Математика

Данчул Александр Николаевич
зав. кафедрой информационных технологий в управлении, д.т.н., профессор

436-03-23, каб.2125 (2 корп.)
DANCH@UR.RAGS.RU
2012 г.

Место и содержание курса

1. Логика

2. Математика

а) линейная алгебра

б) математический анализ

в) теория вероятностей

3. Основы математического моделирования социально-экономических процессов

4. Методы принятия управленческих решений

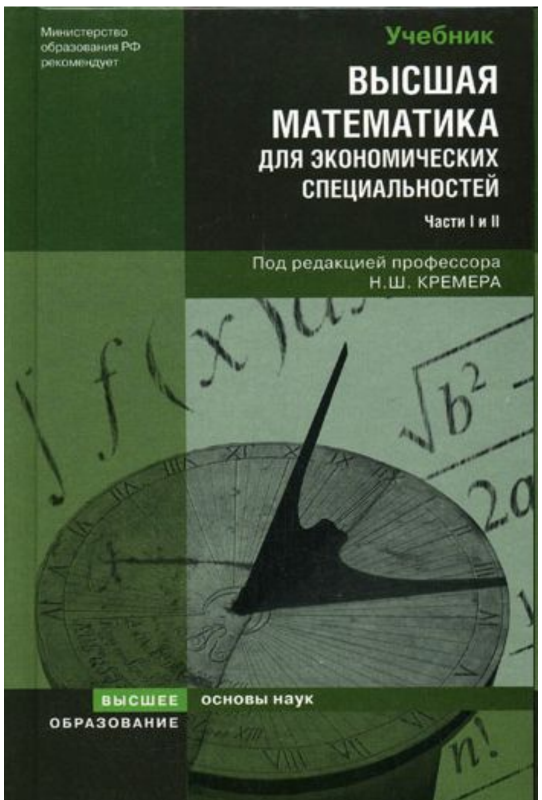
5. Статистика

	Тема	Лекции	Семин.
1	Матрицы и определители	4	6
2	Системы линейных алгебраических уравнений	2	6
3	Линейные пространства и преобразования	2	6
4	Функции одной переменной. Числовые последовательности. Пределы последовательностей и функций	4	4
5	Дифференциальное исчисление	4	4
6	Неопределенный и определенный интегралы	4	4
7	Ряды	4	4
8	Функции нескольких переменных	4	4
9	Случайные события	2	6
10	Случайные величины	4	4

Основная литература

1. Высшая математика для экономических специальностей. Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2008.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ, 2007.



Тема 1.
Матрицы и определители

Лекция 1

Матрицы. Определение и виды.

Опр. 1. Матрицей размера $m \times n$ (*m* на *n*) называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов.

Числа - элементы матрицы *A* обозначаются a_{ij}, где первый индекс *i* – номер строки, а второй индекс *j* – номер столбца.

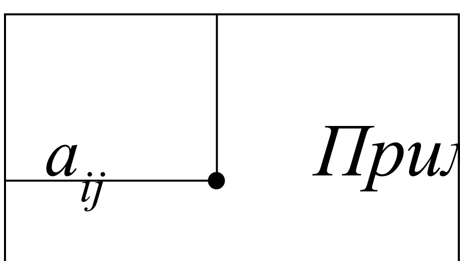
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сокращенная запись

$A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}$ или $A = [a_{ij}]$.

j

i



Пример

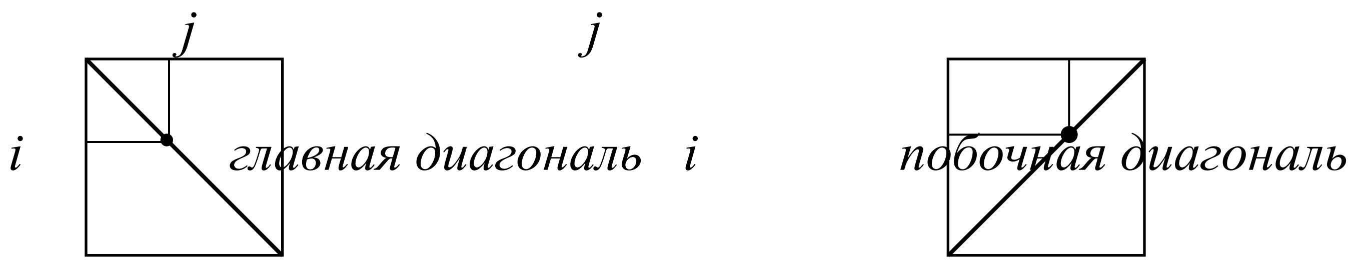
$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad a_{21} = 5$$

Виды матриц

Опр. 2. Матрица называется *квадратной*, если число строк m равно числу столбцов n. Число n называется порядком квадратной матрицы. Обозначение квадратной матрицы n -го порядка A_n

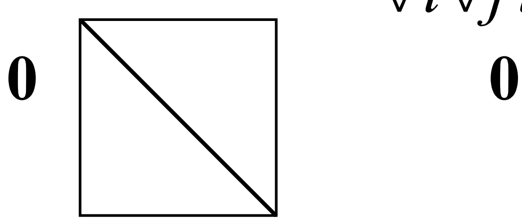
Опр. 3. Множество всех элементов a_{ii} матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца, называется *главной диагональю*.

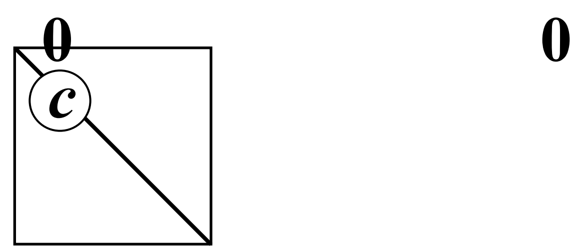
Опр. 4. Множество всех элементов a_{ij} квадратной матрицы, у которых сумма номера строки и номера столбца $i+j=n+1$, называется *побочной диагональю*.



Опр. 5. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны 0.

$$\forall i \forall j \; i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$



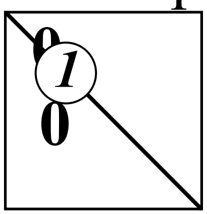


Виды матриц

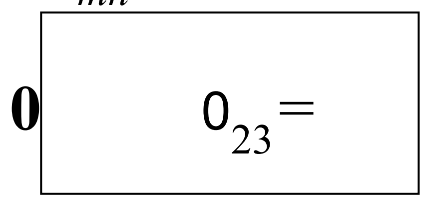
Опр. 6. Диагональная матрица называется *скалярной*, если все ее элементы, принадлежащие главной диагонали, равны одному и тому же числу c.

Опр. 7. Скалярная матрица называется *единичной*, если все ее элементы, принадлежащие главной диагонали, равны 1. Обозначается E_n.

Опр. 8. Прямоугольная матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны 0. Обозначается 0_{mn}

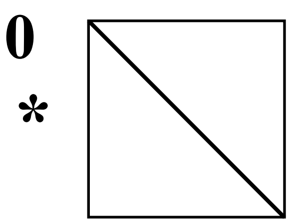


$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

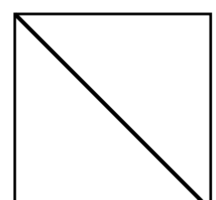


$$0_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Опр. 9. Квадратная матрица называется верхней (нижней) треугольной, если все ее элементы, находящиеся ниже (выше) главной диагонали, равны 0.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



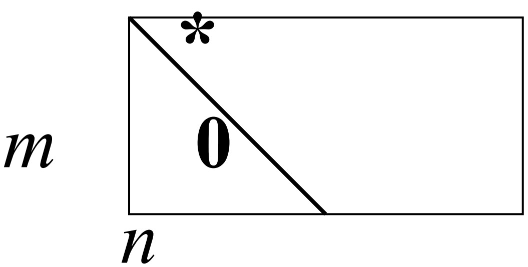
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

нижняя треугольная матрица   верхняя треугольная матрица

Виды матриц

Опр. 10. Прямоугольная матрица называется верхней трапециедальной, если $m<n$ и все ее элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны 0.

Опр. 11. Прямоугольная матрица с одним столбцом ($n=1$) называется вектором-столбцом, прямоугольная матрица с одной строкой ($m=1$) называется вектором-строкой.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

верхняя трапециедальная матрица   вектор-столбец   вектор-строка

Матрицы и основные операции над ними

Опр. 12. Две матрицы A и B равны, если у них одинаковый размер и они совпадают поэлементно.

$$A_{mn} = B_{mn} \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall i \forall j \; a_{ij} = b_{ij}$$

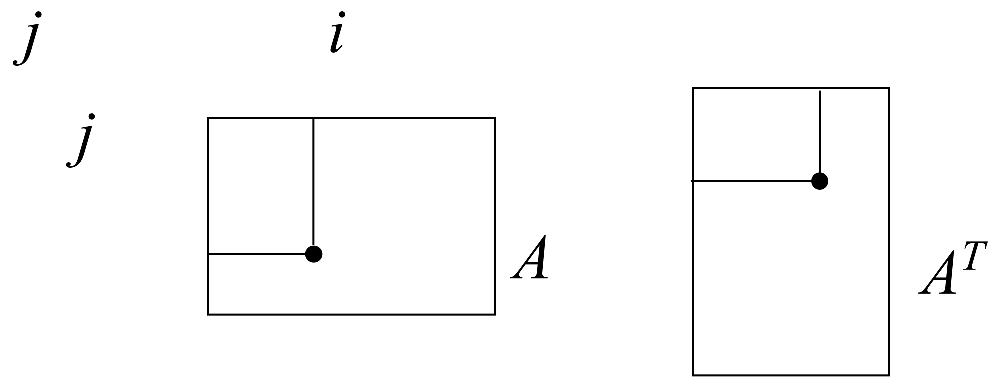
Над матрицами определены две одноместные операции

1. Транспонирование

Строки матрицы становятся столбцами (а столбцы – строками) с тем же номером

$$A^T = [a_{ij}]^T_{mn} = [a_{ji}]_{nm}$$

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 3\,1\,4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$



2. Умножение матрицы на число λ

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn} \qquad -A = (-1) \cdot A \qquad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 3\,1\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,0\,4 \\ 6\,2\,8 \end{pmatrix}$$

Матрицы и основные операции над ними

Над матрицами определены три двухместные операции

1. Сложение матриц

Складываются соответствующие элементы матриц одинакового размера

$$[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} \underset{Df}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

Сложение матриц имеет те же свойства, что и сложение чисел

$A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$; $A+0=0+A=A$; $A+(-A)=(-A)+A=0$

2. Вычитание матриц

$$[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij}]_{mn} - [b_{ij}]_{mn} \underset{Df}{=} [a_{ij}]_{mn} + (-1)\cdot[b_{ij}]_{mn} = [a_{ij} - b_{ij}]_{mn}$$

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 3\,1\,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\,3\,2 \\ 1\,1\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,3\,4 \\ 4\,2\,9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 3\,1\,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\,3\,2 \\ 1\,1\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

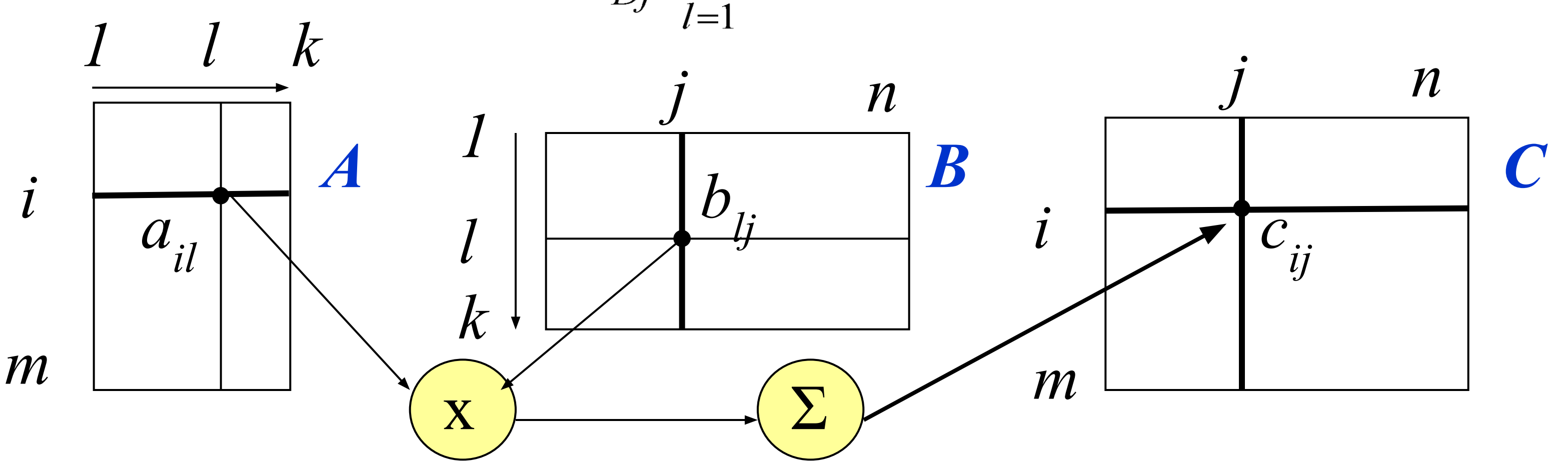
Матрицы и основные операции над ними

3. Умножение матриц

определено, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором сомножителе.

Результатом умножения матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ является матрица C размера $m \times n$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме всех попарных произведений элементов, стоящих на одинаковых местах в i-ой строке матрицы A и в j-ом столбце матрицы B.

$$A_{mk} \cdot B_{kn} = C_{mn} \qquad c_{ij} \underset{Df}{=} \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$



Матрицы и основные операции над ними

Умножение матриц имеет ряд свойств, что и у умножения чисел:

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – при соответствии размеров;

$$A_{mn} \cdot E_n = E_m \cdot A_{mn} = A_{mn}$$

$$c_{ij} \underset{Df}{=} \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot e_{lj} = \sum_{l=1,\, l \neq j}^{n} a_{il} \cdot e_{lj} + a_{ij} \cdot e_{jj} = \sum_{l=1,\, l \neq j}^{n} a_{il} \cdot 0 + a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$$

В то же время умножение матриц не только не всегда возможно, но и в общем случае некоммутативно

$$C_{33} = A_{32} \cdot B_{23} \neq D_{22} = B_{23} \cdot A_{32}$$

Даже если умножаются квадратные матрицы $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства операций над матрицами

Большинство свойств (при соответствующих размерах матриц) аналогичны свойствам операций над числами:

1) $\forall A \forall B \quad A+B=B+A$

2) $\forall A \forall B \forall C \quad A+(B+C)=(A+B)+C$

сложение

3) $\forall \lambda \forall \mu \forall A \ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

4) $\forall \lambda \forall \mu \forall A \ (\lambda+\mu)A=(\lambda A+\mu A)$

умножение на число

5) $\forall \lambda \, \forall A \forall B \quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ *сложение и умножение на число*

6) $\forall A \forall B \forall C \ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ *умножение*

7) $\forall \lambda \forall A \forall B \quad \lambda(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B$ *умножение и умножение на число*

8) $\forall A \forall B \forall C \quad A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \quad (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

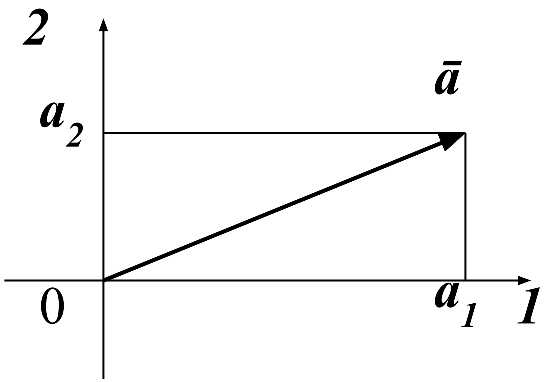
сложение и умножение

Однако в общем случае:

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

Геометрическая интерпретация векторов

Опр. 13. *Геометрическим вектором* на плоскости (в пространстве) с прямоугольной системой координат называется отрезок, направленный из начала координат в произвольную точку плоскости (пространства). Координатами вектора называются координаты этой точки.



Алгебраическому вектору-строке

$$a = (a_1, a_2)$$

(или столбцу) можно поставить в соответствии геометрический вектор на плоскости с координатами a_1 и a_2.

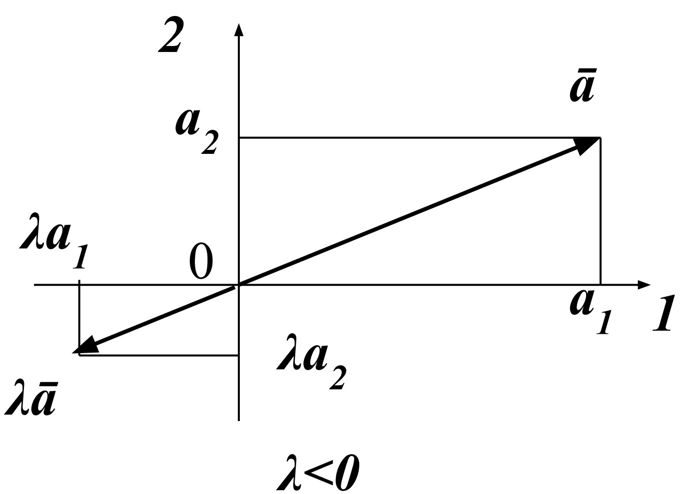
Вектору $a = (a_1, a_2, a_3)$ сопоставляется геометрический вектор в пространстве с координатами a_1, a_2 и a_3.

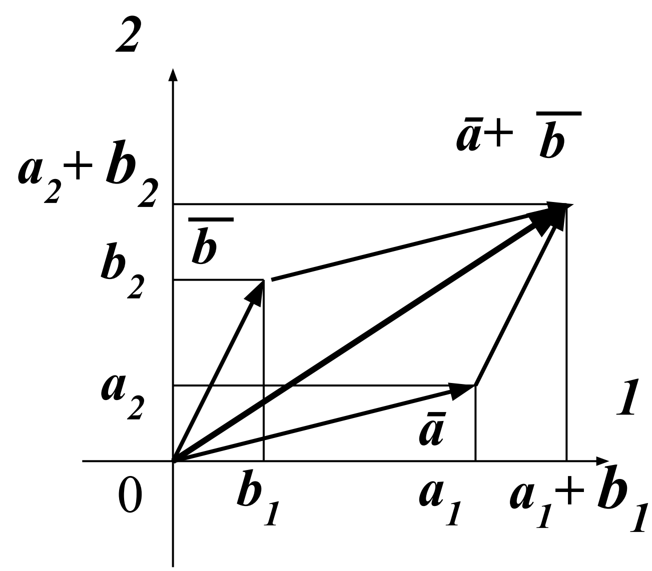
Геометрическая интерпретация векторов

Результаты операций над геометрическими векторами соответствуют результатам операций над соответствующими алгебраическими векторами.

$$\vec{a} \leftrightarrow a = (a_1, a_2) \qquad \vec{b} \leftrightarrow b = (b_1, b_2)$$

$$\lambda\vec{a} \leftrightarrow \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2) \qquad \vec{a} + \vec{b} \leftrightarrow a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$





Определитель квадратной матрицы

Важнейшей числовой характеристикой *квадратной* матрицы является ее *определитель* (детерминант).
В общем случае определитель матрицы размера n вычисляется как составленная по определенным правилам алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n элементов матрицы, причем из каждой строки (и из каждого столбца) матрицы входит в это произведение ровно один элемент.

Обозначения: $\det A$, $\mathrm{d}(A)$, A

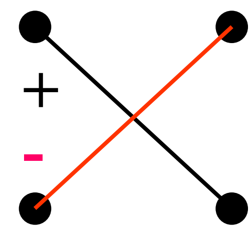
Зададим правила вычислений определителей 2-го и 3-го порядка, а затем приведем формулу для вычисления определителя n-го порядка.

Определитель квадратной матрицы
1-го и 2-го порядка

n=1. $A=(a_{11})$ $\det A = a_{11} = a_{11}$

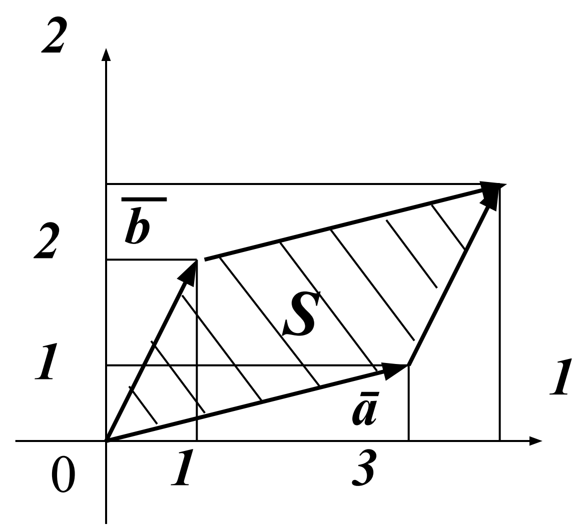
n=2. Определитель равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot 1 = 5 = S$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -5 = -S$$

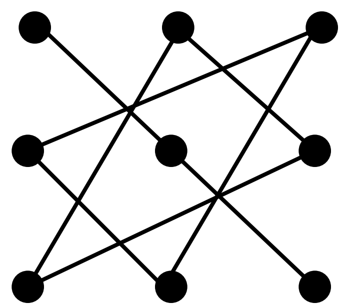


Определитель квадратной матрицы 3-го порядка

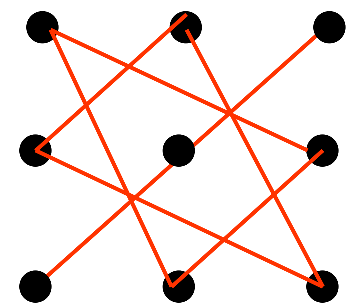
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

\+



\-



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5 + 0\cdot 4\cdot(-2) + 2\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-2) - 0\cdot(-1)\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 =$$

$$= 15 + 0 + (-2) - (-12) - 0 - 4 = 21$$