

ЛЕКЦИЯ №4
ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАПАСА
УСТОЙЧИВОСТИ САУ

Требования к управлению

В целом можно выделить четыре основных требования:

- ***точность*** – в установившемся режиме система должна поддерживать заданное значение выхода системы, причем ошибка (разница между заданным и фактическим значением) не должна превышать допустимую;
- ***устойчивость*** – система должна оставаться устойчивой на всех режимах, не должна идти «вразнос» (корабль не должен идти по кругу при смене курса);
- ***качество переходных процессов*** – при смене заданного значения система должна переходить в нужное состояние по возможности быстро и плавно;
- ***робастность*** – система должна сохранять устойчивость и приемлемое качество даже в том случае, если динамика объекта и свойства внешних возмущений немного отличаются от тех, что использовались при проектировании.



4.1 Основные понятия об устойчивости систем автоматического управления

Термин «устойчивость» используется в численных методах, механике, экономике, социологии, психологии. Во всех этих науках имеют в виду, что устойчивая система возвращается в состояние равновесия, если какая-то сила выведет ее из этого состояния.

Шарик находится в *устойчивом равновесии в положении А* – если немного сдвинуть его с места, он скатится обратно в ямку.

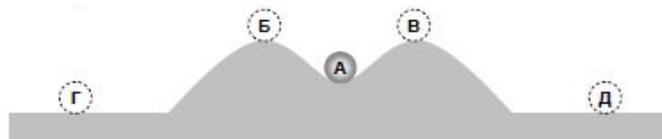
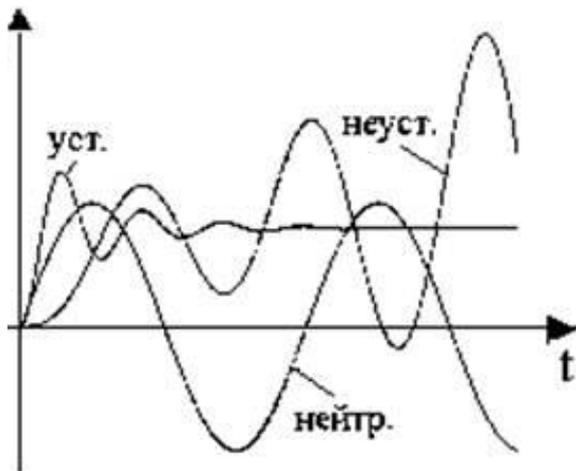
Однако, если шарик сильно отклонить от равновесия, он может свалиться через горку вбок, то есть устойчивость нарушится. В положениях *Б* и *В* шарик также находится в положении равновесия, но оно неустойчиво, так как при малейшем сдвиге в сторону шарик скатывается с вершины.

В положениях *Г* и *Д* равновесие шарика нейтральное – при небольшом смещении он остается в новом положении. При этом говорят, что система нейтрально устойчива, то есть находится на границе устойчивости. Как мы увидели, для нее устойчивость – не свойство системы, а свойство некоторого положения равновесия; может быть несколько положений равновесия, из них некоторые – устойчивые, а некоторые – нет; положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях (система устойчива «в малом») и неустойчиво при больших («в большом»).

Техническое понятие устойчивости систем автоматического управления отражает свойство технической системы не только стабильно работать в нормальных режимах, но и "не уходить вразнос" при отклонении всевозможных параметров системы от номинала и влиянии на систему дестабилизирующих воздействий.

Под *устойчивостью* понимается способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние после окончания действия возмущения, нарушившего это равновесие.

Неустойчивая система после воздействия возмущения удаляется от равновесного состояния или начинает совершать вокруг него колебания с нарастающей амплитудой.



Известно несколько определений устойчивости, которые отличаются некоторыми деталями.

Если рассматривается только выход системы при различных ограниченных входах, говорят об устойчивости **«выход-выход»**.

Кроме того, часто изучают **устойчивость автономной системы**, на которую не действуют внешние сигналы (все входы нулевые).

Предполагается, что систему вывели из положения равновесия (задали *ненулевые начальные условия*) и «отпустили». Система, которая сама возвращается в исходное положение равновесия, называется устойчивой.

Если при этом рассматривается только выход системы (а не ее внутренние сигналы), говорят о **«технической устойчивости»** (или **устойчивости по выходу**).

Внутренняя или математическая устойчивость означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия.

В некоторых задачах основной рабочий режим — это периодические колебания, поэтому можно рассматривать устойчивость процессов, а не только положения равновесия.



Устойчивость «вход-выход»

Обычно при инженерных расчетах в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы управляемая величина не росла неограниченно при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает *устойчивостью «вход-выход»* (при ограниченном входе выход также ограничен). Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, важен только вход и выход.

Пример: Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. При постоянном (ограниченном по величине!) входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польется через край), поэтому такая система не обладает устойчивостью «вход-выход».



«Техническая» устойчивость

В отличие от устойчивости «вход-выход», понятие **«техническая устойчивость»** относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю.

Положением равновесия называют состояние системы, которая находится в покое, то есть, сигнал выхода $y(t)$ – постоянная величина, и все его производные равны нулю.

Систему выводят из положения равновесия и убирают все возмущения. Если при этом с течением времени (при $t \rightarrow \infty$) система возвращается в положение равновесия, она называется **устойчивой**.

Если выходная координата остается ограниченной (не уходит в бесконечность), система называется **нейтрально устойчивой**, а если выход становится бесконечным – **неустойчивой**.

Пример: Если вернуться к примеру с ванной - система будет нейтрально устойчива, потому что уровень воды остается постоянным, когда мы перекроем кран. С одной стороны, уровень воды не возвращается к предыдущему значению, а с другой – не растет бесконечно (система не является неустойчивой)



Критерии устойчивости

Итак, для исследования устойчивости линейной системы достаточно найти корни ее характеристического полинома (многочлена). Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от мнимой оси), такой полином называется ***устойчивым***, потому что соответствующая линейная система устойчива. Полиномы, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называются ***неустойчивыми***.

На ранней стадии развития теории управления актуальной была задача определения устойчивости полинома без вычисления его корней. Конечно, сейчас легко найти корни характеристического полинома с помощью компьютерных программ, однако такой подход дает нам только количественные (а не качественные) результаты и не позволяет исследовать устойчивость теоретически, например, определять границы областей устойчивости.



Алгебраический критерий Гурвица

При проведении исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует, прежде всего, записав характеристическое уравнение, проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений и в то же время при его невыполнении не надо проводить дальнейших исследований.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

где полагаем (это всегда можно обеспечить умножением уравнения на -1).

Составим из коэффициентов характеристического уравнения определитель n -го порядка (матрица Гурвица):

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Матрица Гурвица строится следующим образом. На главной диагонали выписываются элементы a_1, a_2, \dots, a_n . Затем, двигаясь от этих элементов вверх, помещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, вниз — в порядке их убывания. При этом если индекс превышает n или принимает отрицательное значение, то вместо соответствующего коэффициента записывают нуль. Определитель Δ_n и его главные миноры называют определителями Гурвица.

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

Формулировка критерия Гурвица. Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического уравнения, были больше нуля:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Частотный критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова основан на рассмотрении характеристического уравнения замкнутой системы регулирования

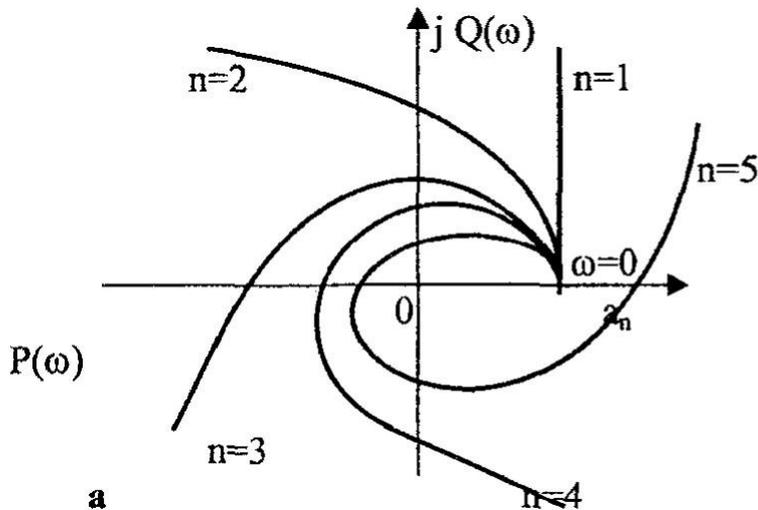
$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

Производя в (1) замену s на jw , получаем функцию комплексной переменной которая может быть представлена в виде суммы действительной $P(w)$ и мнимой $Q(w)$ частей:

$$F(jw) = \text{Re}[F(j\omega)] + j \text{Im}[F(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (2)$$

Функцию при фиксированном значении частоты можно изобразить на комплексной плоскости радиусом – вектором, который при изменении частоты w от 0 до бесконечности будет поворачиваться вокруг начала координат, одновременно изменяя свою длину. В результате функция (2) изобразится на комплексной плоскости в виде годографа, который называется частотным годографом Михайлова.

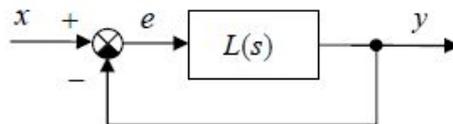
Формулировка критерия Михайлова. Для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении частоты от нуля до бесконечности, начинаясь при $w = 0$ на действительной положительной полуоси, проходил последовательно в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) n квадрантов, где n – порядок характеристического уравнения. Если годограф Михайлова проходит через начало координат, не заходя в очередной квадрант, то система находится на колебательной границе устойчивости, совершая незатухающие колебания.



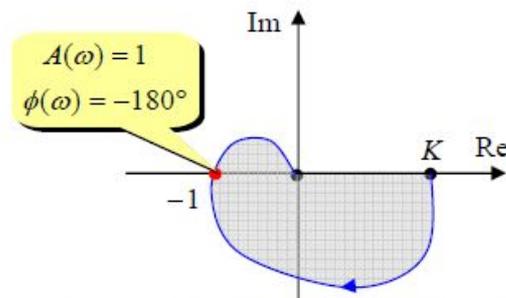
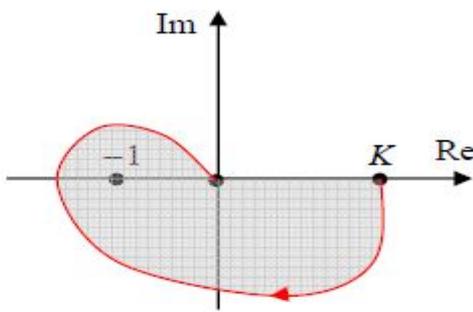
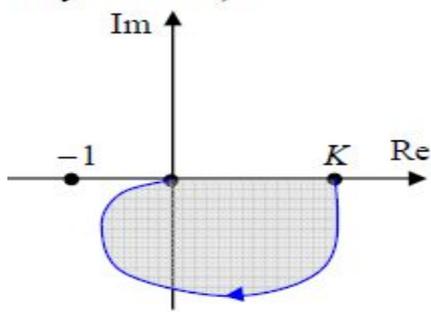
Критерий устойчивости Найквиста

Критерий Найквиста служит для исследования устойчивости замкнутых (с отрицательной обратной связью) систем автоматического управления по виду амплитудно – фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы.

Пусть $L(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы, а $L(j\omega)$ – ее частотная характеристика.

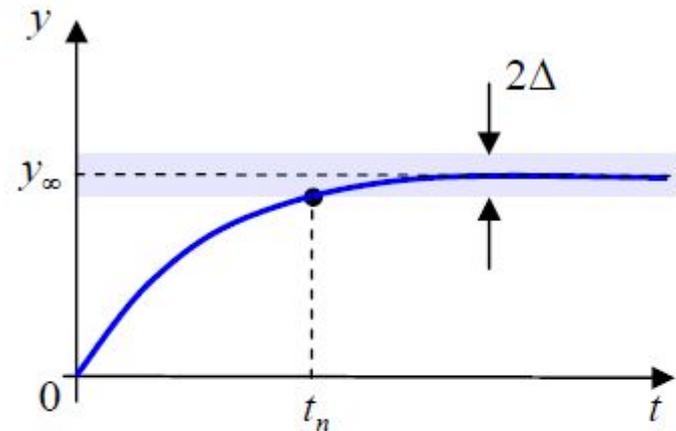
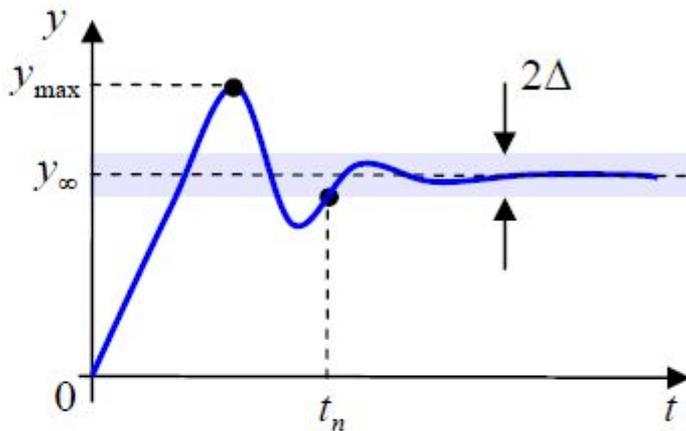


Для каждой частоты ω значение $L(j\omega)$ – комплексное число, которое можно изобразить точкой на комплексной плоскости. При изменении частоты от 0 до ∞ из этих точек складывается годограф Найквиста – некоторая кривая, которая начинается в точке $(K; 0)$ на вещественной оси и заканчивается в начале координат (если $L(s)$ – строго правильная функция, то есть степень ее числителя меньше степени знаменателя). Можно доказать, что система устойчива тогда и только тогда, когда годограф $L(j\omega)$ не охватывает точку $(-1; 0)$. Выражение «система находится на границе устойчивости» означает, что частотная характеристика проходит через точку $(-1; 0)$.



Переходный процесс

Хорошо спроектированная система должна не только быть устойчивой и поддерживать заданную точность в установившемся режиме, но и плавно переходить на новый режим при изменении заданного значения выхода (*уставки*). Качество переходных процессов обычно оценивается по переходной характеристике (реакции системы на единичный ступенчатый входной сигнал).



Время, в течение которого заканчивается переход на другой режим называется временем переходного процесса (t_n). Оно определяется как время, через которое регулируемая величина «входит в коридор» шириной 2Δ вокруг установившегося значения y_∞ . Обычно величина Δ задается в процентах от установившегося значения, чаще всего 2% или 5%.



Робастность

Обычно регулятор строится на основе некоторых приближенных (номинальных) моделей объекта управления (а также приводов и датчиков) и внешних возмущений. При этом поведение реального объекта и характеристики возмущений могут быть несколько иными. Поэтому требуется, чтобы разработанный регулятор обеспечивал устойчивость и приемлемое качество системы при малых отклонениях свойств объекта и внешних возмущений от номинальных моделей. В современной теории управления это свойство называют робастностью (грубостью). Иначе его можно назвать нечувствительностью к малым ошибкам моделирования объекта и возмущений.

Различают несколько задач, связанных с робастностью:

- робастная устойчивость – обеспечить устойчивость системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной;
- робастное качество – обеспечить устойчивость и заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной;
- гарантирующее управление – обеспечить заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели возмущения от номинальной (считая, что модель объекта известна точно).

