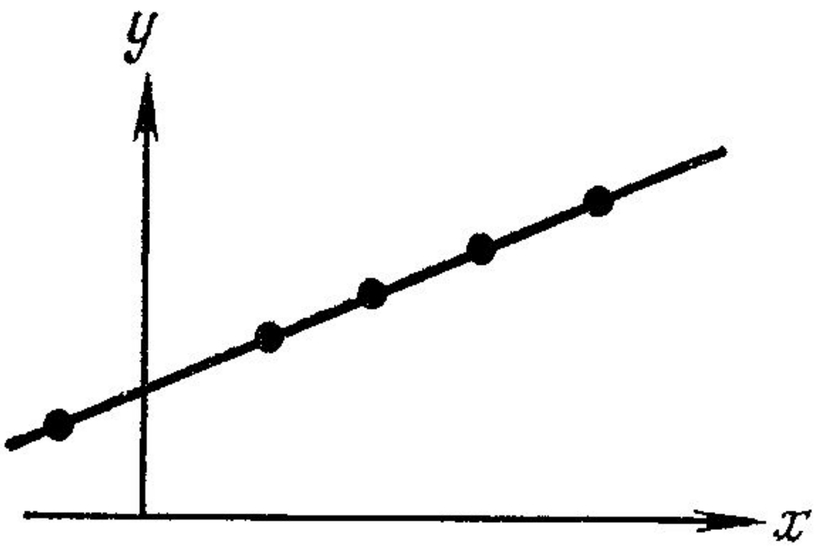
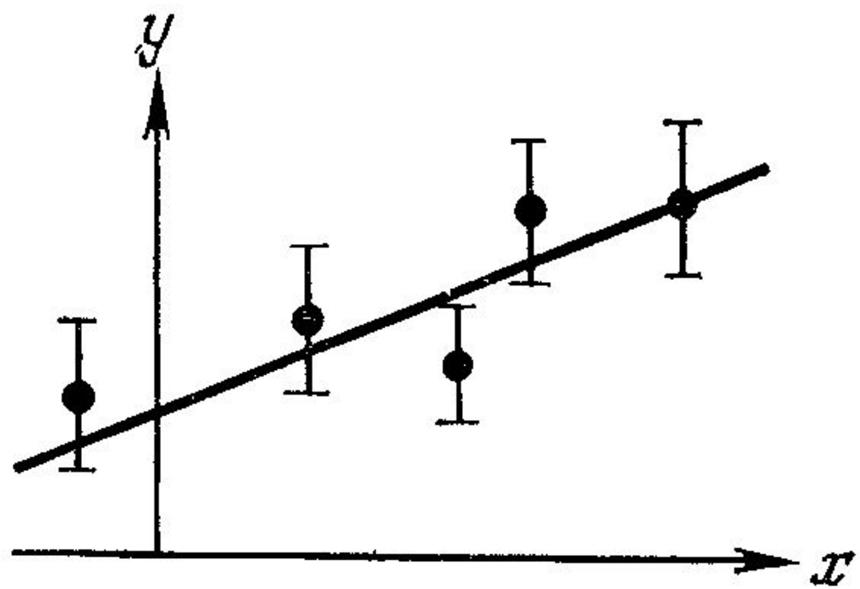
Метод наименьших квадратов

$$v = v_0 + gt.$$

$$y = A + Bx,$$





Метод наименьших квадратов - математический метод, основанный на определении аппроксимирующей функции, которая строится в ближайшей близости от точек из заданного массива экспериментальных данных. Близость исходной и аппроксимирующей функции F(x) определяется числовой мерой, а именно: сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от аппроксимирующей кривой F(x) должна быть наименьшей.

Аппроксимирующая функция по методу наименьших квадратов определяется из условия минимума суммы квадратов отклонений (ξ_i) расчетной аппроксимирующей функции от заданного массива экспериментальных данных. Данный критерий метода наименьших квадратов записывается в виде следующего выражения:

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \left(F(x_i) - y_i\right)^2 \rightarrow \min$$

$F(x_i)$ - значения расчетной аппроксимирующей функции в узловых точках x_i,

y_i - заданный массив экспериментальных данных в узловых точках x_i.

$$(\text{истинное значение } y_i) = A + Bx_i.$$

$$A = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{\Delta}$$

$$B = \frac{N\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\Delta}$$

$$\Delta = N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2.$$

Погрешность в измерениях *y*

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - A - Bx_i)^2,$$

Погрешность в постоянных *A* и *B*

$$\sigma_A^2 = \sigma_y^2 \sum x_i^2/\Delta \qquad \sigma_B^2 = N\sigma_y^2/\Delta,$$

Если объем некоторого количества идеального газа поддерживать постоянным, то его температура T будет линейной функцией давления в газе P

$$T = A + BP.$$

Здесь постоянная A — температура, при которой давление P падает до нуля (если газ не сконденсируется сначала в жидкость); она называется *абсолютным нулем температуры* и имеет принятое значение

$$A = -273{,}15 \text{ градусов Цельсия.}$$

Постоянная B зависит от природы газа, его массы и объема[1]). Измеряя ряд значений T и P, мы можем определить наилучшие оценки для постоянных A и B. В частности, постоянная A дает абсолютный нуль температуры.

Номер опыта i	Давление P_i, мм рт. ст.	Температура T_i, °C	$A+BP_i$
1	65	−20	−22,2
2	75	17	14,9
3	85	42	52,0
4	95	94	89,1
5	105	127	126,2

$$\sum P_i = 425,$$

$$\sum P_i^2 = 37\,125,$$

$$\sum T_i = 260,$$

$$\sum P_i T_i = 25\,810,$$

$$\Delta = 5\,000,$$

$$\Delta = N\left(\sum P_i^2\right) - \left(\sum P_i\right)^2.$$

$$A = \frac{\left(\sum P_i^2\right)\left(\sum T_i\right) - \left(\sum P_i\right)\left(\sum P_i T_i\right)}{\Delta} = -263{,}35$$

$$B = \frac{N\left(\sum P_i T_i\right) - \left(\sum P_i\right)\left(\sum T_i\right)}{\Delta} = 3{,}71.$$

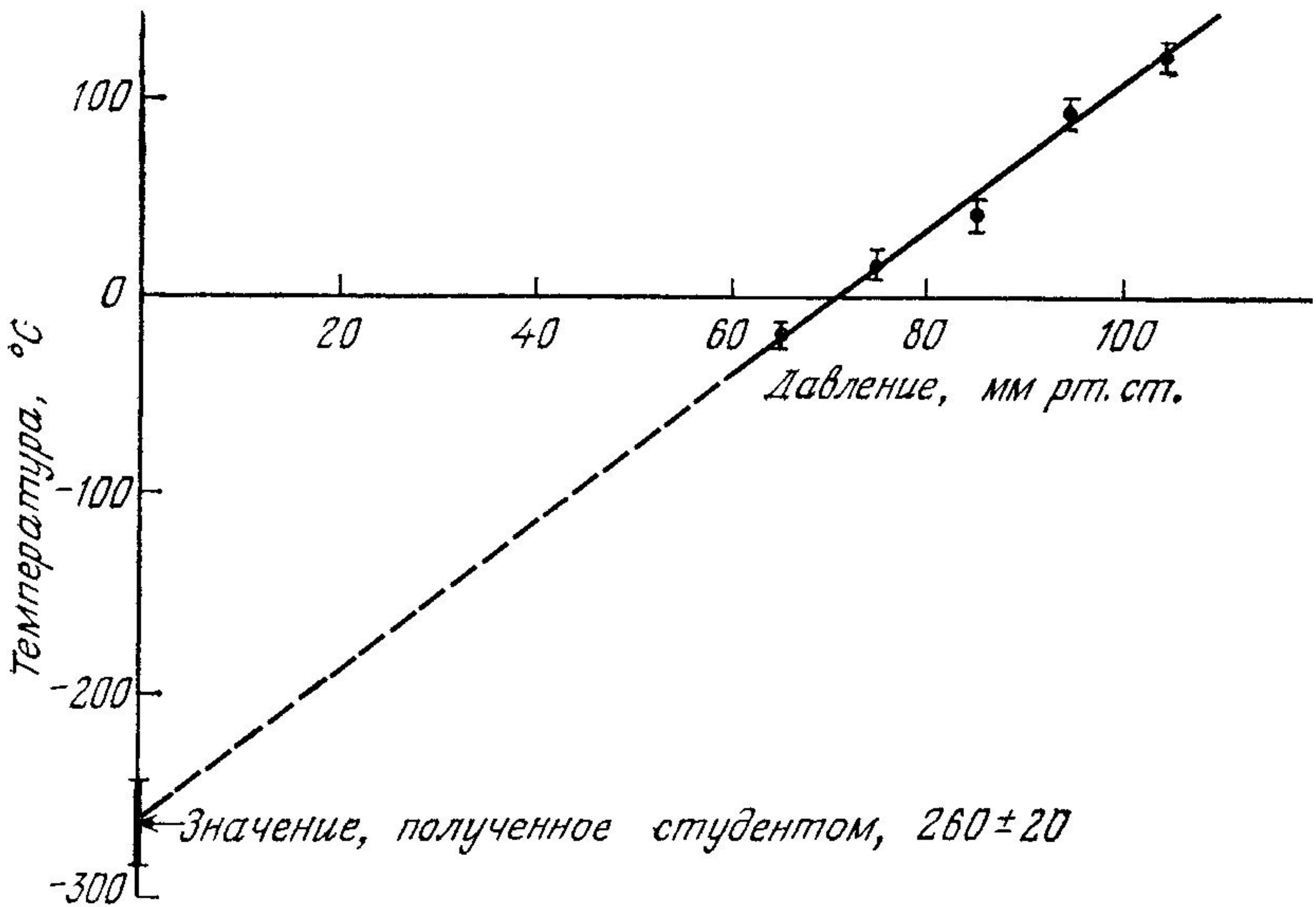
$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N-2} \sum (T_i - A - BP_i)^2 = 44{,}6,$$

$$\sigma_T = 6{,}7.$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_T^2 \left(\sum P_i^2\right)/\Delta = 331,$$

$$\sigma_A = 18.$$

$$A = -260 \pm 20^\circ$$



Температура, °C
100
0
-100
-200
-300
20
40
60
80
100
Давление, мм рт. ст.
Значение, полученное студентом, 260±20

Ш	N	T, К	R, Ом	R*352, Ом	R(T)	$x_i y_i$	x_i^2
352	1	273	0,099	34,85	34,96	9513,50	74529
	2	300	0,116	40,83	40,26	12249,60	90000
	3	310	0,118	41,54	42,22	12876,16	96100
	4	340	0,139	48,93	48,10	16635,52	115600
	5	360	0,145	51,04	52,02	18374,40	129600
	6	380	0,16	56,32	55,95	21401,60	144400

$\sum_{p=1}^{n} x_i$	1963	a=	0,196154	
$\sum_{p=1}^{n} y_i$	273,50	b=	-18,5909	
$\sum_{p=1}^{n} x_i y_i$	91050,78	t=	176	C
		T=	449	K
$\sum_{p=1}^{n} x_i^2$	650229			
		R=	69,48204	Ом

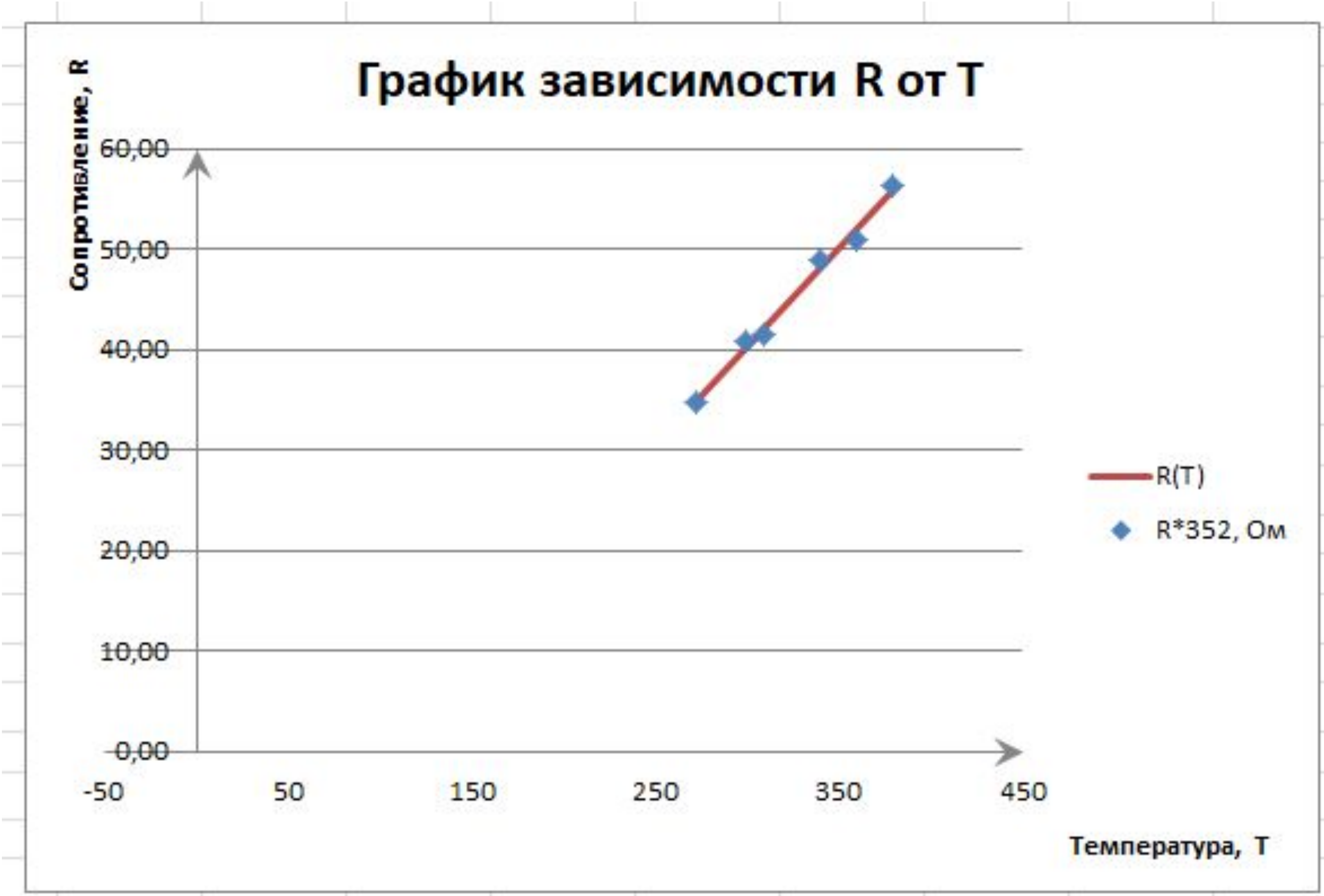


График зависимости R от T
Сопротивление, R
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
-50
50
150
250
350
450
Температура, T
R(T)
R*352, Ом

Апроксимация полиномом

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i, \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
2	1	0,5	0,705	0,25	0,125	0,0625	0,3525	0,17625
3	2	0,6	0,495	0,36	0,216	0,1296	0,297	0,1782
4	3	0,7	0,426	0,49	0,343	0,2401	0,2982	0,20874
5	4	0,8	0,357	0,64	0,512	0,4096	0,2856	0,22848
6	5	0,9	0,368	0,81	0,729	0,6561	0,3312	0,29808
7	6	1	0,406	1	1	1	0,406	0,406
8	7	1,1	0,549	1,21	1,331	1,4641	0,6039	0,66429
9		5,60000	3,30600	4,76000	4,25600	3,96200	2,57440	2,16004
10								

13	0,016464		3,96200	4,25600	4,76000		2,16004	
14			4,25600	4,76000	5,60000		2,57440	
15			4,76000	5,60000	7,00000		3,30600	
16								
17			119,0476	-190,476	71,42857		2,928571	**a**
18			-190,476	308,3333	-117,143		-4,93714	**b**
19			71,42857	-117,143	45,28571		2,430571	**c**

J
y(x)
0,694143
0,522571
0,409571
0,355143
0,359286
0,422
0,543286
66,62257