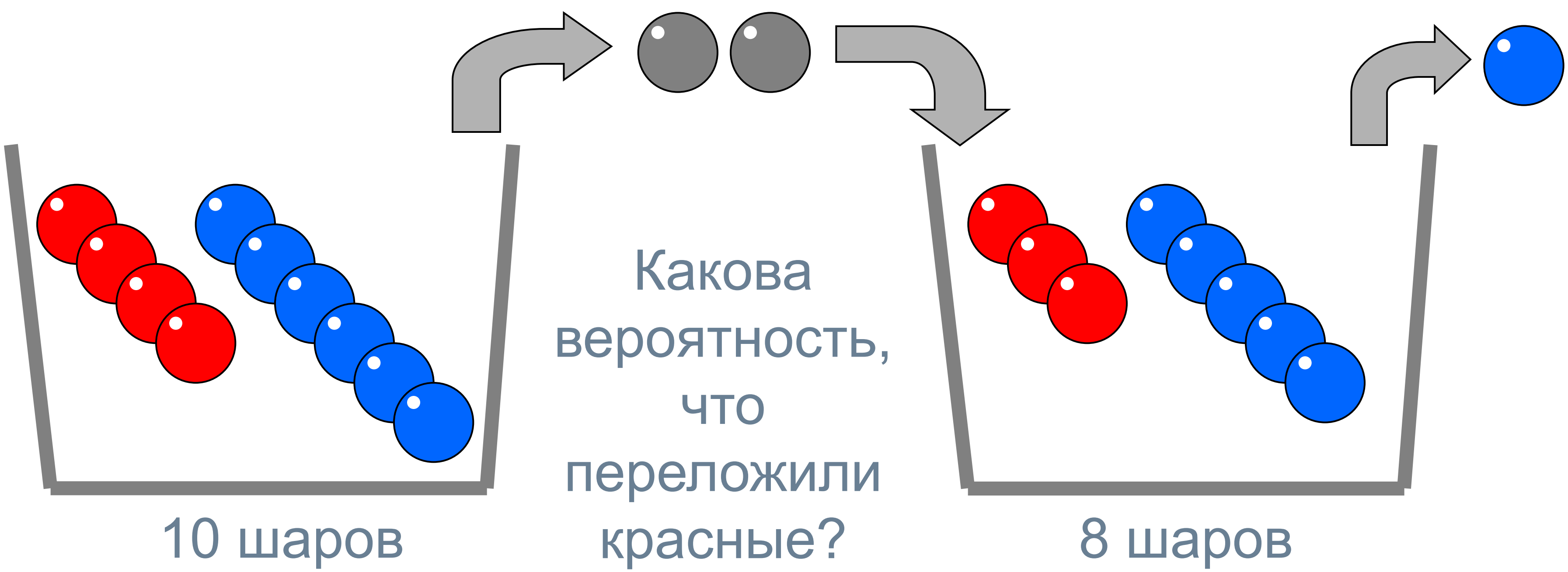
6-5
Формула Байеса

Объяснение формулы

Пример

Обратная задача

В первой урне было 4 красных и 6 синих шара. Во второй урне 3 красных и 5 синих. Два шара переложили из первой во вторую урну, и после этого из второй вытащили один шар. Он оказался синим. Какова вероятность, что переложили два красных?



Формула Байеса

Для нахождения вероятности одного из событий полной группы при условии, что событие A уже произошло, используется формула Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)}$$

Решаем обратную задачу

Считаем вероятность по формуле Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} =$$

$$= \frac{2/15 \cdot 5/10}{31/50} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{31} = 0{,}108$$

Ответ

С вероятностью 0,108 переложили два красных шара.

Если найти все вероятности:

	Было	**Стало**
Два красных	0,133	0,108
Красный и синий	0,533	0,516
Два синих	0,333	0,376
Всего	1,000	1,000


КОНЕЦ
И СЛАВА БОГУ!