Математические методы
(Исследование операций, Методы оптимизации)
Задача о максимальном потоке

Актуальность

Задачу о максимальном потоке в сети можно проиллюстрировать следующим образом: есть водопроводная сеть, состоящая из труб разной пропускной способности (которая может измеряться, например, максимально возможным количеством пропущенной жидкости в единицу времени), соединенных узлами. В одном из узлов находится источник воды (или какой-либо другой жидкости), в другом – сток. Задача о максимальном потоке заключается в определении максимального количества жидкости, которое может быть выпущено из источника и, пройдя через сеть труб (естественно, не превышая пропускной способности этих труб), благополучно удалиться в стоке.

Постановка задачи

- Рассмотрим сеть трубопроводов **для транспортировки сырой нефти от буровых скважин до нефтеперегонных заводов.**
- Для перекачки нефти предусмотрены магистральные насосные станции. **Каждый сегмент трубопровода имеет свою пропускную способность.**
- Сегменты трубопровода могут быть как однонаправленные (осуществляют перекачку нефти только в одном направлении), так и в двунаправленные.

Постановка задачи

- <u>В однонаправленных</u> сегментах положительная пропускная способность предполагается в одном направлении и нулевая - в другом. Как определить **оптимальную пропускную способность (т.е. максимальный поток)** между нефтяными скважинами и нефтеперегонными заводами?
- Для ребра (i, j), где i < j, используем запись **(Cij,Cji)** для представления пропускных способностей **в направлениях i->j и j->i соответственно**. Во избежании недоразумений на схеме сети Cij будем располагать на ребре (i, j) ближе к узлу i, а Cji ближе к узлу j, как показано на рисунке:

Основные определения

Разрез определяет множество ребер, при удалении которых из сети полностью прекращается поток от источника к столу. **Пропускная способность разреза** равна сумме пропускных способностей "разрезанных" ребер. Среди всех разрезов сети **разрез с минимальной пропускной способностью определяет максимальный поток в сети.**

Пример

Рассмотрим сеть, показанную на рис. 3. На этом рисунке при обозначении пропускных способностей двунаправленных ребер придерживались соглашения, принятого ранее (рис. 2). **Например, для ребра (3, 4) пропускная способность в направлении 3 -> 4 равна 10, а в направлении 4 -> 3 равна 5.**

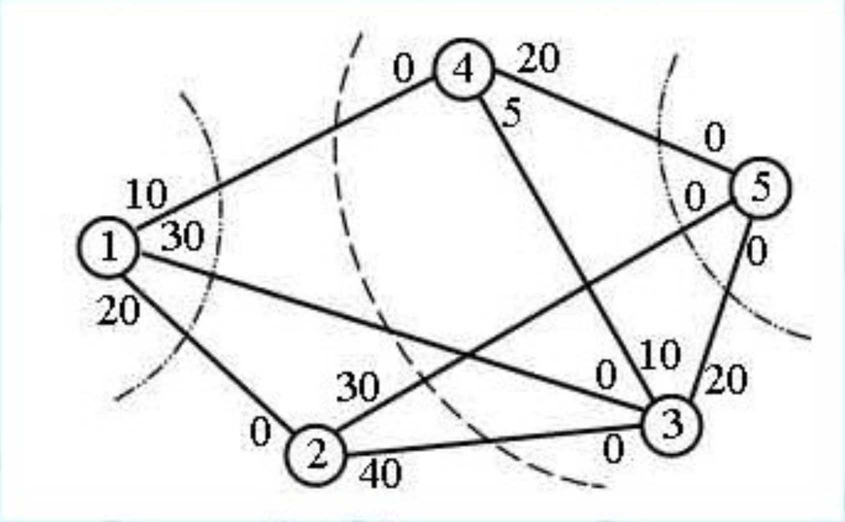


Рис.3. Пример сети

Разрезы, представленные на рис. 3, имеют следующие пропускные способности:

Разрез	"Разрезанные" ребра	Пропускная способность
1	(1, 2), (1, 3), (1, 4)	10 + 30 + 20 = 60
2	(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5)	30 + 10 + 40 + 30 = 110
3	(2, 5), (3, 5), (4, 5)	30 + 20 + 20 = 70

Переход к алгоритму

- Вывод, который можно сделать из этих трех разрезов, заключается в том, что **максимальный поток не может превышать 60 единиц (минимальное число).**
- Но мы не можем сказать, какой максимальный поток на самом деле, так как **не перебрали все возможные разрезы сети.**
- К сожалению, перебор всех разрезов является непростой задачей. Поэтому для определения максимального потока в сети не используются алгоритмы, основанные на полном переборе

Идея алгоритма нахождения максимального потока

- Идея данного алгоритма состоит **в нахождении сквозных путей с положительными потоками от источника к стоку.**
- Рассмотрим ребро (i, j) с (начальной) пропускной способностью (Cij,Cji). В процессе выполнения алгоритма части этих пропускных способностей **"забираются"** потоками, проходящими через данное ребро, в результате каждое ребро будет иметь остаточную пропускную способность. Будем использовать запись (cij, cji) для представления остаточных пропускных способностей. Сеть, где все ребра имеют остаточную пропускную способность, назовем остаточной.
- Для произвольного узла j, получающего поток от узла i, **определим метку [aj, i], где aj - величина потока, протекающего от узла j к узлу i.** Алгоритм нахождения максимального потока предполагает выполнение следующих действий.

Шаги 1-3

Шаг 1. Для всех ребер **(i, j)** положим остаточную пропускную способность равной первоначальной пропускной способности, т.е. приравняем **(c_{ij}, c_{ji}) = (C_{ij}, C_{ji})**. Назначим **a_1 = *бесконечности*** и пометим узел 1 меткой **[*бесконечность*, -]**. Полагаем **i = 1** и переходим ко второму шагу.

Шаг 2. Определяем множество **S_i** как множество узлов **j**, в которые можно перейти из узла **i** по ребру с положительной остаточной пропускной способностью (т.е. **c_{ij} > 0** для всех **j**, принадлежащих **S_i**). Если **S_i** не пустое множество, выполняем третий шаг, в противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 3. В множестве **S_i** находим узел **k**, такой, что **c_{ik} = max {c_{ij}}** для всех **j**, принадлежащих **S_i**. Положим **a_k = c_{ik}** и пометим узел **k** меткой **[a_k, i]**. Если последней меткой помечен узел стока (т.е. если **k = n**), сквозной путь найден, и мы переходим к пятому шагу.

Шаги 4-5

***Шаг 4* (Откат назад).** Если **i = 1**, сквозной путь невозможен, и мы переходим к шагу 6. Если **i** не равно 1, находим помеченный узел **r**, непосредственно предшествующий узлу **i**, и удаляем узел **i** из множества узлов, смежных с узлом **r**. Полагаем **i = r** и возвращаемся ко второму шагу.

***Шаг 5* (Определение остаточной сети).** Обозначим через $N_p = \{1, k_1, k_2, \ldots, n\}$ множество узлов, через которые проходит **p**-й найденный сквозной путь от узла источника (узел 1) до узла стока (узел **n**). Тогда максимальный поток, проходящий по этому пути, вычисляется как $f_p = \min\{a_1, a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_n\}$.

Остальные пропускные способности ребер, составляющих сквозной путь, уменьшается на величину f_p в направлении движения потока и увеличиваются на эту же величину в противоположном направлении. Таким образом, для ребра **(i, j)**, входящего в сквозной путь, текущие остаточные стоимости (c_{ij}, c_{ji}) изменятся следующим образом:

- $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$, если поток идет от узла **i** к узлу **j**.
- $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$, если поток идет от узла **j** к узлу **i**.

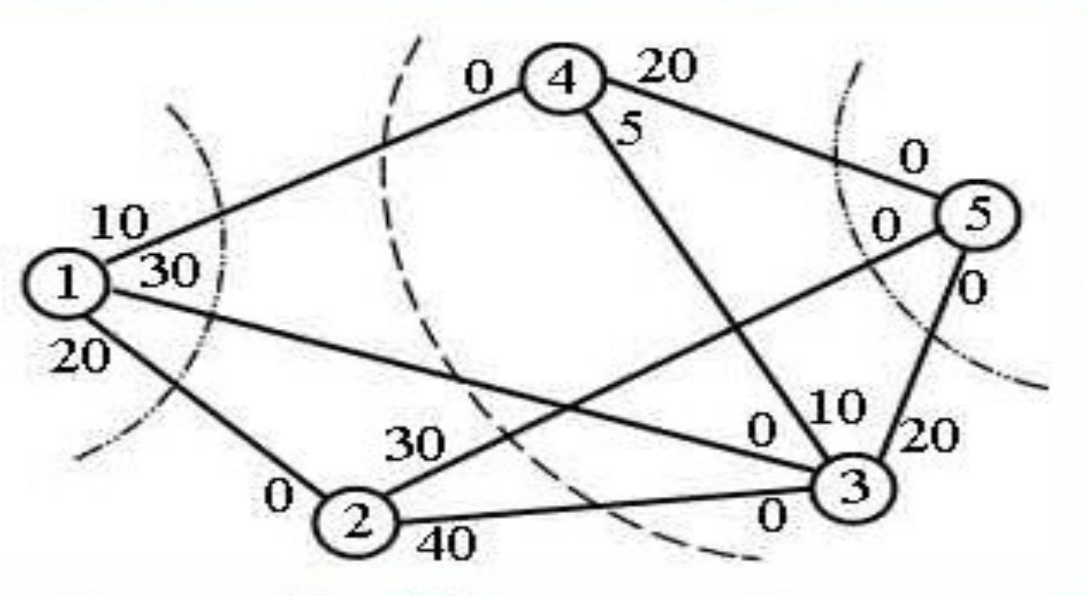
Шаг 5. Решение

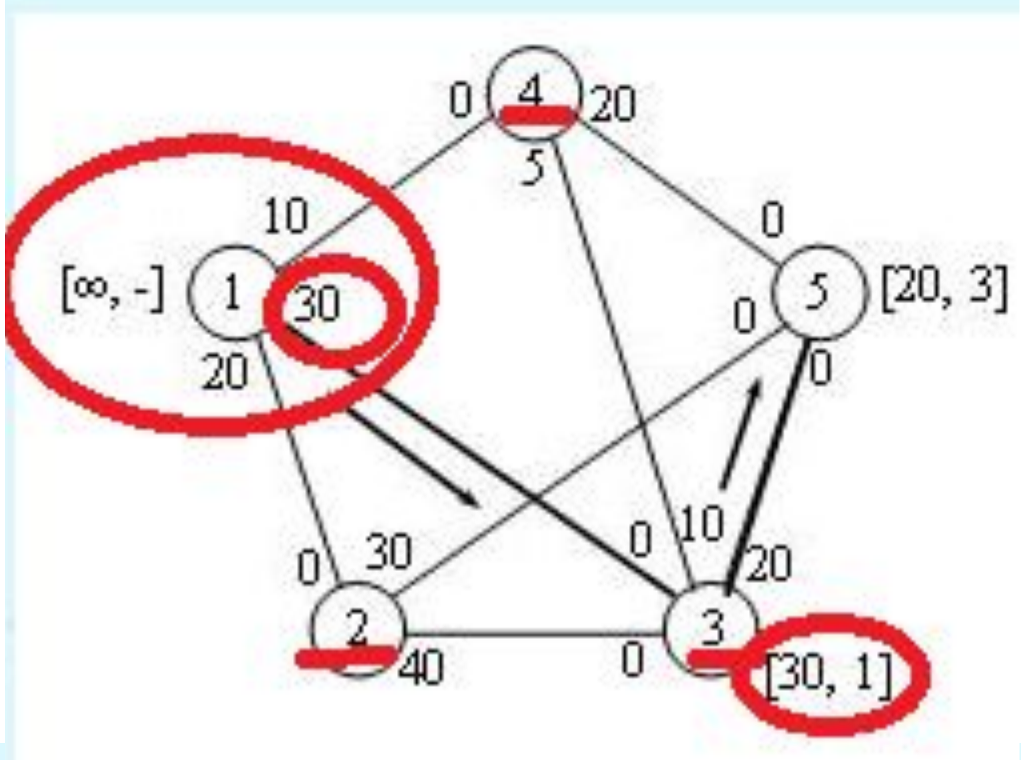
Далее восстанавливаем все узлы, удаленные на шаге 4. полагаем **i = 1** и возвращаемся ко второму шагу для поиска нового сквозного пути.

***Шаг 5* (Решение).**

- При **m** найденных сквозных путях максимальный поток вычисляется по формуле $\mathbf{F = f_1 + f_2 + ... + f_m}$.
- Имея значения начальных $(\mathbf{C_{ij}, C_{ji}})$ и конечных $(\mathbf{c_{ij}, c_{ji}})$ пропускных способностей ребра **(i, j)**, можно вычислить оптимальный поток через это ребро следующим образом. Положим $\mathbf{(a,b) = (C_{ij} - c_{ij}, C_{ji} - c_{ji})}$. Если $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, поток, проходящий через ребро **(i, j)**, равен **a**. Если же $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, тогда поток равен **b**. (Случай, когда одновременно $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, невозможен.)

Расчетный пример





Положим остаточные пропускные способности (c_{ij}, c_{ji}) всех ребер равными первоначальным пропускным способностям (C_{ij}, C_{ji}).

Шаг 1. Назначаем a_1 = ***бесконечности*** и помечаем узел 1 меткой [***бесконечность***,-]. Полагаем $i = 1$.

Шаг 2. $S_1 = [2, 3, 4]$ (множество не пустое).

Шаг 3. $k = 3$, поскольку $c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 30, 10\} = 30$. Назначаем $a_3 = c_{13} = 30$ и помечаем узел 3 меткой [30, 1]. Полагаем $i = 3$ и возвращаемся к шагу 2.

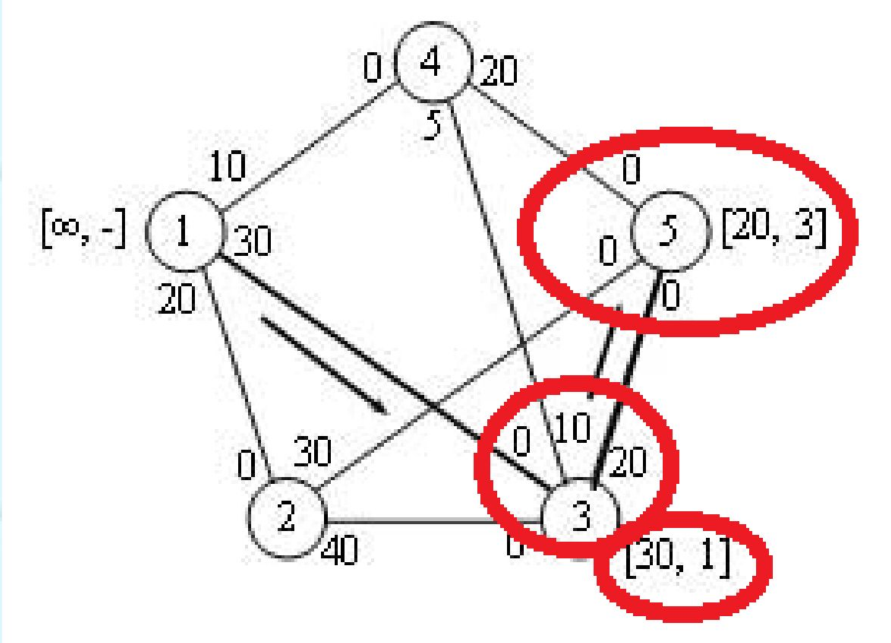
Расчетный пример

Шаг 2. $S_2 = [4, 5]$.

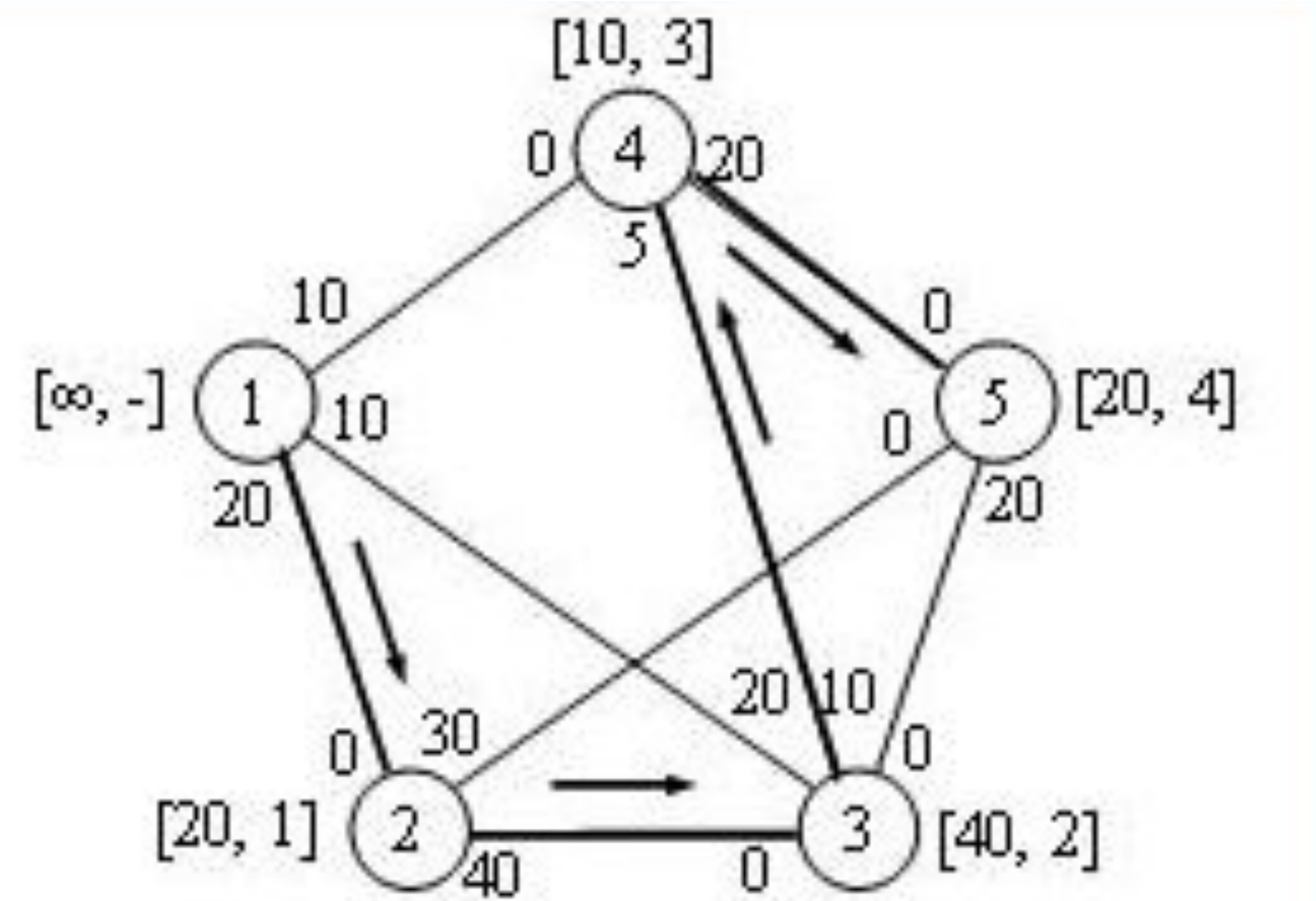
Шаг 3. $k = 5$ и $a_5 = c_{35} = \max\{10, 20\} = 20$. Помечаем узел 5 меткой [20,3]. Получен сквозной путь. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Сквозной путь определяем по меткам, начиная с узла 5 и заканчивая узлом 1: (5) -> [20, 3] -> (3) -> [30, 1] -> (1). Таким образом, $N_1 = \{1, 3, 5\}$ и $f_1 = \min\{a_1, a_3, a_5\} = \{\textit{бесконечность}, 30, 20\} = 20$. Вычисляем остаточные пропускные способности вдоль пути N_1:

$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20),$$
$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20).$$



Аналогично для пути 1-2-3-4-5



Аналогично для пути 1-2-3-4-5

Итерация 2.

Шаг 1. Назначаем $\mathbf{a_1}$ = ***бесконечности*** и помечаем узел 1 меткой [***бесконечность,-***]. Полагаем $\mathbf{i = 1}$.

Шаг 2. S_1 = **[2, 3, 4]**.

Шаг 3. $\mathbf{k = 2}$, назначаем $\mathbf{a_2 = c_{12} = \max \{20, 10, 10\} = 20}$ и помечаем узел 2 меткой **[20, 1]**. Полагаем $\mathbf{i = 2}$ и возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. S_3 = **[4]** (отметим, что $\mathbf{c_{35} = 0}$, поэтому узел 5 не включается в S_3).

Шаг 3. $\mathbf{k = 4}$, назначаем $\mathbf{a_4 = c_{34} = 10}$ и помечаем узел 4 меткой **[10, 3]**. Полагаем $\mathbf{i = 4}$ и возвращаемся к шагу 2.

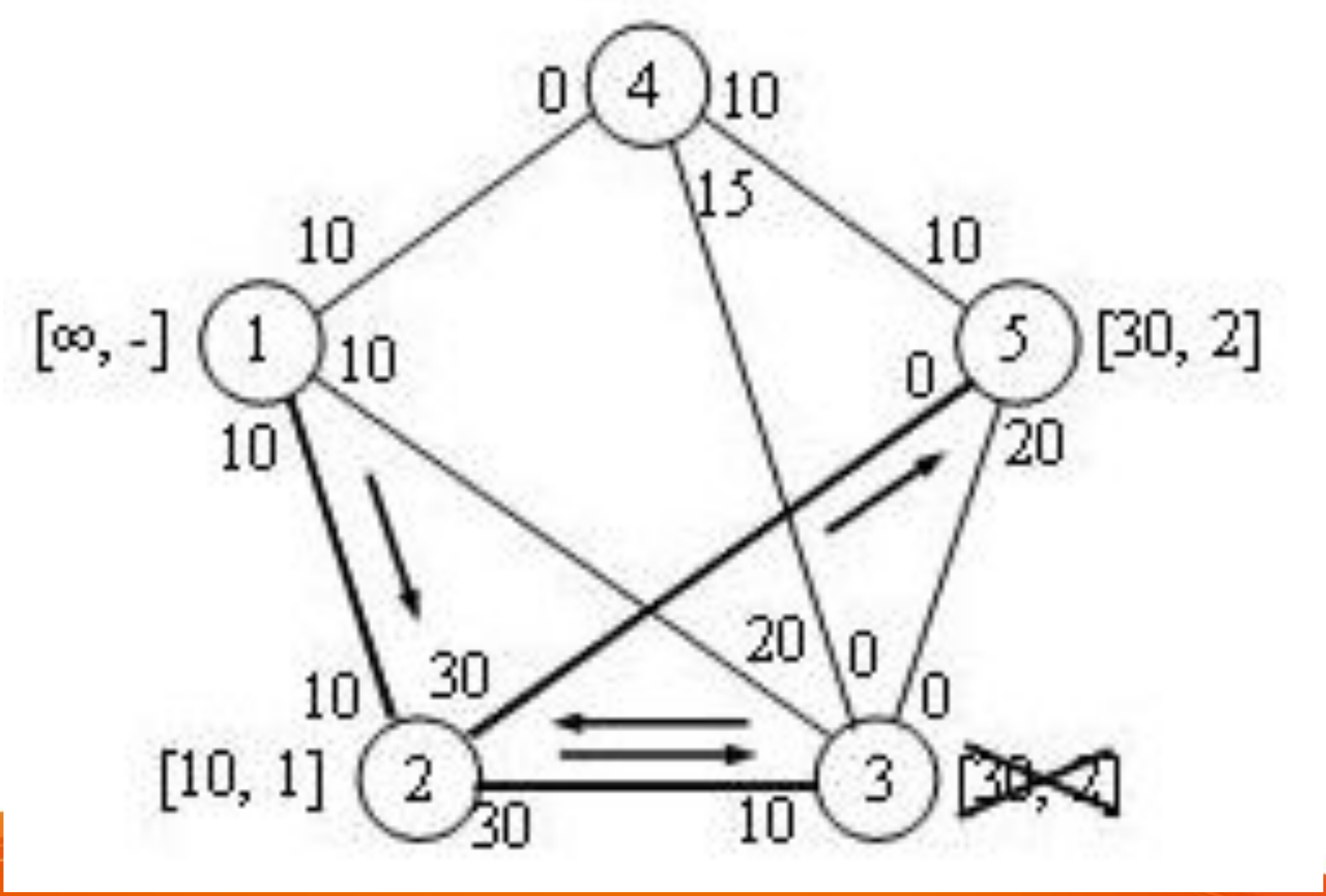
Шаг 2. S_4 = **[5]** (поскольку узлы 1 и 3 уже помечены, они не включаются в S_4).

Шаг 3. $\mathbf{k = 5}$ и $\mathbf{a_5 = c_{45} = 20}$. Помечаем узел 5 меткой **[20, 4]**. Получаем сквозной путь. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. $\mathbf{N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ и $\mathbf{f_2}$ = **min {*бесконечность*, 20, 40, 10, 20} = 10**. Вычисляем остаточные пропускные способности вдоль пути $\mathbf{N_2}$:

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10),$$
$$(c23, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10),$$
$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15),$$
$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10).$$

Аналогично для пути 1-2-3-2-5



Аналогично для пути 1-2(-3-2)-5

Итерация 3.

Шаг 1. Назначаем a_1 = ***бесконечности*** и помечаем узел 1 меткой [***бесконечность***,-]. Полагаем $i = 1$.

Шаг 2. $S_1 = [2, 3, 4]$.

Шаг 3. $k = 2$, назначаем $a_2 = c_{12} = \max\{10, 10, 10\} = 10$ и помечаем узел 2 меткой [10, 1]. Полагаем $i = 2$ и возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. $S_2 = [3, 5]$.

Шаг 3. $k = 3$ и $a_3 = c_{23} = 30$. Помечаем узел 3 меткой [30, 2]. Полагаем $i = 3$ и возвращаемся к шагу 2.

Шаг 2. S_3 пусто, поскольку $c_{34} = c_{35} = 0$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Метка [30, 2] узла 3 показывает номер предшествующего узла $r = 2$. На этой итерации узел 3 в дальнейшем во внимание не принимается, его метку вычеркиваем. Полагаем $i = r = 2$ и возвращаемся к шагу 2.

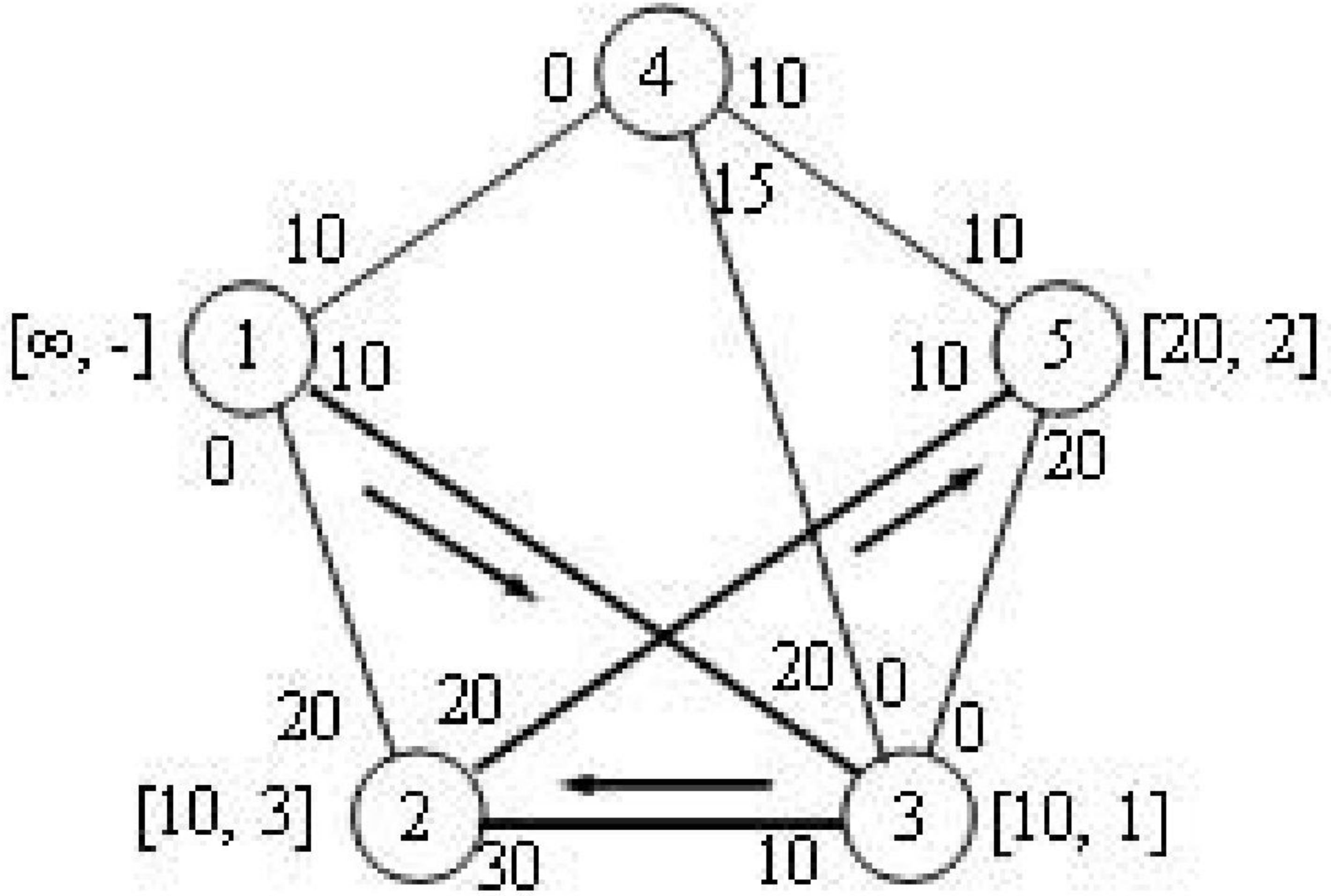
Шаг 2. $S_4 = [5]$ (поскольку узел 3 удален из возможного сквозного пути).

Шаг 3. $k = 5$ и $a_5 = c_{25} = 30$. помечаем узел меткой [30, 2]. Получаем сквозной путь. Переходим к шагу 5.

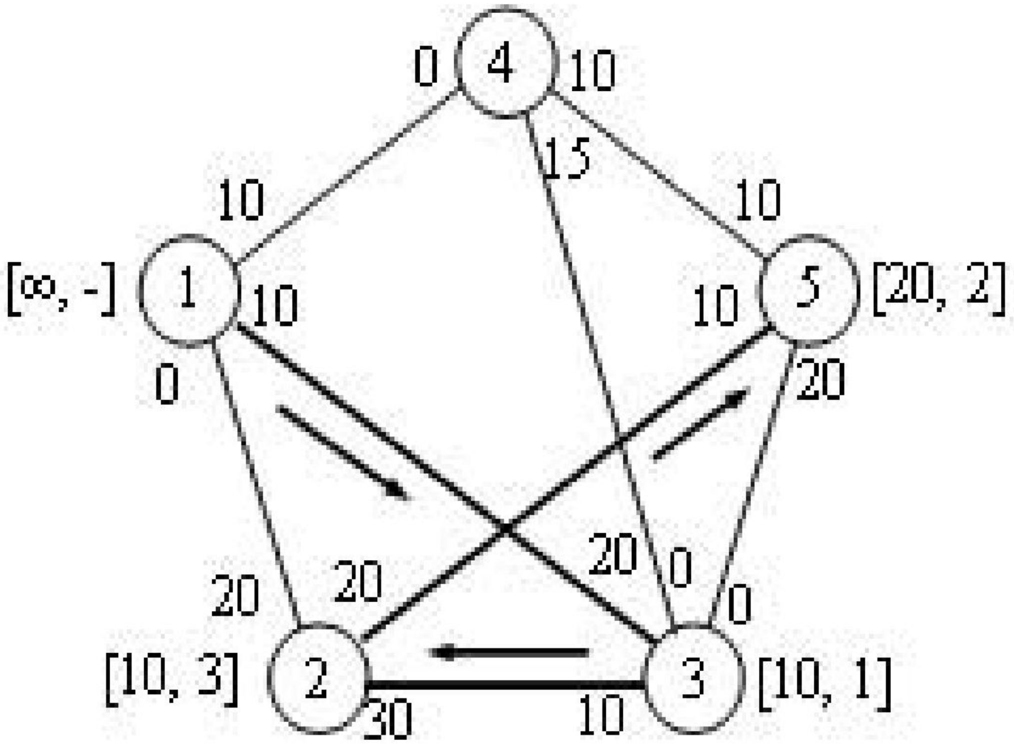
Шаг 5. $N_3 = \{1, 2, 5\}$ и $f_3 = \min\{$***бесконечность***$, 10, 30\} = 10$. Вычисляем остаточные пропускные способности вдоль пути N_3:

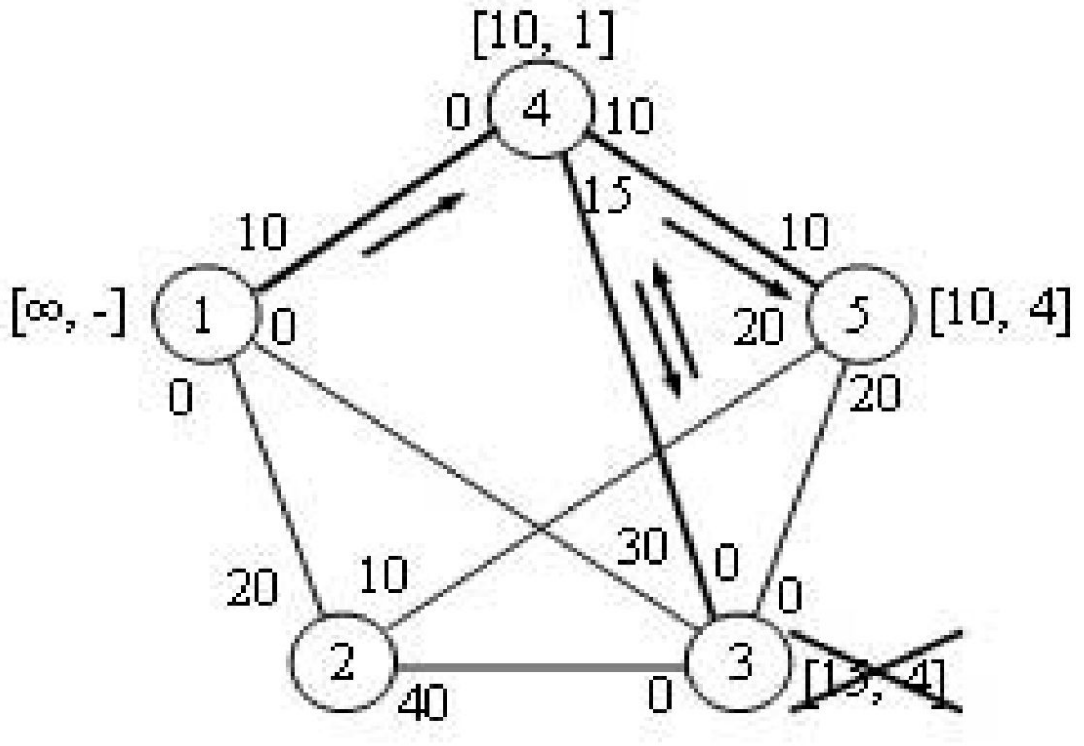
```
(c12, c21) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20),
(c2, c52) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10).
```

Аналогично для 1-3-2-5



Аналогично для 1-3-2-5 и 1-4(-3-4)-5





Итерация 4. На этой итерации получен путь $\mathbf{N_4 = \{1, 3, 2, 5\}}$ с $\mathbf{f_4 = 10}$.

Итерация 5. На этой итерации получен путь $\mathbf{N_5 = \{1, 4, 5\}}$ с $\mathbf{f_5 = 10}$.

Итерация 6. Новые сквозные пути невозможны, поскольку все ребра, исходящие из узла 1, имеют нулевые остаточные пропускные способности. Переходим к шагу 6 для определения решения.

Решение

Итерация 4. На этой итерации получен путь $\mathbf{N_4} = \{1, 3, 2, 5\}$ с $f_4 = \boxed{10}$.

Итерация 5. На этой итерации получен путь $\mathbf{N_5} = \{1, 4, 5\}$ с $f_5 = \boxed{10}$

Итерация 6. Новые сквозные пути невозможны, поскольку все ребра, исходящие из узла 1, имеют нулевые остаточные пропускные способности. Переходим к шагу 6 для определения решения.

Шаг 6. Максимальный объем потока в сети равен $\mathbf{F} = f_1 + f_2 + \ldots + f_5 = 20 + 10 + 10 + \boxed{10 + 10} = 60$ единиц. Значения потоков по различным ребрам вычисляются путем вычитания последних значений остаточных пропускных способностей (т.е. $(c_{ij}, c_{ji})_6$) из первоначальных значений пропускных способностей (C_{ij}, C_{ji}). Результаты вычислений приведены ниже:

Ребро	$(C_{ij}, C_{ji})-(c_{ij}, c_{ji})_6$	Величина потока	Направление
(1, 2)	(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)	20	1->2
(1, 3)	(30, 0) - (0, 30) = (30, -30)	30	1->3
(1, 4)	(10, 0) - (0, 10) = (10, -10)	10	1->4
(2, 3)	(40, 0) - (40, 0) = (0, 0)	0	-
(2, 5)	(30, 0) - (10, 20) = (20, -20)	20	2->5
(3, 4)	(10, 5) - (0, 15) = (10, -10)	10	3->4
(3, 5)	(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)	20	3->5
(4, 5)	(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)	20	4->5

Итог