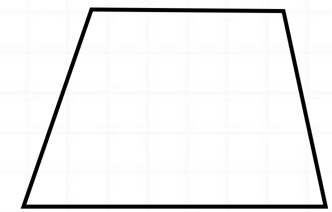
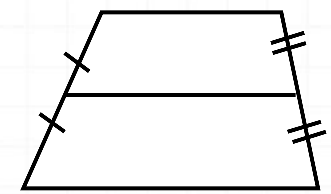
Альтернативные методы решения планиметрических задач. Трапеция.

Определение и виды трапеции

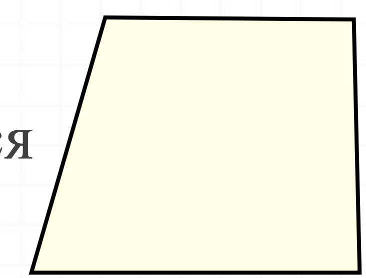
- *Трапецией* называется четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны.



- Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями,* а непараллельные стороны — *боковыми сторонами.*



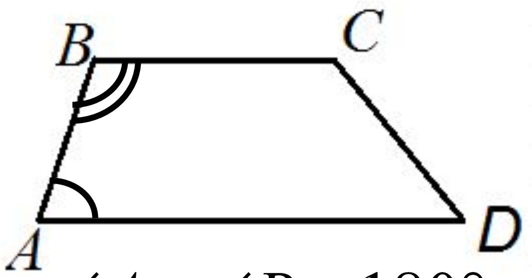
- Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией.*
- Трапеция называется *равнобедренной* (или *равнобокой*), если ее боковые стороны равны.



- Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной.*

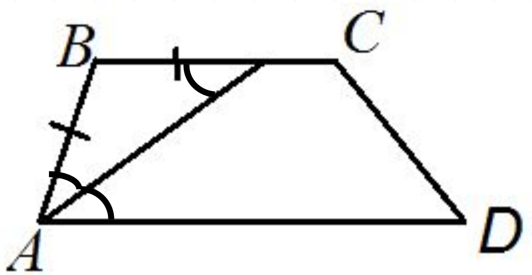
Свойства трапеции

1. Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180^0.

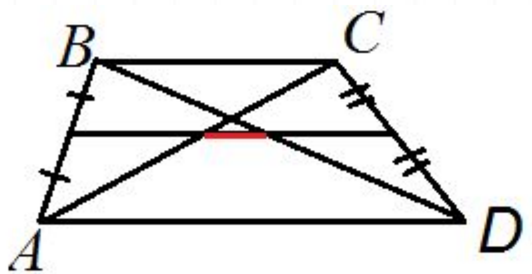


$$\angle A + \angle B = 180°$$

2. Биссектриса угла трапеции, пересекающая второе основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник.

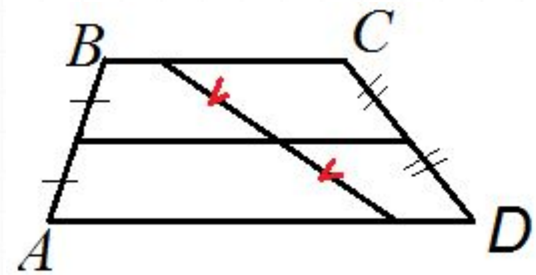


3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен половине разности оснований и лежит на средней линии.

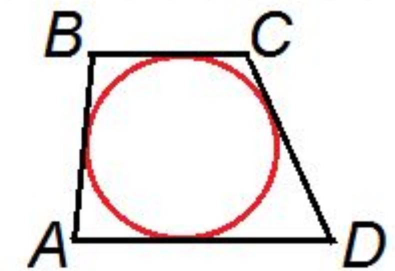


Свойства трапеции

4. Средняя линия трапеции делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, пополам.

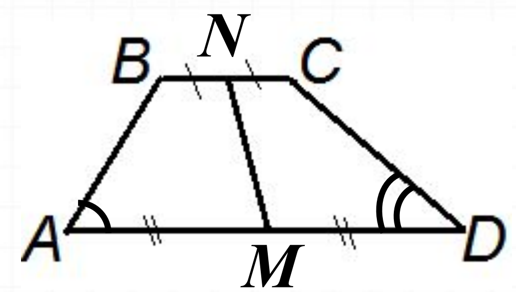


5. В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований трапеции равна сумме её боковых сторон.



$$AB + CD = BC + AD$$

6. Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

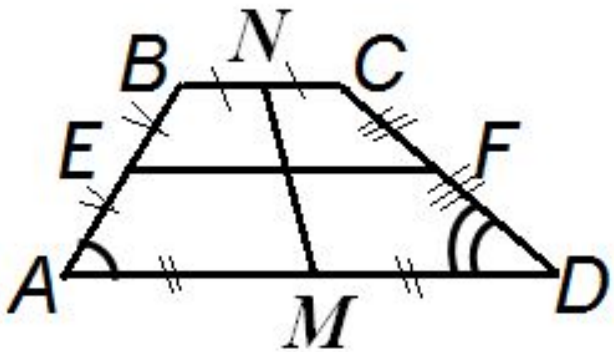


$$\angle A + \angle D = 90^\circ$$

$$MN = \frac{AD - BC}{2}$$

Задача 1

Углы при одном основании трапеции равны 37^0 и 53^0, отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 21 и 12. Найдите основания трапеции.



<u>Дано</u>: $ABCD$- трапеция, $BC \parallel AD$,
$\angle A = 37°, \angle D = 53°$
$BN = NC, AM = MD, EF = 21, NM = 12$
<u>Найти</u>: BC и AD

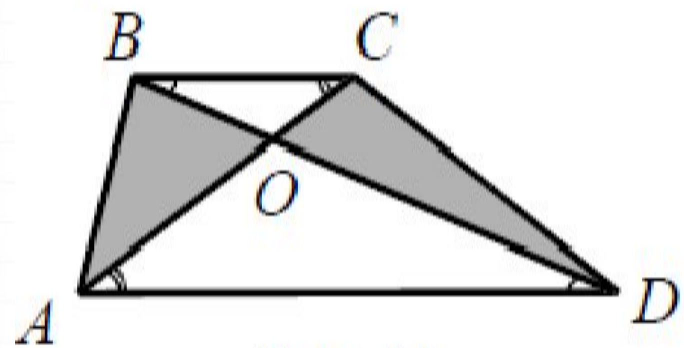
<u>Решение:</u>

1. $\angle A + \angle D = 90°$ $\Rightarrow$ $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{2}(AD + BC) = 21, \\ \frac{1}{2}(AD - BC) = 12 \end{cases}$

Ответ: $AD = 33$, $BC = 9$

Свойства трапеции

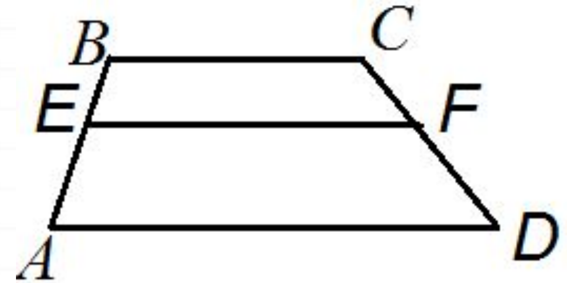
7. Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника, причём треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг к другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновеликие, т.е. имеют равные площади.



$\Delta BOC \sim \Delta AOD$,

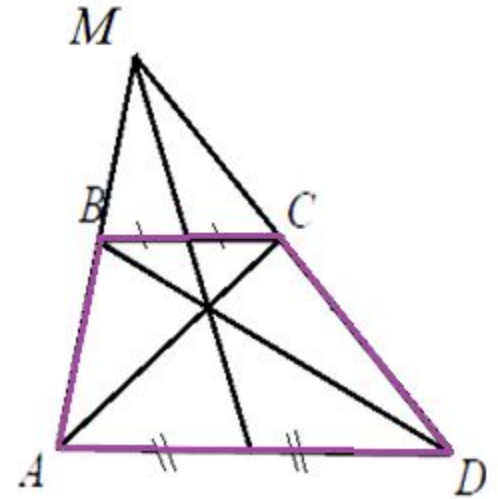
$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.

8. Отрезок разбивающий трапецию на две подобные трапеции, имеет длину равную среднему геометрическому длин оснований.



$$EF = \sqrt{BC \cdot AD}$$

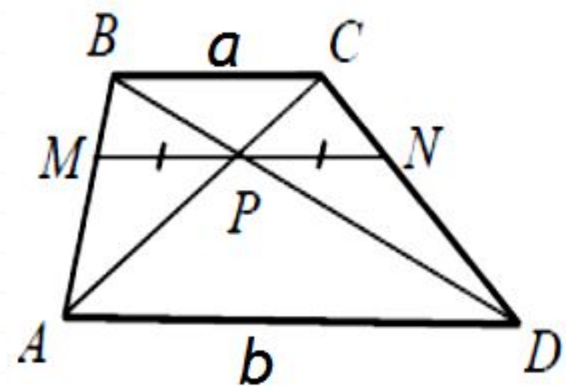
Свойства трапеции



9. В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон.

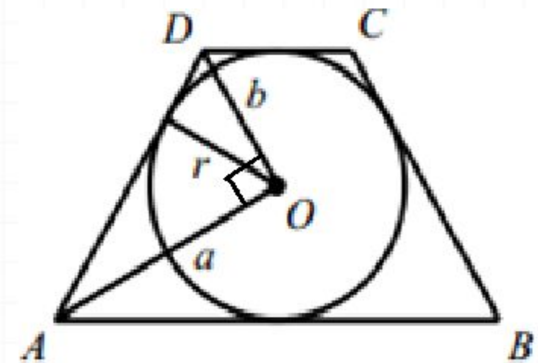
10. Отрезок, параллельный основаниям трапеции, походящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам.

 Его длина есть среднее гармоническое оснований трапеции: $$MN = \frac{2ab}{a+b}$$



Свойства трапеции

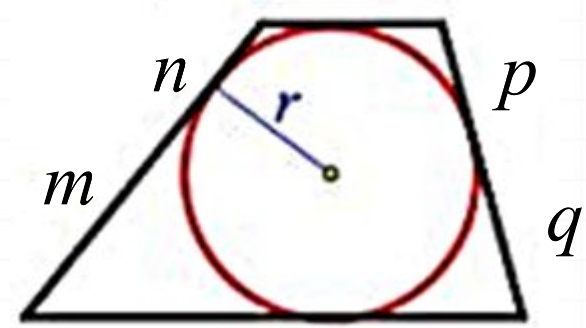
11. Если в трапецию вписана окружность, то отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны трапеции, перпендикулярны.



$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

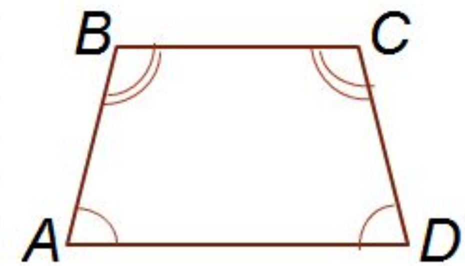
12. Если в трапецию вписана окружность и m, n, p, q- длины отрезков боковых сторон от точек касания до вершин, то для вычисления радиуса вписанной в неё окружности можно использовать формулы:

$$r = \sqrt{mn} = \sqrt{pq}.$$

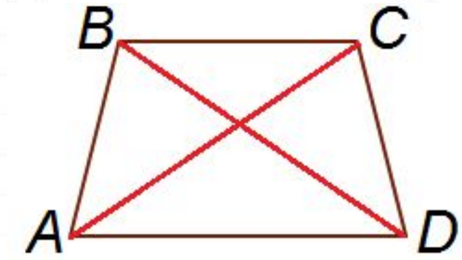


Свойства равнобедренной трапеции

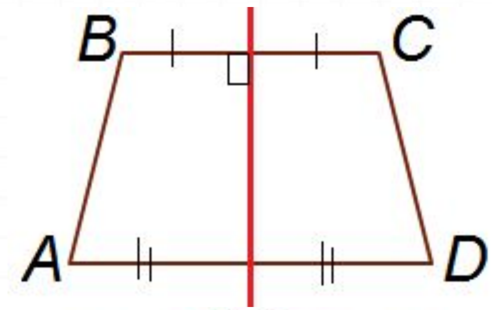
1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.



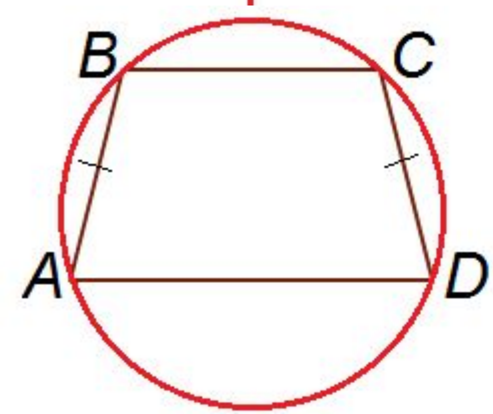
2. В равнобедренной трапеции длины диагоналей равны.



3. В равнобедренной трапеции, прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.

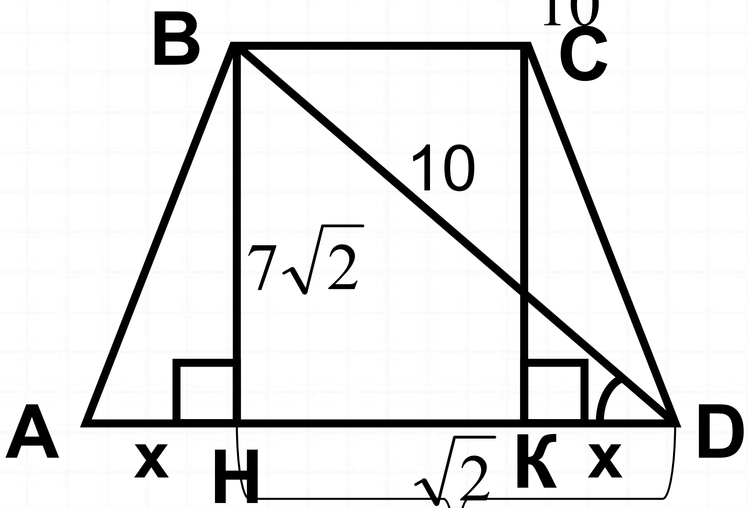


4. Если трапецию можно вписать в окружность, то она равнобедренная.



Задача 2

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.



Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$

$\cos BDH = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $BD = 10$

Найти: S

План решения: $S = mh$

1) $HD = \sqrt{2}$;
2) $BH = 7\sqrt{2}$;
3) $AH = KD = x$, $\quad m = \dfrac{BC + AD}{2}$,

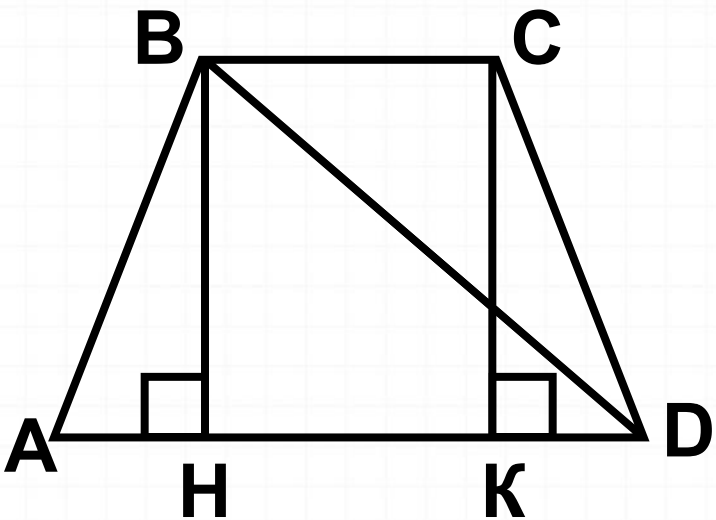
$$m = \frac{AD - 2x + AD}{2} = \frac{2AD - 2x}{2} = AD - x = HD = \sqrt{2}$$

4) S = $\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Свойство 5

В равнобедренной трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.



<u>*Дано*</u>: $ABCD$- трапеция, $BC \parallel AD$, $AB = CD, BH \perp AD$, BD- диагональ

<u>*Доказать*</u>: $$HD = \frac{AD + BC}{2}$$

<u>*Доказательство*</u>:

1) Опустим высоту CK.

2) $$AH = \frac{AD - HK}{2};$$

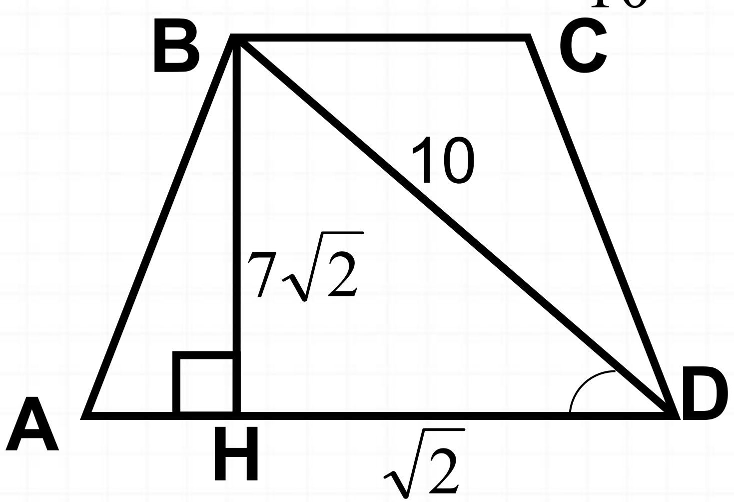
3) $$HD = AD - AH,$$

$$HD = AD - \frac{AD - BC}{2},$$

$$\boxed{HD = \frac{AD + BC}{2}.}$$

Другое решение задачи 2

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.



<u>Дано</u>: *ABCD* - трапеция,
AD || *BC*
$\cos BDH = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $BD = 10$

<u>*Найти:*</u> *S*

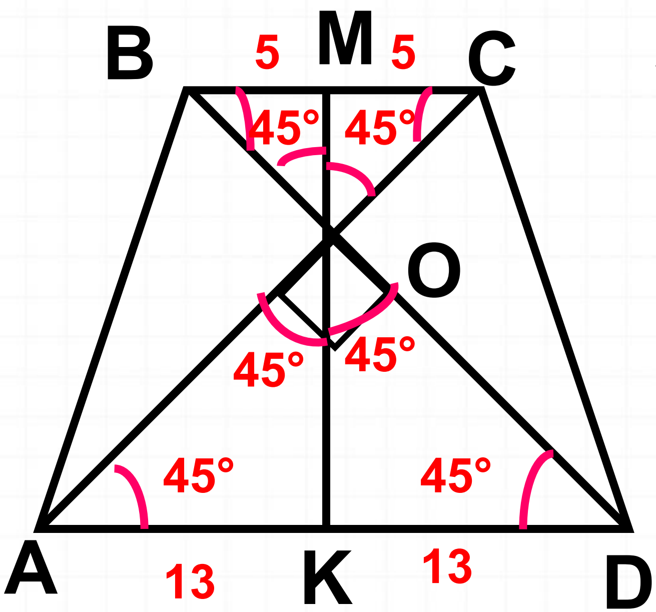
<u>*План решения*</u>: $S = mh$

1) $HD = \sqrt{2}$;
2) $BH = 7\sqrt{2}$;
3) $S = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Задача 3

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



Дано: *ABCD*- трапеция, *AD* || *BC*, *AB* = *CD*, *AD* = 26, *BC* = 10, $AC \perp BD$

Найти: S

План решения: *S* = *mh*

1) $m = \dfrac{AD + BC}{2}$

2) Проведём высоту *МК*;

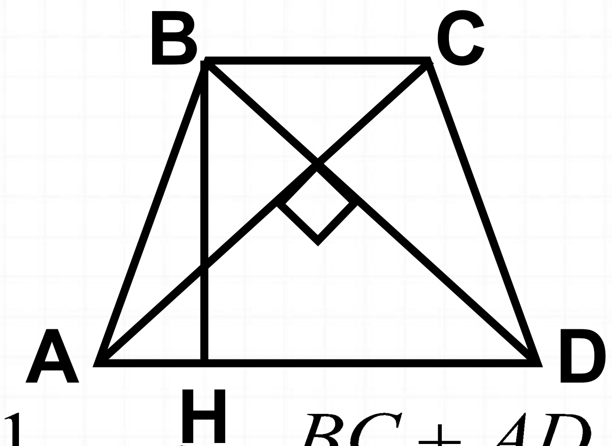
3) AK =OK = 13, BM = MO = 5, MK = 18

4) $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MK,$ $S = \dfrac{10 + 26}{2} \cdot 18 = 18 \cdot 18 = 324$

Ответ: S = 324.

Свойство 6

Если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то её высота равна средней линии.



Дано: ABCD- трапеция, BC || AD, AB = CD, AC $\perp$ BD, BH – высота

Доказать: $BH = \dfrac{BC + AD}{2}$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2}BD^2, S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH,$$

$$\frac{1}{2}BD^2 = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \quad HD = \frac{BC + AD}{2},$$

$$\frac{1}{2}\left(BH^2 + HD^2\right) = HD \cdot BH, BH^2 + HD^2 - 2HD \cdot BH = 0,$$

$$\left(BH - HD\right)^2 = 0, \quad BH = HD, \quad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ:
«ТРАПЕЦИЯ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ».

- ***Свойство .*** *В равнобедренной трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.*

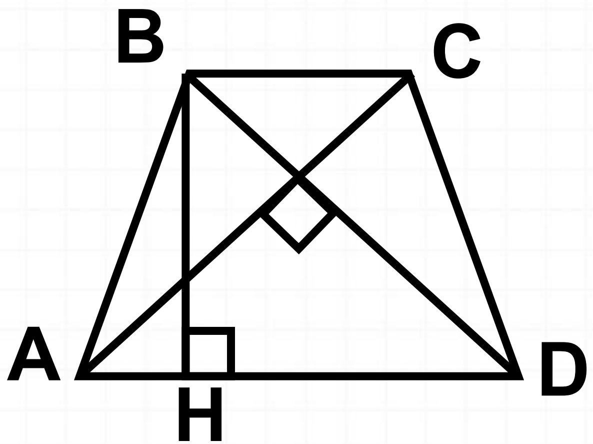
1. В равнобедренной трапеции диагональ, равная 4 см, составляет с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции. (Ответ: 2 см)
2. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагоналями трапеции и её основанием равен 2. Найдите высоту трапеции. (Ответ: 4)
3. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{11}$, а основания равны 4 и 5. Найдите её диагональ. (Ответ: 14)
4. В равнобокой трапеции основания 6 и 10. Диагональ равна 10. Найти площадь трапеции. (Ответ: 48)
5. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 4. Площадь трапеции равна 8. Найти тангенс угла между диагональю и основанием трапеции. (Ответ: 0,5)
6. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ равна $2\sqrt{13}$, а средняя линия равна 4. (Ответ: 24)
7. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её средняя линия равна 6, а тангенс угла между диагональю и основанием равен 1,5. (Ответ: 54)
8. Найти диагональ равнобедренной трапеции, если её площадь равна $8\sqrt{2}$, а средняя линия равна 2. (Ответ: 6)
9. Найти площадь равнобедренной трапеции, если её высота равна 4, а тангенс угла между диагональю и основанием равен $\frac{1}{6}$. (Ответ: 96)
10. Найти площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 13, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{2}{\sqrt{13}}$. (Ответ: 78)
11. Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, боковая сторона 9, а диагональ 11. Найти меньшее основание. (Ответ: 5)
12. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 10, боковая сторона 18, а диагональ 22. Найти большее основание трапеции. (Ответ: 16)
13. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции, если диагональ составляет угол 30° с основанием, а высота равна 2. (Ответ: $2\sqrt{3}$)
14. В равнобедренной трапеции диагональ равна 13 см, а средняя линия – 12 см. Найдите высоту трапеции. (Ответ: 5)

- ***Свойство .*** *Если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то её высота равна средней линии.*

Свойство 7

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату её высоты, т.е.

. $S = h^2$



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $AB = CD$, BH – высота трапеции

$AC \perp BD$

Доказать: $S = BH^2$

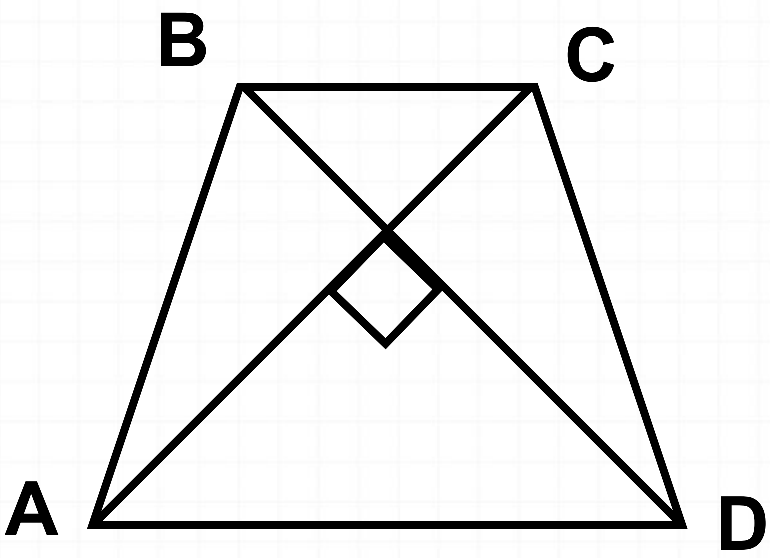
Доказательство:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \qquad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

$$\boxed{S = BH^2}$$

Другое решение задачи 3

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



Дано: *ABCD*- равнобедренная трапеция, $AD \parallel BC$, $AD = 26$, $BC = 10$, $AC \perp BD$

Найти: S

Решение: $S = h^2$,

$h = m$, $S = m^2$,

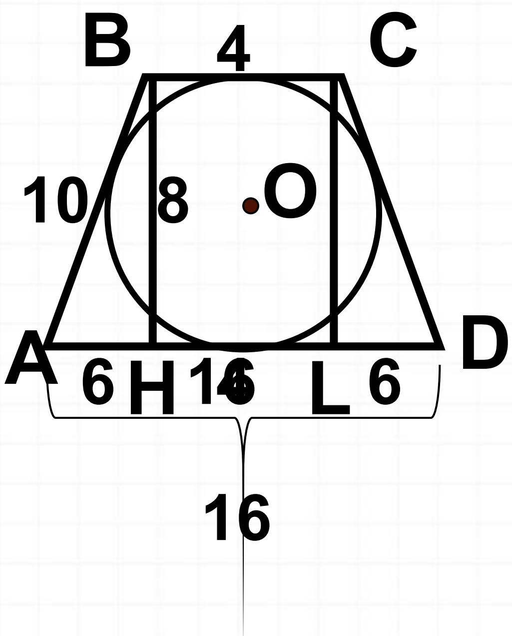
$$m = \frac{BC + AD}{2}, m = \frac{10+26}{2} = 18$$

$S = 18^2 = 324.$

Ответ: 324

Задача 4

Найдите радиус окружности, если основания описанной около неё равнобедренной трапеции равны 4 см и 16 см. (ГИА)



Дано: окр.$(O;r)$ вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC, AB = CD$

$AD = 16$ см, $BC = 4$ см

Найти: r

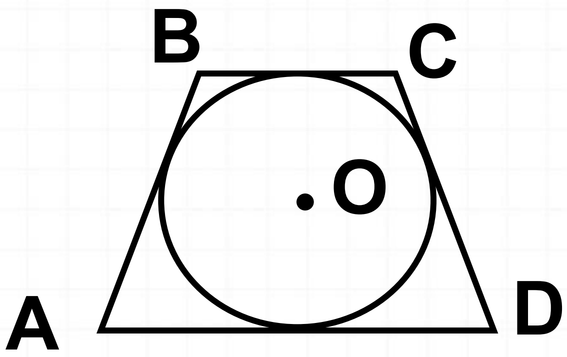
План решения: $r = \frac{1}{2}h$

1) AB = 10 ;
2) AH = 6 ;
3) BH = 8 ;
4) r = 4

Ответ: 4

Свойство 8

Если в равнобедренную трапецию вписана окружность, то её боковая сторона равна средней линии трапеции.



Дано: окр.$(O\ ;\ r)$ вписана в трапецию *ABCD, AD || BC*

Доказать: $AB = \dfrac{AD + BC}{2}$

Доказательство:

по свойству четырёхугольника, описанного около окружности:

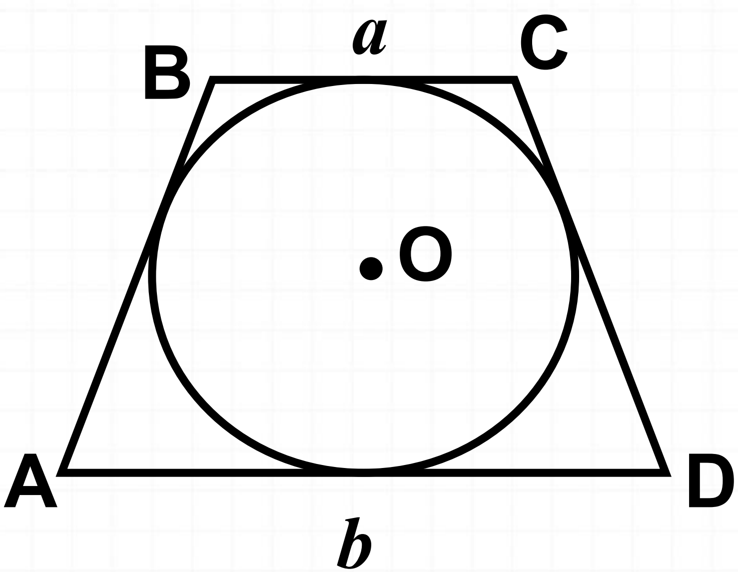
AB + CD = AD + BC, AB = CD,

2AB = AD + BC,

$$AB = \frac{AD + BC}{2}$$

Свойство 9

Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим её оснований:
. $$h^2 = a \cdot b$$



<u>*Дано*</u>: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$

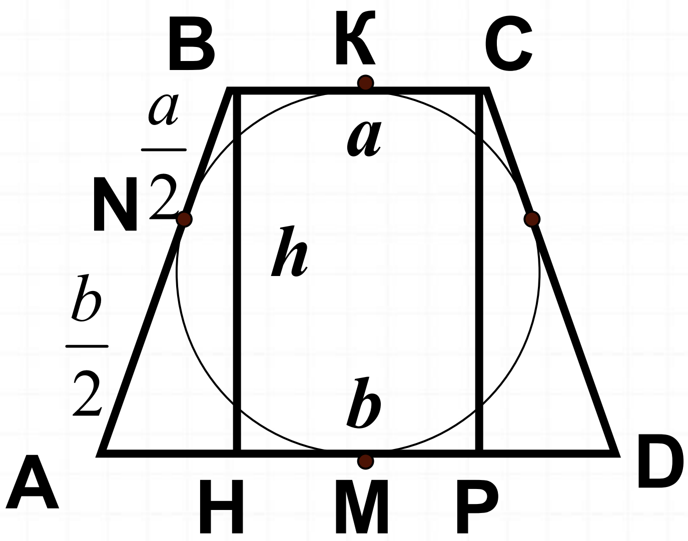
$AD \parallel BC$

$AB = CD$, $BC = \boldsymbol{a}$, $AD = b$,

h – высота трапеции

<u>*Доказать*</u>: $h^2 = a \cdot b$

Доказательство:



1) По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности:

$$AM = AN = \frac{b}{2},\ BN = BK = \frac{a}{2}$$

2) Проведём высоту BH и рассмотрим

$$\Delta ABH:\ \angle H = 90^\circ,\ BH = h$$

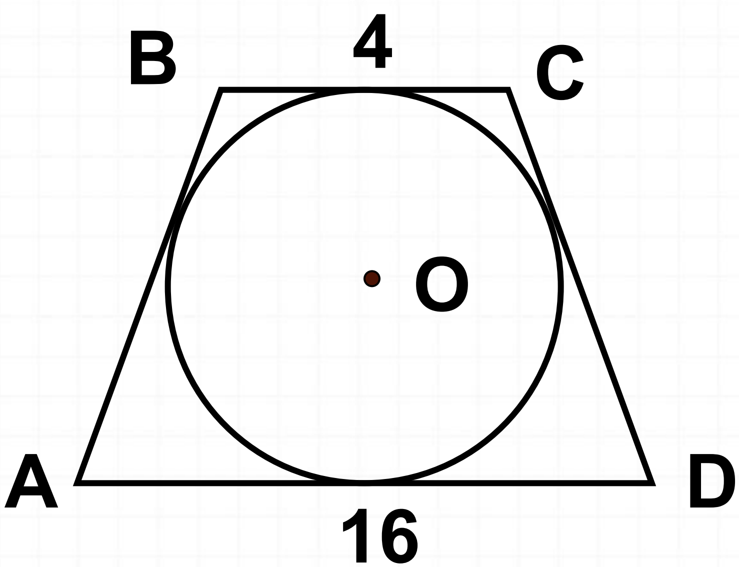
$$AH = \frac{b-a}{2},\ AB = \frac{a+b}{2},$$

По т. Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-b+a}{2}\right)\left(\frac{a+b+b-a}{2}\right)$$

$$h^2 = \frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2} = \frac{4ab}{4} \qquad \boxed{h^2 = ab}$$

Другое решение задачи 4



Дано: окр.(O;r) вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $AB = CD$

$AD = 16$ см, $BC = 4$ см

Найти: r

Решение: $r = \dfrac{1}{2}h,$

$$h^2 = a \cdot b$$

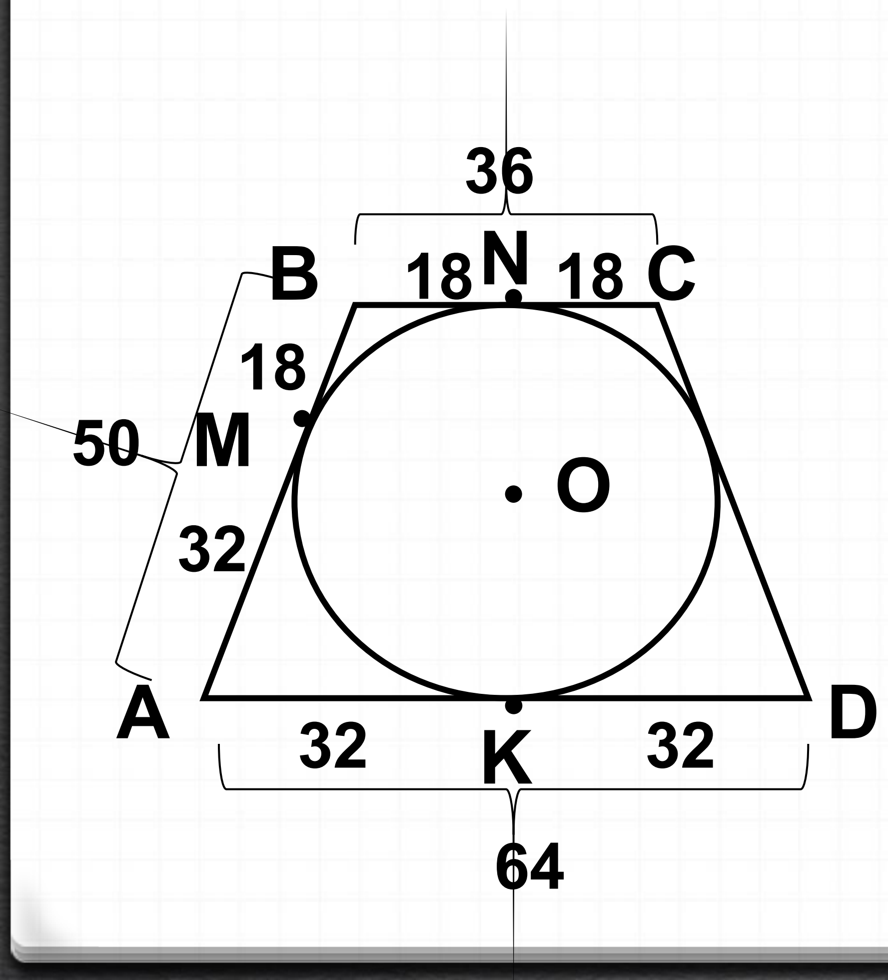
$$h = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (см)}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (см)}$$

Ответ: $r = 4$ см

Задача 5

Равнобедренная трапеция описана около круга. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 18 и 32. Найдите площадь трапеции. (ГИА)



Дано: окр.$(O\,;\,r)$ вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC, AB = CD, M \in AB$

$AM = 32, MB = 18$

Найти: S_{ABCD}

План решения:

$S=mh$

1) $AB=m$ =50;

2) BC =36 ;

3) AD =64;

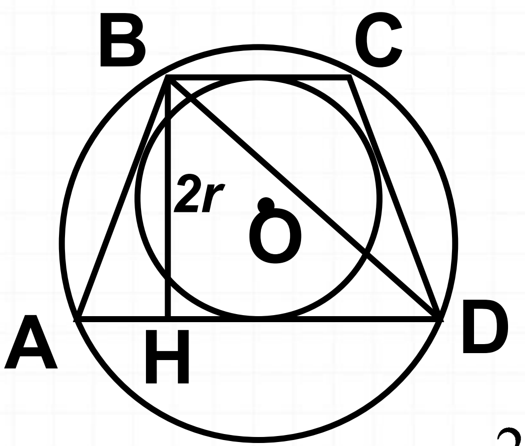
4) $h = \sqrt{a \cdot b}, h = \sqrt{36 \cdot 64} = 48;$

5) $S = 50 \cdot 36 = 1800$

Ответ:1800

Задача 6

Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найдите радиус круга, описанного около трапеции.



<u>*Дано*</u>: $ABCD$- трапеция, $AD \parallel BC$, описанная около окр.$(O; r)$ и вписанная в окр.$(O_1;R)$ $AB = CD, \angle B = \alpha$

<u>*Найти:*</u> R

<u>*Решение:*</u> по теореме синусов $\boxed{2R = \dfrac{BD}{\sin A}}$

$$1).\angle A = 180° - \alpha, \sin A = \frac{BH}{AB}, AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2r}{\sin\alpha},$$

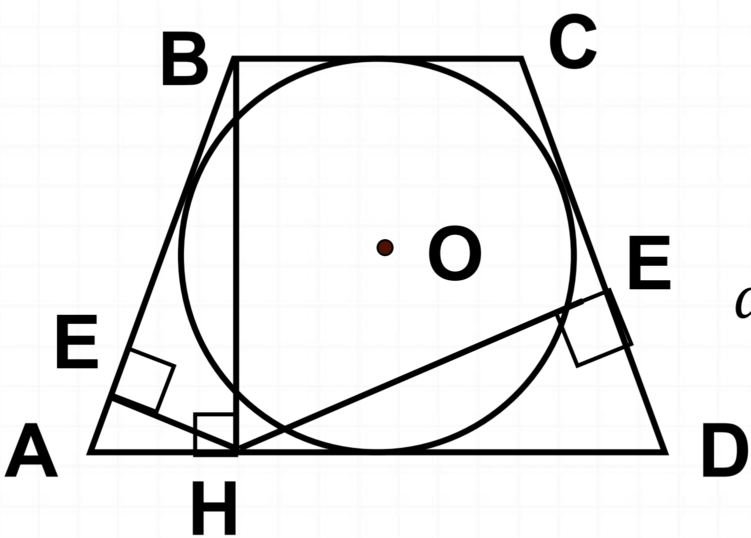
$$2).AB = HD, HD = \frac{2r}{\sin\alpha};$$

$$3).BD^2 = BH^2 + HD^2, \quad BD = \sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{2r}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{2r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$4).R = \frac{BD}{2\sin\alpha} \qquad R = \frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$$

Задача 7

В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3 : 5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка *H* – основание высоты. Из точки *H* опущен перпендикуляр *HE* на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка *E* делит боковую сторону? (ЕГЭ, С4)



Дано: окр.$(O\ ;\ r)$ вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $AB = CD$, $BC : AD = 3 : 5$

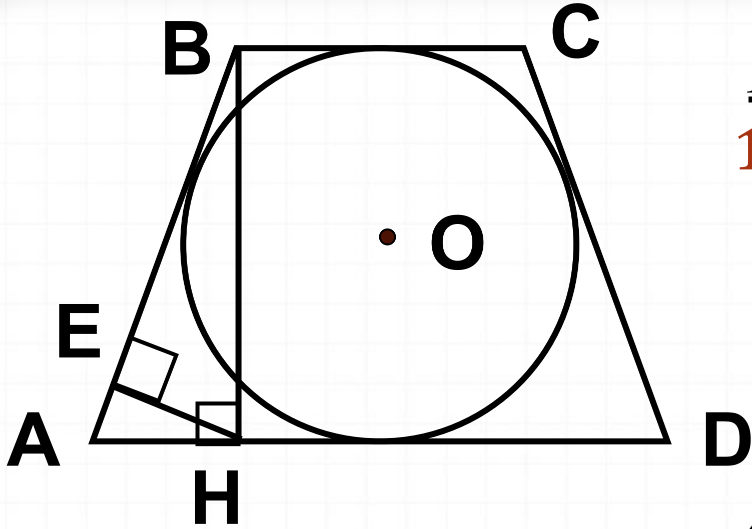
$BH \perp AD$,

а) $HE \perp AB$;

б) $HE \perp CD$

Найти: а) $AE : EB$

б) $DE : EC$



Решение: а)

1. Пусть k- коэффициент пропорциональности, тогда

$BC = 3k, AD = 5k.$

Т.к. $BH = \sqrt{BC \cdot AD}$,

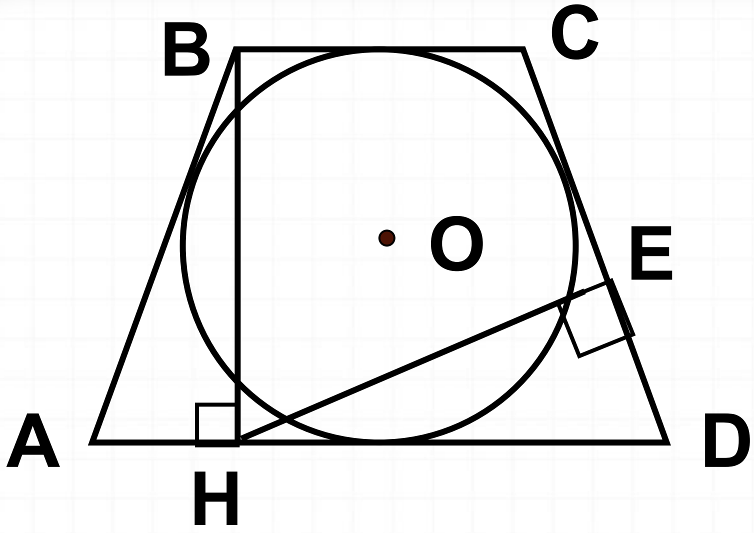
то $BH = k\sqrt{15}$

$$AH = \frac{AD - BC}{2} = k, \;\; HD = AB = \frac{AD + BC}{2} = 4k$$

2. $\Delta AEH \sim \Delta HEB$ (по двум углам)

$$\frac{AE}{HE} = \frac{HE}{EB} = \frac{AH}{BH} = \frac{k}{k\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AE}{HE} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}, \;\; HE = AE\sqrt{15}, \\ \dfrac{EH}{EB} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}, \;\; HE = \dfrac{EB}{\sqrt{15}} \end{array}\right] \Rightarrow AE\sqrt{15} = \frac{EB}{\sqrt{15}} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{1}{15}$$



Решение: б)

3. $\Delta ABE = \Delta DHE$ (по гипотенузе и острому углу)

$AB = HD = 4k$

$AH = DE = k$

$CE = CD - DE$

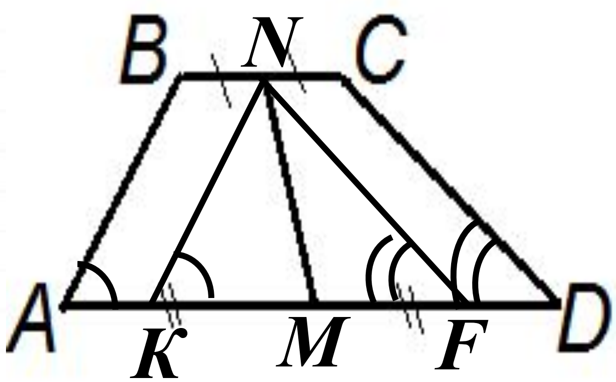
$CE = 3k$

$$\Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{1}{3}$$

Ответ: а) 1 : 15; б) 1 : 3.

Спасибо
за
внимание!

Свойство 6



Дано: $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, $BN = NC$, $AM = MD$, $\angle A + \angle D = 90°$

Док-ть: $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Док-во:

1)Построим $NK \parallel AB$ и $NF \parallel CD$, $ABNK$ *и* $NCDF$ - параллелограммы

2) $\angle A = \angle NKM$ (соответственные при $AB \parallel NK$ и секущей АК);
$\angle D = \angle NFM$ (соответственные при $CD \parallel NF$ и секущей АК) $\Rightarrow \angle NKM + \angle NFM = 90°$

3) В $\Delta\, KNF$: $\angle NKM + \angle NFM = 90° \Rightarrow \angle KNM = 90° \Rightarrow$

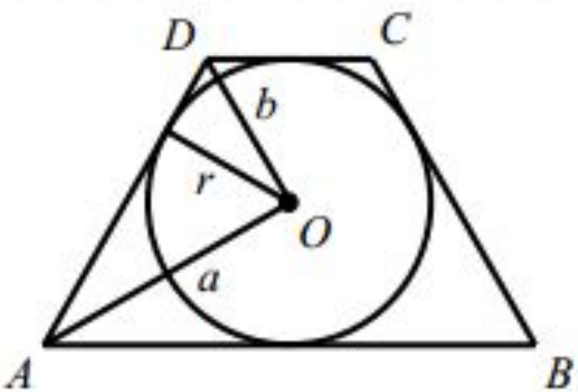
$\Rightarrow \Delta\, KNF$ –прямоугольный, MN - медиана $\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}KF$,

где $KF = AD - (AK + FD) = AD - BC \Rightarrow MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Свойство 10

Если в трапецию *ABCD* вписана окружность с центром *O*,

то $r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,где $OA = a$ и $OD = b$.



<u>*Дано*</u>: окр.(O ; r) вписана в трапецию *ABCD*

$AD \parallel BC$, $OA = a$,

$OD = b$

<u>*Док-ть*</u>: $r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

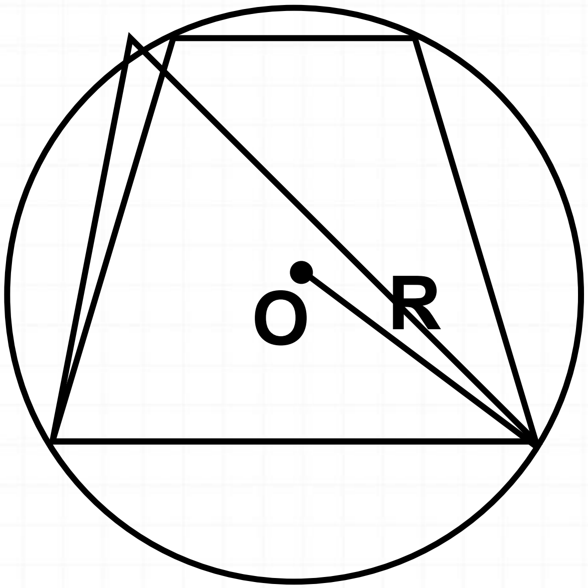
<u>*Док-во*</u>:

1)$AO \quad OD\perp$;

2) $S_{AOD} = \dfrac{1}{2}ab, S = \dfrac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2}$

$\dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Описанная окружность



Радиус окружности, описанной около трапеции, равен радиусу окружности, описанной около треугольника, вершины которого лежат в вершинах данной трапеции.