Доказательство неравенств методом математической индукции

Что такое принцип математической индукции?

- Вообразим очередь, где первой стоит женщина, за ней снова женщина, а за ней снова женщина. Верно ли, что все стоящие в очереди — женщины?
- Конечно, верно! Раз первые три человека в очереди — женщины, то, скорее всего, это очередь за косметикой, или за чем-нибудь таким, в чём нуждаются и разбираются исключительно женщины, и мужчин в этой очереди нет.
- Пусть подобные рассуждения иногда оправдывают себя на практике, они не являются математически строгими и никак не связаны с методом математической индукции, о котором мы сегодня хотим поговорить.

Рассмотрим два утверждения:

1. Первый человек в очереди есть женщина.
2. За женщиной в очереди может стоять только женщина.

Из этих двух утверждений строго следует, что в очереди стоят только женщины. Мы можем последовательными шагами показать что любой человек в очереди — женщина.

Вот строгая формулировка принципа математической индукции:

Пусть имеется последовательность утверждений И пусть первое утверждение верно и мы умеем доказать, что из верности утверждения следует верность . Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Докажем неравенство:
Пример 1:

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+n}\geqslant\frac{11}{30},$$

где $n>1$, $n\in \mathrm{N}$.

Доказательство. В случае $n=2$ имеем $\dfrac{11}{30}\geqslant\dfrac{11}{30}$.

Предположим, что данное неравенство справедливо при $n=k$, т. е.

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{2k+k}\geqslant\frac{11}{30}. \tag{7.1}$$

Покажем, что данное неравенство справедливо также в случае $n=$ $=k+1$.

При $n=k+1$ неравенство принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)+(k+1)}\geqslant\frac{11}{30}.$$

Прибавляя к обеим сторонам (7.1) выражение

$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2},$$

получим

$$\frac{1}{2k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+3} \geqslant \frac{11}{30}+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}.$$

Так как $\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0$ (упр. 1.19), то

$$\frac{1}{2k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+3} \geqslant \frac{11}{30}.$$

Таким образом, оба условия метода математической индукции удовлетворены. Следовательно, данное неравенство справедливо для натуральных значений n $(n>1)$.

Пример 2:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1, \tag{7.2}$$

где $n = 2, 3, \ldots$

Доказательство. Если это неравенство попытаться доказать аналогично примеру 7.1, то это нам не удастся. Как при доказательстве этого неравенств, так и при доказательстве некоторых других неравенств метод математической индукции целесообразно применить к другому неравенству (строгому или расширенному), из которого следует справедливость данного неравенства.

Для доказательства данного неравенства докажем неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}, \tag{7.3}$$

из которого следует справедливость (7.2).

При $n = 2$ получим следующее правильное неравенство: $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$.

Предположим, что неравенство (7.3) справедливо при $n = k$ $(k \geqslant 2)$, и покажем, что оно справедливо в случае $n = k + 1$. При $n = k$ имеем неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k}.$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства $\frac{1}{(k+1)^2}$, получим неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как $1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}$, то имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k+1};$$

последнее совпадает с рассматриваемым неравенством в случае $n = k + 1$, следовательно, данное неравенство справедливо для всех натуральных значений n, которые не меньше 2.

Часто встречаются неравенства, при доказательстве которых метод математической индукции применяется в несколько ином виде:

а) доказывается справедливость данного неравенства для натуральных значений n, равных $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, где $n_1 < n_2 < \ldots \ldots < n_k < \ldots$;

б) из справедливости данного неравенства при произвольном $n = k$ $(k \geqslant 2)$ следует, что оно справедливо при $n = k - 1$.

Пример 3:

$$\frac{x_1 \ldots x_n}{(x_1 + \ldots + x_n)^n} \leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_n)}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_n))^n},$$

где $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство для значений n, равных $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^k, \ldots$

При $n = 2$ имеем справедливое неравенство

$$\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} \leqslant \frac{(1 - x_1)(1 - x_2)}{((1 - x_1) + (1 - x_2))^2}$$

(упр. 1.20).

Предположим, что в случае $n = 2^k$ данное неравенство справедливо. Докажем его справедливость при $n = 2^{k+1}$. Имеем

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_p x_{p+1} \ldots x_{2p}}{(x_1 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{2p})^{2p}} =$$

$$= \frac{x_1 \ldots x_p}{(x_1 + \ldots + x_p)^p} \frac{x_{p+1} \ldots x_{2p}}{(x_{p+1} + \ldots + x_{2p})^p} \times$$

$$\times \frac{(x_1 + \ldots + x_p)^p (x_{p+1} + \ldots + x_{2p})^p}{(x_1 + \ldots + x_{2p})^{2p}} \leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_p)}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_p))^p} \times$$

$$\times \frac{(1-x_{p+1})\dots(1-x_{2p})}{((1-x_{p+1})+\dots+(1-x_{2p}))^p}\left(\frac{\dfrac{x_1+\dots+x_p}{p}\,\dfrac{x_{p+1}+\dots+x_{2p}}{p}}{\left(\dfrac{x_1+\dots+x_p}{p}+\dfrac{x_{p+1}+\dots+x_{2p}}{p}\right)^2}\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-x_1)\dots(1-x_{2p})}{((1-x_1)+\dots+(1-x_p))^p\,((1-x_{p+1})+\dots+(1-x_{2p}))^p}\times$$

$$\times\left(\frac{\left(1-\dfrac{x_1+\dots+x_p}{p}\right)\left(1-\dfrac{x_{p+1}+\dots+x_{2p}}{p}\right)}{\left(\left(1-\dfrac{x_1+\dots+x_p}{p}\right)+\left(1-\dfrac{x_{p+1}+\dots+x_{2p}}{p}\right)\right)^2}\right)^p =$$

$$= \frac{(1-x_1)\dots(1-x_{2p})}{((1-x_1)+\dots+(1-x_{2p}))^{2p}},$$

где $p=2^k$. Таким образом, получили неравенство

$$\frac{x_1\dots x_{2p}}{(x_1+\dots+x_{2p})^{2p}} \leqslant \frac{(1-x_1)\dots(1-x_{2p})}{((1-x_1)+\dots+(1-x_{2p}))^{2p}},$$

следовательно, в случае $n=2^t$ данное неравенство доказано. Теперь докажем, что если данное неравенство справедливо для m, то оно выполняется также в случае $m-1$, где $m\geqslant 2$. Имеем

$$\frac{x_1\dots x_m}{(x_1+\dots+x_m)^m} \leqslant \frac{(1-x_1)\dots(1-x_m)}{((1-x_1)+\dots+(1-x_m))^m}.$$