

Тема №1

Закон Кулона

Напряженность электрического поля

Задача 1

Задача 3

Задача 2

Задача 4

Задача 5

Задача 6

Задача 7

Задача 8

Теоретическое введение

Закон Кулона

Напряженность электрического поля

По закону Кулона сила, действующая между двумя заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, определяется формулой:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

где q_1 и q_2 – электрические заряды тел,
 r – расстояние между ними,
 ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды,
 ϵ_0 – электрическая постоянная, равная в СИ $8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Напряженность электрического поля определяется формулой

$$E = \frac{F}{q},$$

где F – сила, действующая на заряд q .

Напряженность поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Напряженность электрического поля от нескольких зарядов находится по правилу геометрических сложений полей.

По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность

$$N_E = \frac{\Sigma q}{\epsilon\epsilon_0},$$

где Σq – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

При помощи теоремы Гаусса можно найти напряженность электрического поля, образованного различными заряженными телами.

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно длинной

нитью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 a},$$



где τ – линейная плотность заряда на нити,
 a – расстояние от нити.

Если нить имеет конечную длину, то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из середины нити на расстоянии a от нее равна:

$$E = \frac{r \sin \theta}{2\pi\epsilon\epsilon_0 a'}$$

где θ – угол между направлением нормали к нити и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концу нити.

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно протяженной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$$

где σ – поверхностная плотность заряда на плоскости.

Если плоскость представляет собой диск радиусом R , то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из центра диска на расстоянии a от нее,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \right).$$

Напряженность поля, образованного разноименно заряженными бесконечными плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Напряженность поля, образованного заряженным шаром

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad \text{где } q \text{ – заряд шара радиусом } R, \\ r \text{ – расстояние от центра шара, причем } r > R.$$



Задача 1

В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найти напряженность E электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Каждый заряд $1,5$ нКл, сторона шестиугольника 3 см.



Задача 1

Дано:

$$N_+ = 3$$

$$N_- = 3$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_4 = q_5 = q_6 = -1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$a = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$$

Решение:

3 варианта расположения

$$\text{а) } \vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6 \quad (1)$$

$$2\alpha = 120^\circ$$

$$\vec{E}_{\text{рез}} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2 + 2\vec{E}_3 \quad (2)$$

$$E_{\text{рез}} = -2E_3 + k \frac{2|q|}{a^2}$$

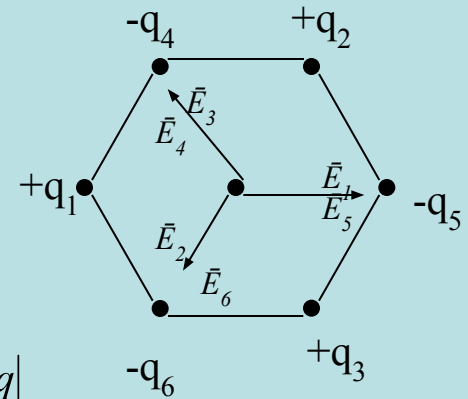
Т.к.

$$k \frac{2 \cdot 2|q| \cos 60^\circ}{a^2} = k \frac{2|q|}{a^2}$$

$$E_3 = \frac{k|q|}{a^2}$$

то

$$E_{\text{рез}} = 0$$



$E_{\text{рез}} - ?$

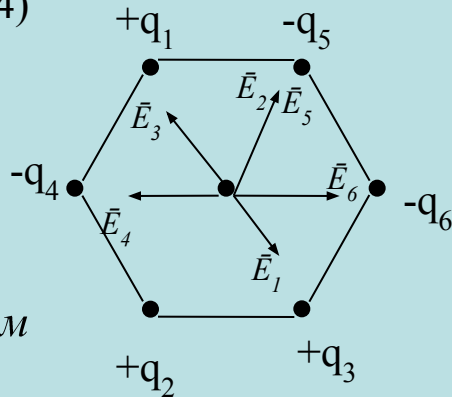
$$\text{б) } E_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6 \quad (3)$$

$$E_{\text{рез}} = E_2 + E_5 = 2E_2 \quad (4)$$

$$E_2 = \frac{k|q|}{a^2} \quad (5)$$

Подставим (5) в (4)

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \frac{k|q|}{a^2} = 30 \text{ кВ} \cdot \text{м} / \text{м}$$



в)

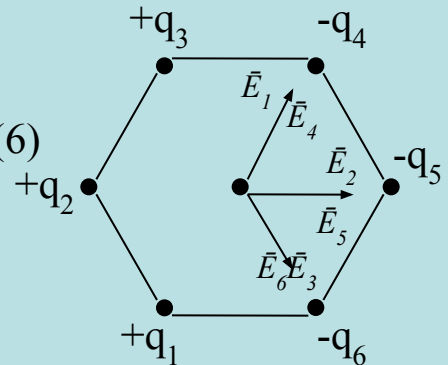
$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6 \quad (6)$$

$$\vec{E}_1 \uparrow \vec{E}_4, \vec{E}_2 \uparrow \vec{E}_5, \vec{E}_3 \uparrow \vec{E}_6$$

$$\vec{E}_{\text{рез}} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2 + 2\vec{E}_3$$

$$E_{\text{рез}} = k \frac{2q}{a^2} + k \frac{2q}{a^2} \cos 60^\circ + k \frac{2q}{a^2} \cos 60^\circ$$

$$E_{\text{рез}} = k \frac{4|q|}{a^2} = 60 \text{ кВ} / \text{м}$$



Ответ:

напряженность в центре шестиугольника при трех вариантах расположения зарядов равна $E=0$; $E=30 \text{ кВ/м}$; $E=60 \text{ кВ/м}$, соответственно.



Задача 2

Два точечных заряда $q_1=7\text{нКл}$, $q_2=-14.7\text{ нКл}$ расположены на расстоянии $r=5$ см. Найти напряженность E электростатического поля в точке, находящейся на расстоянии $a=3$ см от положительного заряда и $b=4$ см от отрицательного заряда.



Задача 2

Дано:

$$q_1 = 7,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_2 = -14,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$r = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$a = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$b = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\pi = 3,14$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$E_A = ?$$

Решение:

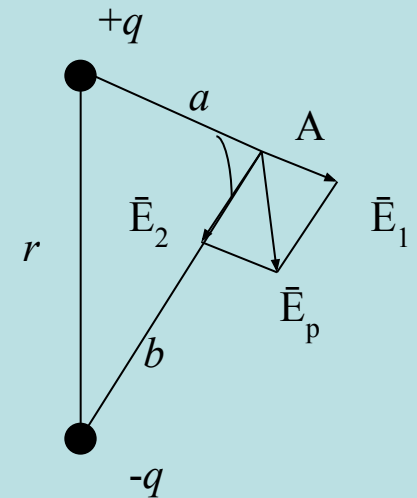
Теор. косинусов

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha} \quad (1)$$

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 b^2} \quad (2)$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2ab} \quad (3)$$



$$E_A = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{q_1^2}{a^4} + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{q_2^2}{b^4} - 2 \frac{|q_1||q_2|}{16\pi^2\varepsilon_0 a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2ab}} = 111,6 \cdot 10^3 \text{ (В/м)}$$

Ответ: напряженность электрического поля в точке A равна $E=111,6$ кВ/м



Задача 3

Два шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд Q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной $T=98$ мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса $l=10$ см, масса каждого шарика $m=5$ г.



Задача 3

Дано:

$$r_1 = r_2 = r$$

$$m_1 = m_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$T = 98 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$$

$$L = 10^{-1} \text{ м}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$$

$$q = ?$$

Решение:

$$F = \frac{kq^2}{4r^2} \quad (1)$$

$$\vec{m}g + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_k = 0$$

$$Ox: F_k - F_{\text{упр}} \sin \alpha = 0$$

$$Oy: -F_{\text{упр}} \cos \alpha + mg = 0$$

$$F_k = F_{\text{упр}} \sin \alpha \quad (2)$$

$$mg = F_{\text{упр}} \cos \alpha \quad (3)$$

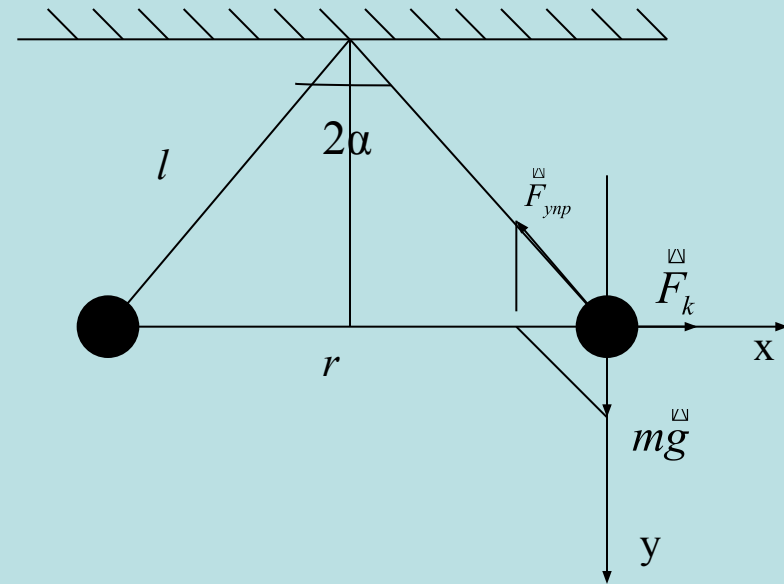
$$\cos \alpha = \frac{mg}{T}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left[\frac{mg}{T} \right]^2} \quad (4)$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{2l} \Rightarrow r^2 = 4l^2 \sin^2 \alpha \quad (5)$$

Подставим формулы (1), (4), (5) в (2), получаем

$$q = \sqrt{\frac{16l^2 T}{k}} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{mg}{T} \right)^2 \right)^3} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл)}$$



$$\frac{kq^2}{16l^2 \sin^2 \alpha} = T \sin \alpha$$

Ответ: чтобы сила натяжения нитей была равна 98 мН нужно сообщить шарикам заряд который равен 1,1 мкКл.



Задача 4

Два заряженных шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях одинаковой длины и опущены в жидкий диэлектрик, плотность которого равна ρ , а диэлектрическая проницаемость равна ϵ . Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике были одинаковы?



Задача 4

Решение:

Дано:

$$m_1 = m_2 = m$$

l

ρ

ε

$$1) \text{ В воздухе } (\varepsilon=1) \quad \vec{m\vec{g}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_k = 0$$

$$Ox : F_k - F_{\text{упр}} \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_k = F_{\text{упр}} \sin \alpha \quad (1)$$

$$Oy : -F_{\text{упр}} \cos \alpha + mg = 0 \Rightarrow mg = F_{\text{упр}} \cos \alpha \quad (2)$$

$$F_k = mgtg\alpha \Rightarrow \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mgtg\alpha \quad (3)$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{2l} \quad (4). \text{ Подставим (3) в (4), получим}$$

$$mg = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha tg\alpha} \quad (5)$$

$$2) \text{ В жидком диэлектрике } \vec{m\vec{g}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_k + \vec{F}_{\text{арх}} = 0$$

$$Ox : F_k - F_{\text{упр}} \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_k = F_{\text{упр}} \sin \alpha \quad (6)$$

$$Oy : -F_{\text{упр}} \cos \alpha + mg + F_{\text{арх}} = 0 \Rightarrow mg - F_{\text{арх}} = F_{\text{упр}} \cos \alpha \quad (7)$$

Поделим почленно (6) на (7) получим

$$mg - F_{\text{арх}} = \frac{F_k}{tg\alpha} \quad (8)$$

$$F_{\text{арх}} = \rho g V \quad (10)$$

Из (5), (9), (10) имеем

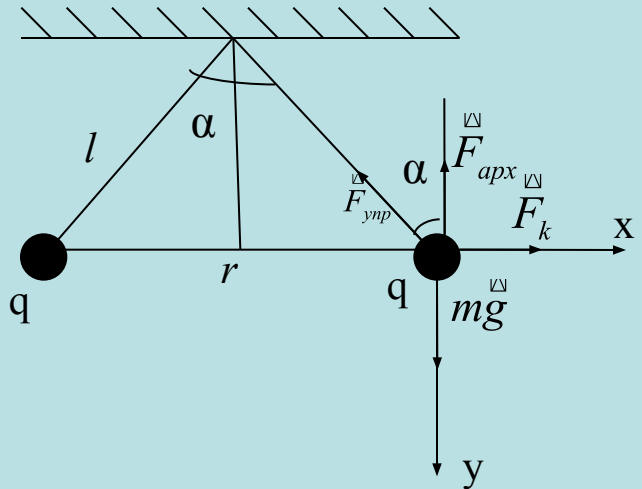
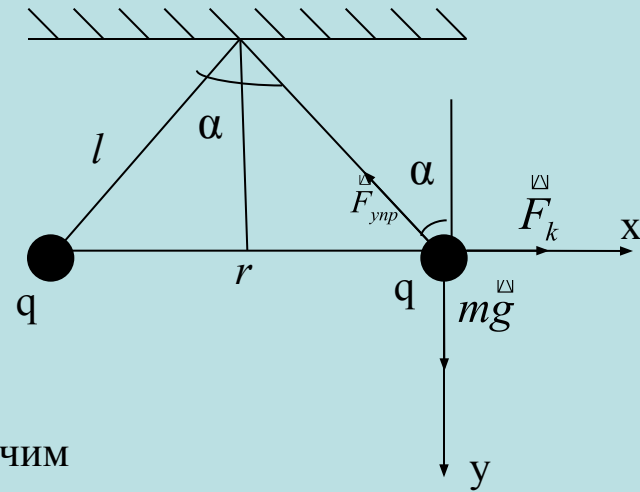
$$mg - F_{\text{арх}} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha tg\alpha} \quad (9) \quad \frac{mg - F_{\text{арх}}}{mg} = \frac{\rho_0 g V - \rho g V}{\rho_0 g V} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{\sin^2 \alpha tg\alpha q^2 4\pi\varepsilon_0 4l^2}{\varepsilon \sin^2 \alpha tg\alpha q^2 4\pi\varepsilon_0 4l^2}$$

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \rho_0 = \frac{\rho\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

Ответ:

Плотность материала шарика должна быть получена из формулы

$$\rho_0 = \frac{\rho\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$



Задача 5

На рисунке AA' — заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда 40 мкКл/м^2 и B — одноименно заряженный шарик с массой 1 г и зарядом 1 нКл . Какой угол с плоскостью AA' образует нить, на которой висит шарик?



Задача 5

Дано:

$$\sigma = 40 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$$

$$m = 0,001 \text{ кг}$$

$$q = 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$\alpha = ?$

Решение:

$$F_K = \frac{kq^2}{r^2} \quad \vec{m}g + \vec{F}_{\text{yup}} + \vec{F}_K = 0$$

$$Ox: F_K - F_{\text{yup}} \sin \alpha = 0$$

$$Oy: -F_{\text{yup}} \cos \alpha + mg = 0$$

$$F_K = F_{\text{yup}} \sin \alpha \quad (1)$$

$$mg = F_{\text{yup}} \cos \alpha \quad (2)$$

Разделим почленно (1) на (2) получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg} \quad (3) \quad \text{По опр.} \quad F_K = qE \quad (4)$$

Напряженность бесконечной плоскости $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (5)$

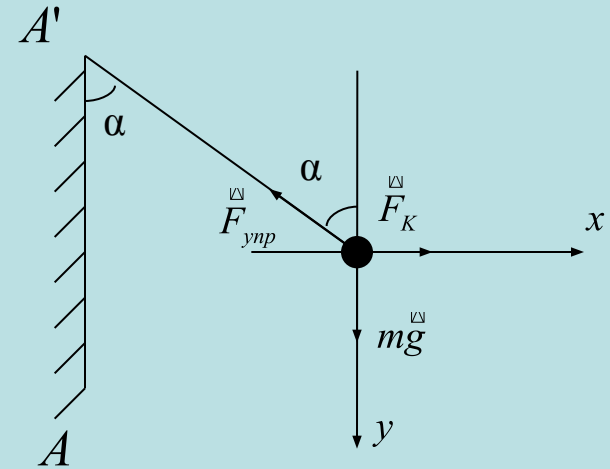
Подставим (5) в (4)

$$F_K = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} \approx 13^\circ$$



Ответ:

угол, который образует нить с плоскостью, равен $\alpha = 13^\circ$



Задача 6

С какой силой F_l на единицу длины отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда 3 мкКл/м , находящиеся на расстоянии $r_1=2 \text{ см}$ друг от друга? Какую работу на единицу длины надо совершить, чтобы сдвинуть эти нити до расстояния $r_2=1 \text{ см}$?



Задача 6

Дано:

$$\tau_1 = \tau_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}$$

$$r_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_2 = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\varepsilon = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$F_1 = ?, A_1 = ?$$

Решение:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \quad (1)$$

$$\text{а) } dF = E \cdot dq \quad (2)$$

$$\tau = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \tau dl \quad (3) \quad \text{где } dl - \text{длина физически бесконечно малого отрезка нити}$$

$$F = \frac{\tau^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \quad (1')$$

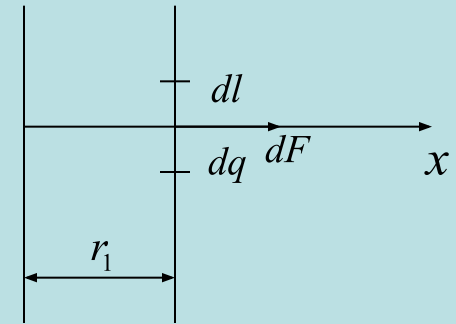
$$F = 8 \text{ (Н/м)}$$

$$\text{б) } dF = \frac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0 x} \quad (4) \quad dA_l = F_l dx \quad (5)$$

$$A_l = \int_{x_1}^{x_2} F_l dx \quad (6)$$

$$A_l = x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{x} = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0} [\ln x] = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$A = 0,112 \text{ (Дж/м)}$$



Ответ: две одноименно заряженные бесконечно длинные нити отталкиваются с силой $F=8,1 \text{ Н/м}$, приходящиеся на единицу длины; чтобы сдвинуть эти две нити на 1 см, надо совершить работу $A_l = 0,112 \text{ Дж/м}$, приходящуюся на единицу их длины.



Задача 7

В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля $E=60\text{кВ/м}$. Найти радиус R капли. Заряд капли $q=2,4 \cdot 10^{-9}\text{С}$.



Задача 7

Дано:

$$E = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$$

$$q = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon = 1$$

R-?

Решение:

$$\vec{F}_{\text{эл}} + m\vec{g} = 0 \quad (1)$$

$$Oy: mg - F_{\text{эл}} = 0 \Rightarrow mg = F_{\text{эл}} \quad (2)$$

$$\text{По определению} \quad F_{\text{эл}} = Eq$$

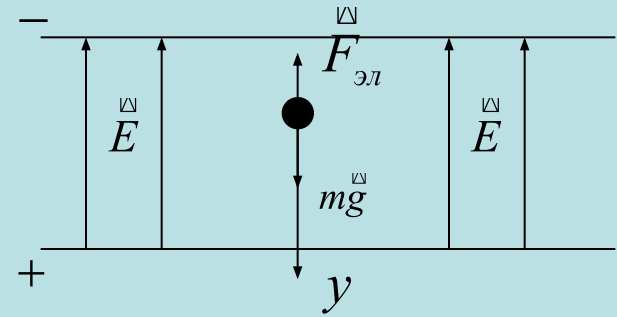
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \rho \pi R^3 g = Eq$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3qE}{4\pi\rho g}}$$

$$R = 1 \cdot 10^{-3}$$



Ответ:

радиус капли должен быть $R = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$



Задача 8

Кольцо из проволоки радиусом $R=10$ см имеет отрицательный заряд $q=-5$ нКл. 1) Найти напряженность E электрического поля на оси кольца в точках, расположенных на расстояниях L равных 0, 5, 8, 10 и 15 см. Начертить график $E=f(L)$. 2) На каком расстоянии L от центра кольца напряженность электрического поля будет иметь максимальное значение?



Задача 8

Дано:

$$R=0,1 \text{ см}$$

$$q=-5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$L_1=0 \text{ м}$$

$$L_2=0,05 \text{ м}$$

$$L_3=0,08 \text{ м}$$

$$L_4=0,1 \text{ м}$$

$$L_5=0,15 \text{ м}$$

$$\varepsilon=1$$

$$\varepsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 - ?$$

$$E_{\text{max}} - ?$$

$$L_m = ?$$

начертить $E=f(L)$

Решение:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2} \quad E = \int dE_t$$

$$dE_t = dE \cos \alpha = dE \frac{L}{x} = \frac{Ldq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$$

$$E = \frac{L}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3} \int dq = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$$

$$E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Если $L \gg R$, то
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2}$$

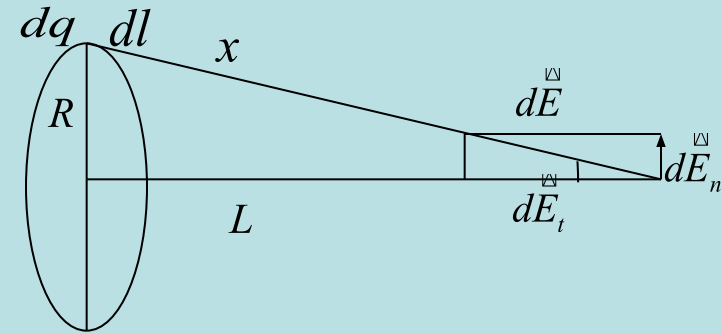
$$R = x \cdot \sin \alpha, L = x \cdot \cos \alpha$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} (\cos^2 \alpha \cdot 2 \sin \alpha - \sin^3 \alpha) = 0$$

$$2 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 0 \quad \text{tg}^2 \alpha = 2$$

$$2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \quad L = \frac{R}{\text{tg} \alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$



$$x = \sqrt{R^2 + L^2}$$

$$E_1 = 0 \text{ (В/м)}$$

$$E_2 = 1609 \text{ (В/м)}$$

$$E_3 = 1714 \text{ (В/м)}$$

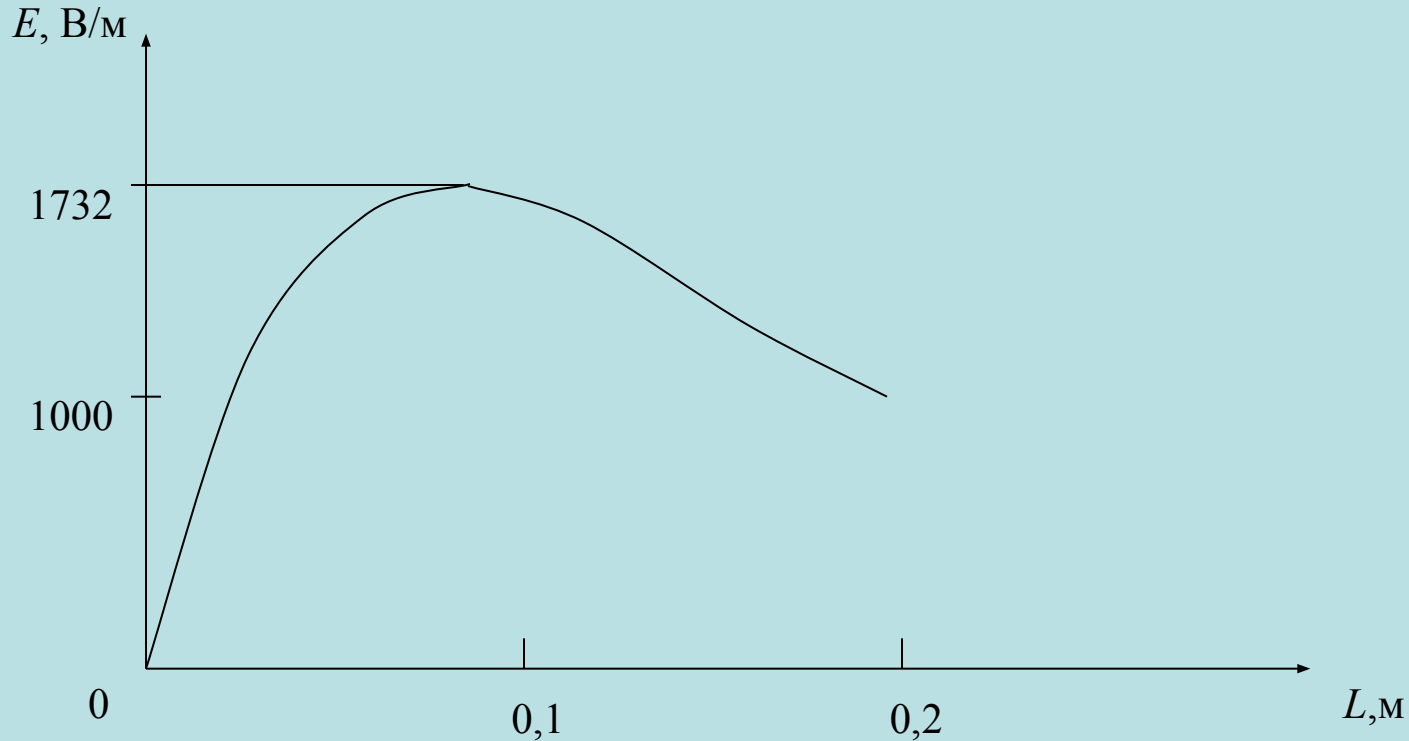
$$E_4 = 1590 \text{ (В/м)}$$

$$E_5 = 1152 \text{ (В/м)}$$

Продолжение...



График $E=f(L)$



$R=0,1$ м, следовательно $L_m=7,1 \cdot 10^{-2}$ м, $E_{\max}=1732$ В/м.

Ответ: напряженность электрического поля на 0 м; 0,05 м; 0,08 м; 0,1 м; 0,15 м равна соответственно 0 В/м; 1609 В/м; 1714 В/м; 1590 В/м; 1152 В/м. Напряженность будет максимальной на расстоянии от центра $L_m=7,1 \cdot 10^{-2}$ м и равна $E=1732$ В/м.

