

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

**СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ,
СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ
МАТРИЦЫ**

Собственные значения матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n
постоянными действительными элементами a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор \vec{h} называется соответствующим собственным вектором матрицы A если выполняется равенство:

$$A \cdot \vec{h} = \lambda \cdot \vec{h}. \quad (1)$$

Собственные значения матрицы

Определение. Множество всех собственных значений матрицы называется *спектром матрицы*.

Замечание. Представим равенство (1) в сл. виде:

$$A\vec{h} - \lambda\vec{h} = \vec{0}; \quad \text{или} \quad (A - \lambda E) \cdot \vec{h} = \vec{0}, \quad (2)$$

E – единичная матрица порядка n . Равенство (2) является системой линейных алгебраических уравнений относительно вектора \vec{h} .

Собственные значения матрицы

Система вида (2) всегда совместна, так как всегда имеет нулевое решение.

Система (2) имеет тривиальное (нулевое $\bar{h} = \bar{0}$) решение, если определитель матрицы $|A - \lambda E| \neq 0$;

Система (2) имеет ненулевые решения $\bar{h} \neq \bar{0}$, если

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (3)$$

Собственные значения матрицы

Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением матрицы* A .

Решения уравнения (3) называются *собственными значениями* матрицы A .

Уравнение (3) можно представить в сл. виде

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Собственные значения матрицы

Вычислив определитель, разложив его по элементам первой строки, и сгруппировав подобные члены, получим алгебраическое уравнение степени n

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n = 0 \quad (*)$$

относительно λ , а b_1, b_2, \dots, b_n — где постоянные действительные числа $b_n = (-1)^n \cdot |A|$.

Многочлен n -ой степени относительно λ называется

A .

характеристическим многочленом матрицы

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Согласно основной теореме алгебры характеристическое уравнение всегда имеет ровно n корней (с учетом их кратности), которые в общем случае являются комплексными числами.

Теорема. Любая постоянная квадратная матрица A порядка n имеет с учетом кратности ровно n собственных значений, совпадающих с корнями характеристического уравнения.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Замечание. Задача нахождения собственных значений матрицы A сводится к решению характеристического уравнения $(*)$.

Пример. Найти собственные значения и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 9 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0.$$

$$\lambda_1 = -5;$$

$$\lambda_2 = 7;$$

Найдем собственный вектор

соответствующий собственному

значению

$$\lambda_1 = -5;$$

$$h^{(1)} = (h_1, h_2)$$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

$$(A - \lambda E) \cdot \bar{h} = \bar{0}, \quad (A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 - (-5) & 4 \\ 9 & 1 - (-5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6h_1 + 4h_2 = 0 \\ 9h_1 + 6h_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow h_2 = -1,5h_1.$$

Положив $h_1 = c_1,$
получим

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1,5c_1 \end{pmatrix}; \quad c_1 \neq 0.$$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1,5c_1 \end{pmatrix}; \quad c_1 \neq 0$$

является собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = -5$.

Аналогично для собственного значения $\lambda_2 = 7$;

получим следующее

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}; \quad c_2 \neq 0$$

Свойства собственных значений матрицы

- Произведение собственных значений матрицы A равно ее определителю

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot$$

- Число отличных от нуля собственных значений матрицы A равно ее рангу.

- Все собственные значения матрицы отличны от нуля только и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Свойства собственных значений матрицы

- Если $\lambda \neq 0$ – собственное значение невырожденной матрицы A , то $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ – собственное значение матрицы A^{-1} .
- Если $\lambda \neq 0$ – собственное значение матрицы A , то λ^m – собственное значение матрицы A^m (m – натуральное число).

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

1. Если из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

найденное собственное значение λ_1 кратности k_1 , $1 \leq k_1 \leq n$,

то поиск соответствующих числу λ_1 собственных векторов $\bar{h} \neq \bar{0}$ матрицы A сводится к решению линейной системы $(A - \lambda_1 E) \cdot \bar{h} = \bar{0}$ с постоянной квадратной матрицей $A - \lambda_1 E$ порядка n .

Линейная зависимость векторов

- **Определение** . Векторы a_1, a_2, \dots, a_n линейного векторного пространства V называются линейно зависимыми, если существуют числа

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что справедливо равенство:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \quad (1)$$

Определение . Векторы a_1, a_2, \dots, a_n линейного векторного пространства называются **линейно независимыми**, если выполнение равенства (1) возможно только при условии:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Система $(A - \lambda_1 E) \cdot \bar{h} = \bar{0}$

всегда имеет бесконечное множество решений,
в котором число базисных (то есть максимальное число
линейно независимых) решений равно $n - r_1$,
где r_1 — ранг матрицы, то есть целое
неотрицательное число, $0 \leq r_1 \leq n - 1$.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Поэтому любому собственному значению квадратной матрицы A соответствует хотя бы один линейно независимый собственный вектор.

Более того, число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 кратности k_1 , не превосходит числа k_1 .

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

2. Если λ_1 – простое собственное значение матрицы A , тогда этому числу отвечает ровно один линейно независимый собственный вектор $\bar{h}_1 \neq \bar{0}$, который находим из системы $(A - \lambda_1 E) \cdot \bar{h} = \bar{0}$ например, с помощью метода Гаусса.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

3. Случай, когда характеристическое уравнение

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n = 0 \quad (*)$$

имеет комплексный корень λ_1 кратности $k_1 \geq 1$.

Так как данное алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, то оно обязательно

имеет корень λ_2 комплексно-сопряженный по отношению к λ_1 .

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Кратность корня λ_2 равна числу k_1 . Поэтому следует найти собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_1 .

Далее нужно построить к ним комплексно-сопряженные векторы, которые являются собственными векторами, соответствующими собственному значению λ_2 .

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

4. Пусть у матрицы A есть кратное собственное значение λ_1 кратности $k_1 \geq 2$. Тогда, решая систему будет найдено $n - r_1$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих числу λ_1 .

Причем число $n - r_1$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$1 \leq n - r_1 \leq k_1,$$

где $r_1 = r(A - \lambda_1 E)$.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Замечание. Если оказывается, что $n - r_1 = k_1$, то для собственного значения λ_1 будет найдено столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность рассматриваемого собственного значения λ_1

Примеры

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} (4 - \lambda) & -1 \\ 1 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Примеры

$\lambda_1 = 3$ – собственное значение кратности $k_1 = 2$.

$$(A - \lambda E) \cdot \bar{h} = \bar{0}, \quad (A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (4-3) & -1 \\ 1 & (2-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = h_2 = C \quad \Rightarrow \quad h = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



