Интегрирование некоторых функций

Лекция 2.

I. Интегрирование дробно-рациональных функций

Опр. **Дробной рациональной функцией** называют частное от деления двух многочленов.

При этом можно считать, что степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена в знаменателе (в противном случае, можно выделить целую часть, разделив "углом" числитель на знаменатель).

Пример. $\frac{x^3-3x+4}{x-2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{6}{x-2}$. Тогда интеграл от исходной дроби сведется к сумме интегралов от многочлена и правильной дроби.

Как известно из теории многочленов, каждый многочлен может быть представлен в виде произведения многочленов (разложен на множители) первой и/или второй степени в зависимости от того, действительные или комплексные у него корни, причем кратным корням отвечают одинаковые множители. В соответствии с этим, рациональная дробь представляется в виде суммы некоторого количества выражений следующих видов:

- $$\frac{A}{(x-c)^m},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$, $m, s \in \mathrm{N}$, где x^2+px+q - трехчлен с действительными коэффициентами не имеет действительных корней ($D < 0$).

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Метод неопределённых коэффициентов.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$.

Решение. Общее правило интегрирования дробей.

1) Разложим знаменатель на линейные и квадратичные множители: $x^5 - x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1)$.

2) Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби: $\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$.

3) Приведем правую часть к общему знаменателю и освободимся от знаменателя:

$1 \equiv A(x^3-1) + B(x^4-x) + C(x^4+x^3+x^2) + Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2$.

$1 \equiv (B+C+D)x^4 + (A+C-D+E)x^3 + (C-E)x^2 - A$.

Пример

4) Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решим систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & B + C + D = 0, \\ x^3 & A + C - D + E = 0, \\ x^2 & C - E = 0, \\ x^0 & -A = 1. \end{array}$$

Отсюда получим: $A = -1$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$.

Тогда получим: $$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1}.$$

Пример

$$5)\ \int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{3(x-1)}+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,arctg\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

$$=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Интегралы от простейших дробей:

- 1 тип: $\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$

(подстановка $t = x - a$).

2 тип: $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = A \cdot \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C$

(применяется та же подстановка).

3 тип: Следующий интеграл находится путем такого преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{px^2+qx+r}dx = \frac{A}{2p}\int \frac{(2px+q)+\left(2p\frac{B}{A}-q\right)}{px^2+qx+r}dx =$$

$$= \frac{A}{2p}\int \frac{(2px+q)}{px^2+qx+r}dx + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{dx}{px^2+qx+r} =$$

$$= \ln\left|px^2+qx+r\right| + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right)\int \frac{dx}{px^2+qx+r}$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Произвольную постоянную здесь можно опускать, пока в правой части равенства есть хоть один интеграл. Первый из интегралов найден с помощью подстановки: $t = px^2 + qx + r$

Оставшийся интеграл путем несложных преобразований (выделение полного квадрата) легко привести к виду: $k\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$,

который приводится к табличному с помощью подстановки $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$, что дает в результате $\frac{1}{\beta} arctg \frac{x-\alpha}{\beta}$

Пример

- Вычислить интеграл $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx.$

Решение. Это интеграл 3-го типа, причем $D < 0$.

Получим $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \begin{bmatrix} x+1=t, \\ dx = dt \\ x = t-1, \end{bmatrix} =$

$= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = \int \frac{3t-2}{t^2+9} dt =$

$= \int \frac{3t}{t^2+9} dt - \int \frac{2}{t^2+9} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+9} dt - 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$

$= \frac{3}{2} \ln \left| t^2+9 \right| - \frac{2}{3} arctg \frac{t}{3} + C =$

$= \frac{3}{2} \ln \left| x^2+2x+10 \right| - \frac{2}{3} arctg \frac{x+1}{3} + C .$

Интегрирование дробно-рациональных функций

4 тип: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$, где $k \geq 2, q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Представим этот интеграл с помощью подстановки $x + \frac{p}{2} = t$ в виде суммы двух интегралов, один из которых легко берется:

$$A\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = I_1 + I_k,$$

где $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Первый интеграл I_1 находится легко. Если второй интеграл I_k проинтегрируем по частям, то получим рекуррентную формулу для вычисления интеграла для любого натурального числа $k > 1$:

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)((t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Пример

- Вычислить интеграл $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Решение. Здесь $a = 1$, $k = 3$.

Так как $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg\ t + C$, то

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{1^2}\left(\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot I_{2-1} + \frac{t}{2(2-1)((t^2+1^2)^{2-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{2(t^2+1^2)^1} + C = \frac{1}{2} arctg\ t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C;$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{1^2}\left(\frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}\cdot I_{3-1} + \frac{t}{2(3-1)((t^2+1^2)^{3-1}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} I_2 + \frac{t}{4(t^2+1^2)^2} + C = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} arctg\ t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + \frac{t}{4(t^2+1^2)^2} +$$

$$+ C_1;$$

II. Интегрирование рациональных выражений тригонометрических функций

- Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой

$$tg\,\frac{x}{2} = t,$$

которая называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Для преобразования рациональных выражений от $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ в алгебраические рациональные функции переменной t применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{2t}$$

Интегрирование тригонометрических функций. Четность функций.

- Тогда $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt =$
$= \int R_1(t)\,dt$, где $R_1(t)$ – рациональная функция от t.

Замечание. Обычно этот способ очень громоздкий, но он всегда приводит к результату. *На практике применяют другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств и вида подынтегральной функции.* В частности, удобны правила:

1) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ **нечетна** относительно $\boldsymbol{\sin x}$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\boldsymbol{\cos x = t}$;
2) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ **нечетна** относительно $\boldsymbol{\cos x}$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\boldsymbol{\sin x = t}$;

3) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ **четна** относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\boldsymbol{tg\,x = t}$;

4) Для интеграла $\int R(tg\,x)\,dx$ также применяется подстановка $\boldsymbol{tg\,x = t}$.

Тогда $\boldsymbol{tg\,x = t \Rightarrow x = arctgt,} \quad \boldsymbol{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$.

В этом случае применяют тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{tg\,x}{\sqrt{1+(tg\,x)^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+(tg\,x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

Пример 1.

- Вычислить интеграл $$\int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

Решение.

Используем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Так как $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, то

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C =$$

$$= -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+1} + C.$$

Пример 2.

- Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1+3cos^2x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{1+3cos^2x} = \left[\begin{array}{c} tg\,x = t,\ x = arctgt, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, cos^2x = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{3}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{tg\,x}{2} + C\,.$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

1) Если n – целое положительное нечетное число, то подстановка $\mathbf{\sin x = t}$;

2) Если m – целое положительное нечетное число, то подстановка $\mathbf{\cos x = t}$;

3) Если m и n – целые неотрицательные четные числа, то применяют формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$;

4) Если $m + n$ – целое отрицательное четное число, то подстановка $\boldsymbol{tg\, x = t}$.

Пример 3.

- Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int cos^{-1} x sin^{-3} x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{lll} m+n=-4, & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ tg\, x = t, & x = arctgt, & dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\, dt = \int \frac{1}{t^3}\, dt + \int \frac{1}{t}\, dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2tg^2 x} + \ln|tg\, x| + C.$$

Интегралы вида $\int tg^m x\, dx$ и $\int ctg^m x\, dx$,

где m – целое положительное число. Применяются формулы

$$tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1, \quad ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1,$$

с помощью которых последовательно понижается степень $tg\, x$ и $ctg\, x$.

Пример. $\int tg^3 x\, dx = \int tg^2 x \cdot tg\, x\, dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right) \cdot tg\, x\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{tg\, x}{cos^2 x} - tg\, x\right) dx = = \int \frac{tg\, x}{cos^2 x} dx - \int tg\, x\, dx =$$

$$= \int tg\, x\, d(tg\, x) - \int tg\, x\, dx = \frac{tg^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$.

- Применим известные тригонометрические формулы:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Пример.

$$\int \sin 2x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \cos(-3x)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos(-3x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Интегрирование иррациональных функций

I. Пусть $\int R(x; x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})\, dx$ – рациональная функция своих аргументов; m, n, …, r, s – целые числа.

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Тогда подстановка $\boldsymbol{x = t^k}$, $\boldsymbol{dx = k \cdot t^{k-1}\, dt}$ преобразует данный интеграл в интеграл от рациональной функции.

II. Пусть $\int R(x; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}})\, dx$, тогда подстановка $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} = t^k}$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Пример

- Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \begin{bmatrix} 2x+1=t^6, \\ 2\,dx = 6t^5\,dt \\ dx = 3t^5\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3} =$$

$$= 3\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt = 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= 3\,\frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln\left|\,t-1\,\right| + C = \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}} +$$

$$+3(2x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|\,(2x+1)^{\frac{1}{6}} - 1\,\right| + C.$$

Интегрирование некоторых видов иррациональностей

- **Тригонометрические подстановки** применяются, если:

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, подстановка $\boldsymbol{x = a \sin t}$.

2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$, подстановка $\boldsymbol{x = a\, tg\, t}$.

3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$, подстановка $\boldsymbol{x = a\, sec\, t = \frac{a}{\cos t}}$

или $\boldsymbol{x = a\, cosec\, t = \frac{a}{\sin t}}$.

Интегрирование некоторых видов иррациональностей

- **Формулы:**

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}) + C.$

2. $\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + A} + A ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right|) + C.$

$(A \neq 0)$.

Пример

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t, \frac{x}{2} = \sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{4-4sin^2t}}{4sin^2t} 2\cos t\,dt = \int \frac{\sqrt{1-sin^2t}}{sin^2t}\cos t\,dt =$$

$$= \int ctg^2t\,dt = \int \frac{dt}{sin^2t} - \int dt = -ctgt - t + C =$$

$$= \left[ctgt = \frac{\sqrt{1-sin^2t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - arcsin\frac{x}{2} + C.$$