# Лекция N7

## Тема:

## Метод Гаусса

# Решение систем линейных уравнений.

## Метод Гаусса

**Пример.**

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 1, \\ -x + y - z = -1. \end{cases}$$

1) Составим расширенную матрицы системы

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

# 2) Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$A|b=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\end{array} \begin{array}{c} -2 \\ + \end{array} \to$$

$$\to$$

$$\bullet\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$
\rightarrow \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad x & \quad y & \quad z \qquad\qquad \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 3 \\
0 & -3 & -1 & -5 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad \rightarrow
$$

## 3) Составим новую систему

$$\begin{cases} x+z+y=3, \\ -z-3y=-5, \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{x=0}; \\ -z-3=-5; \quad \underline{z=2}; \\ \underline{y=1}; \end{array}$$

**Система имеет единственное решение**

**Можно было продолжить преобразования, и привести систему к виду Гаусса.**

## Теорема Кронекера-Капелли.

1) Если $r(A) \neq r(A \mid b)$, то система не имеет решения

2) Если $r(A) = r(A \mid b) = n$, где $n$ - число неизвестных, то система имеет единственное решение

3) Если $r(A) = r(A \mid b) \neq n$, то система имеет бесконечное множество решений.

# <u>Примеры</u>

**<u>Пример 1.</u> Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса.**

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ 5x+10y=20. \end{cases}$$

-5

$\rightarrow$

**Система имеет бесконечное множество решений. Найдем число свободных неизвестных** $k = n - r = 2 - 1 = 1.$

**Базисная неизвестная** $x$ **, свободная** $y$**.**

$$x + 2y = 4.$$

**Обозначим свободную неизвестную** $y = c.$
**Получим** $x = 4 - 2c.$

**<u>Ответ:</u>** $(4 - 2c, c)$**, где** $c \in (-\infty, +\infty).$

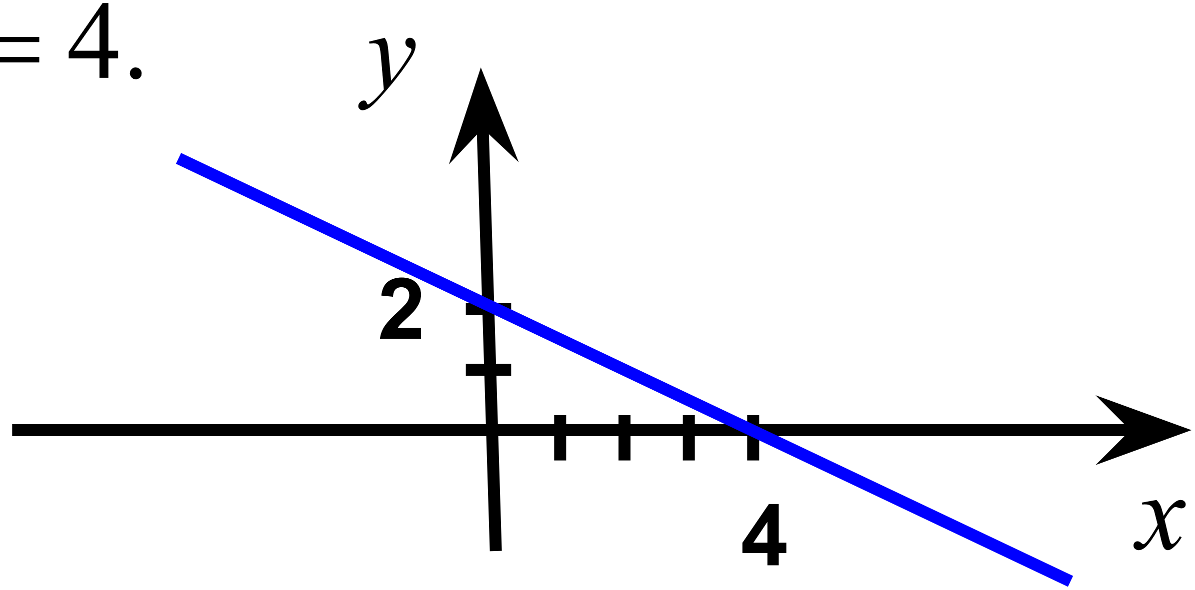
**В этом примере система имеет бесконечное множество решений.**

**Запишем некоторые из них:**

$$c = 0 \Rightarrow (4;0); \qquad c = 1 \Rightarrow (2;1).$$

**Все решения являются точками прямой**

$$x + 2y = 4.$$



**<u>Пример 2.</u> Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса.**

$$\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ x-5y-z=0, \\ 2x-3y+2z=-1. \end{cases}$$

$-1$ $-2$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -7 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

-1

**Система несовместна (по теореме Кронекера-Капелли)**

**Мы рассмотрели два метода решения систем линейных уравнений:**

**1) Метод Крамера**

**2) Метод Гаусса**

**Метод Крамера предполагает вычисление определителей. Мы вычисляли определители 3-его порядка разложением по элементам первой строки.**

**<u>Пример.</u>**

**Способ 1.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad -4 \quad 5$$

## Способ 2.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ -5 & 4 \end{matrix}\right| =$$

# Свойства определителей

**1) Определитель не изменится, если поменять строки на соответствующие столбцы**

**2) Если у определителя 2 одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.**

**3) Если у определителя нулевая строка или столбец, то он равен нулю.**

# Свойства определителей

**4) Если две строки (столбца) поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.**

**5) Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя.**

**6) Определитель не изменится, если к элементам строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число.**

**<u>Пример.</u>**

**Вычислить:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 128 & 2009 \end{vmatrix} =$$

**(т.к. две одинаковые строки)**

**Пусть дана матрица** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

**Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число** $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

**Определитель обозначают символом**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**Таким образом,**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Числа** $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ **называются элементами определителя**

**<u>Пример</u>**

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$$

**Приведем свойства определителя второго порядка**

**1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т.е.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, т.е.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

**3. Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.**

**4. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно выносить за знак определителя:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**5.** **Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю**

**6.** **Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т.е.**

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

# Определитель третьего порядка

**Рассмотрим матрицу**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

# Определителем третьего порядка называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

**Назовем минором, соответствующим данному элементу определителя третьего порядка, определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Например, минор $M_{12}$, соответствующий элементу $a_{12}$, есть определитель**

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Назовем алгебраическим дополнением**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

**Например,** $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11},$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}.$$

**<u>Правило.</u> Определитель третьего порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения**

**Пример**

**Вычислить**
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Разлагаем по 1-му столбцу**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2.$$

# Можно разлагать по 2-ой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

## Свойства

**Все свойства определителей 2-ого порядка остаются справедливыми для определителей 3-его порядка.**

**<u>Пример</u>**

**Вычислить**

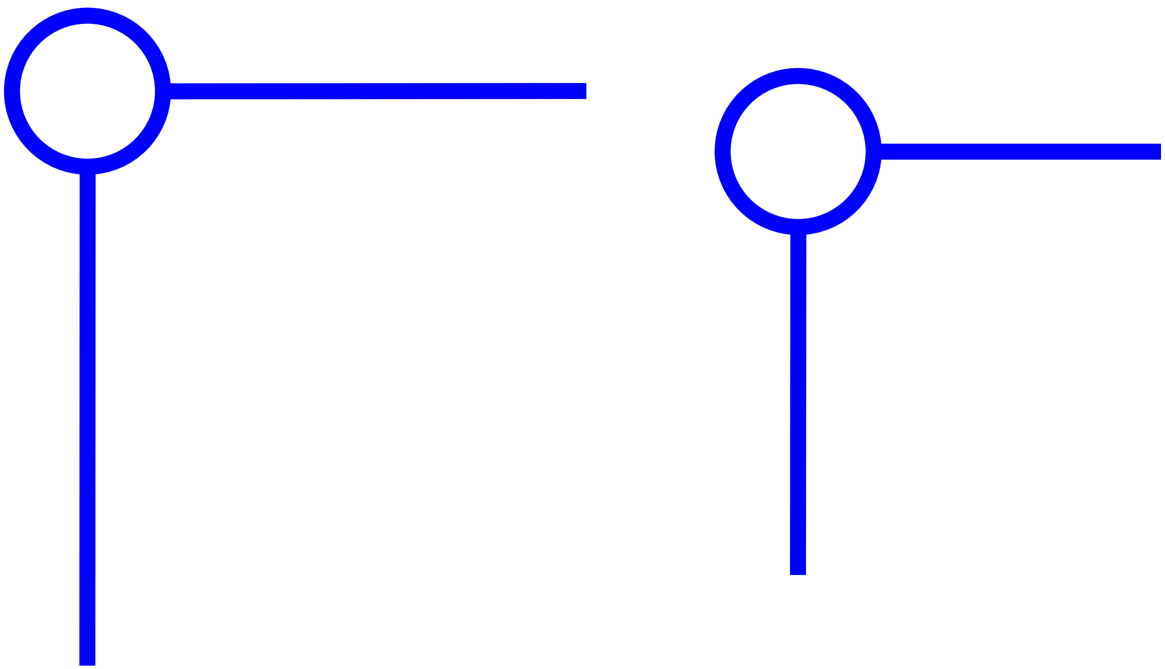
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 25 & 33 \end{vmatrix}$$

**т.к. совпадают первая и вторая строки.**

## Определители высших порядков

**Все свойства определителей 2-ого и 3-его порядков сохраняются для определителей высших порядков.**

**<u>Пример</u>**



## Обратная матрица

**Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц.**

**<u>Опр.</u> Матрица $A^{-1}$ называется обратной к матрице $A$, если**

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

$E$ **- единичная матрица**

**<u>Теорема.</u> Для того, чтобы квадратная матрица *A* имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица *A* была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.**

**Рассмотрим**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Составим новую матрицу $B^T$, поменяв местами строки и столбцы (матрица $B^T$ называется транспонированной).

$$B^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

## Составим матрицу, обратную матрице второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

**Здесь** $A_{11} = a_{22}; \quad A_{12} = -a_{21};$

$$A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = a_{11}.$$

**Тогда**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

**<u>Пример.</u>**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = -9; \ \ |A| \neq 0,$$

**то *A* – невырожденная, и, следовательно, существует обратная матрица**

# Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}^T=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

## Свойства

1. $|AB| = |A| \cdot |B|.$

2. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}.$

**<u>Примеры</u>**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Вычислить определитель произведения** $|AB|$.

**По свойству 1**

$$|AB| = |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - 0) \cdot (3 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -2.$$

# Домашнее задание

**1. Проверить, что, действительно** $A \cdot A^{-1} = E.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix};$$

# Домашнее задание

**2.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Вычислить** $\left|A \cdot B\right|, \quad \left|A^{-1}\right|, \quad \left|B^{-1}\right|.$