

*Построение графиков функций
содержащих знак модуля для
учащихся гуманитарного класса.*

Учитель математики
Восточной гимназии
Дудрова И. А.

График функции $y = |x|$

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ функция $y = x$, т.е. график совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $y = -x$. При отрицательных значениях аргумента x график данной функции – прямая $y = -x$, т.е. биссектриса второго координатного угла.

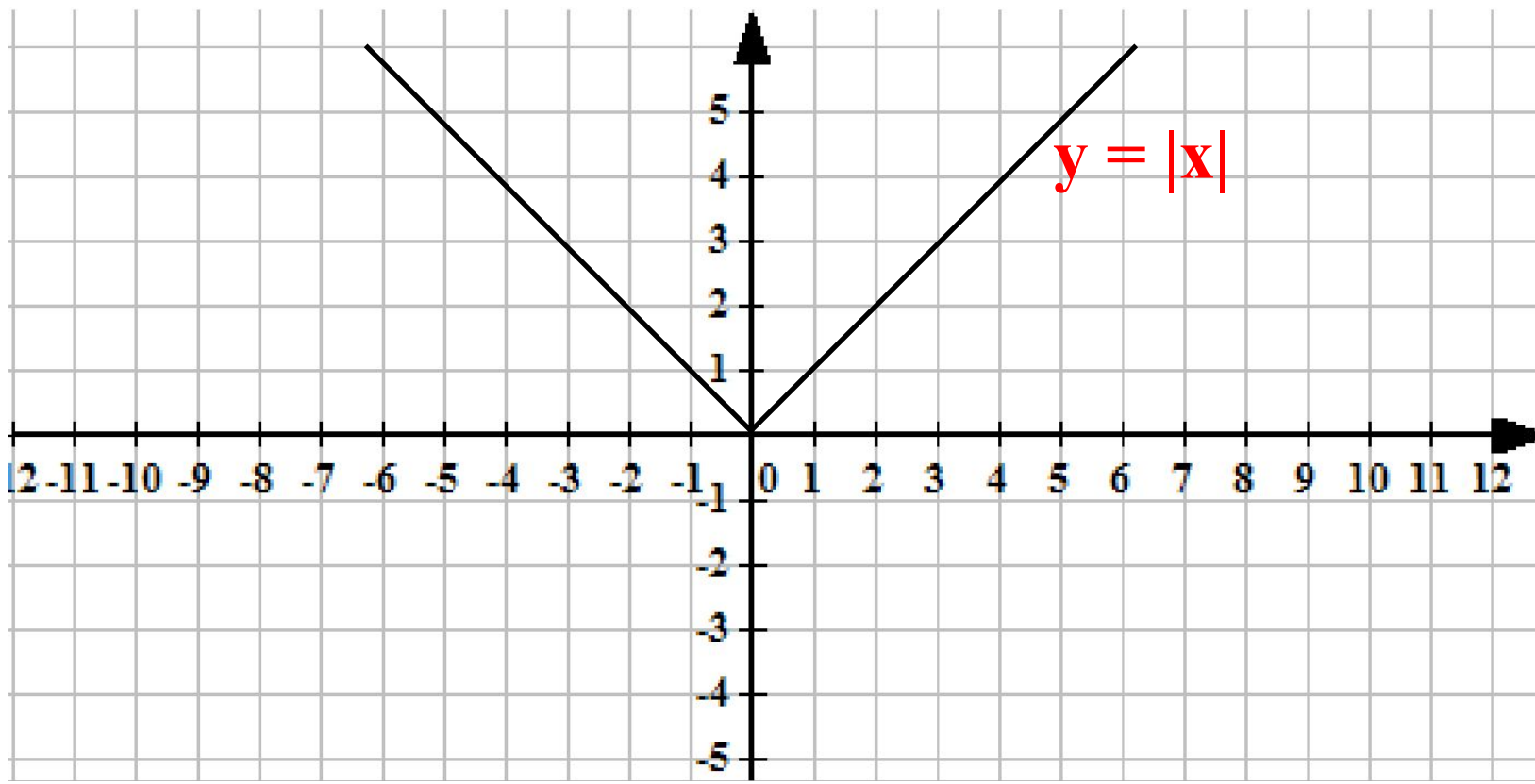


График функции $y = -|x|$

Получается симметричным отображением графика $y = |x|$ относительно оси x .

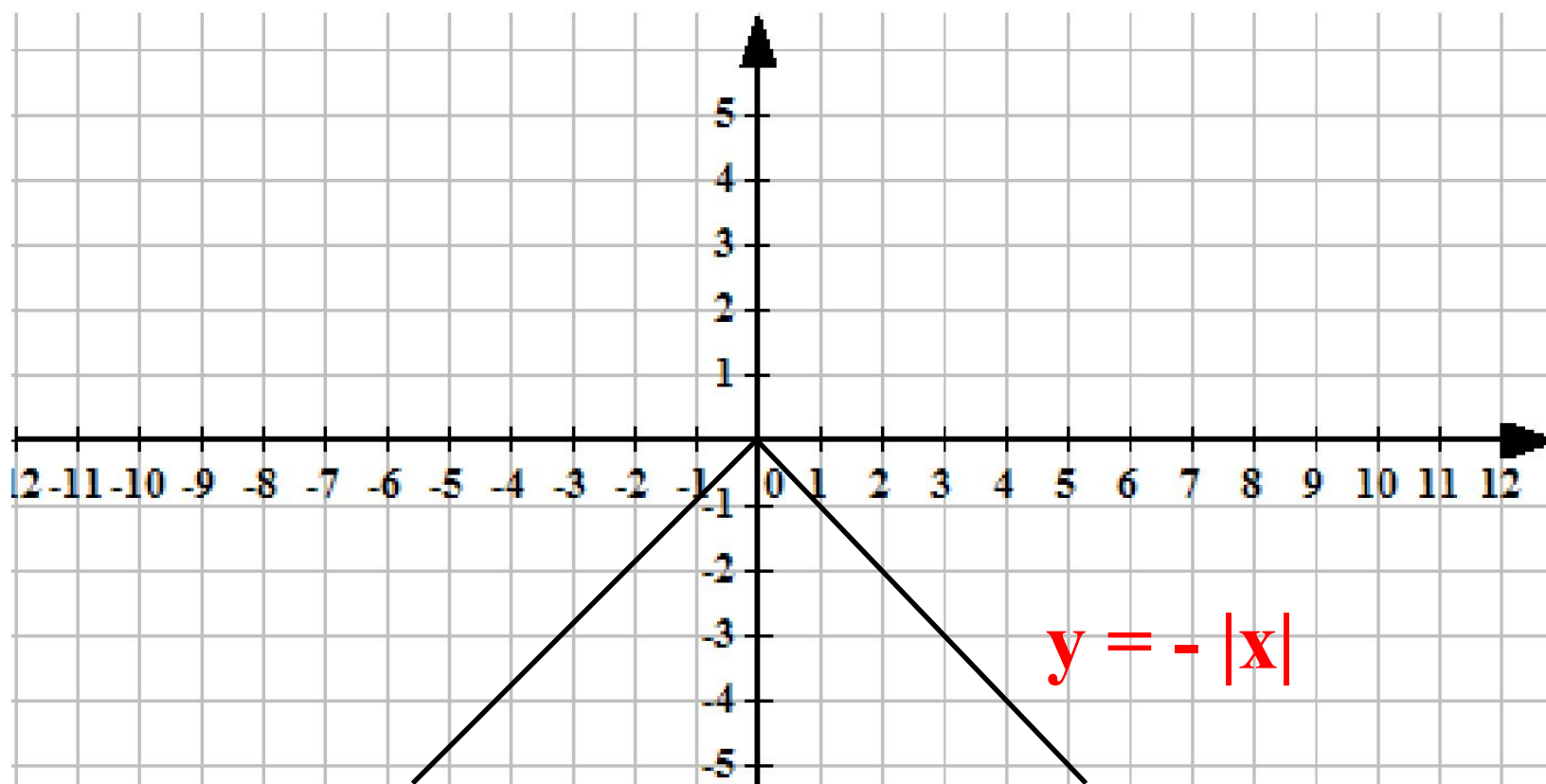


График функции $y = |x| + a$

График функции $y = |x| + a$ получается параллельным переносом графика $y = |x|$ в положительном направлении оси y на a единиц отрезка при $a > 0$ и в отрицательном направлении на a единиц при $a < 0$.

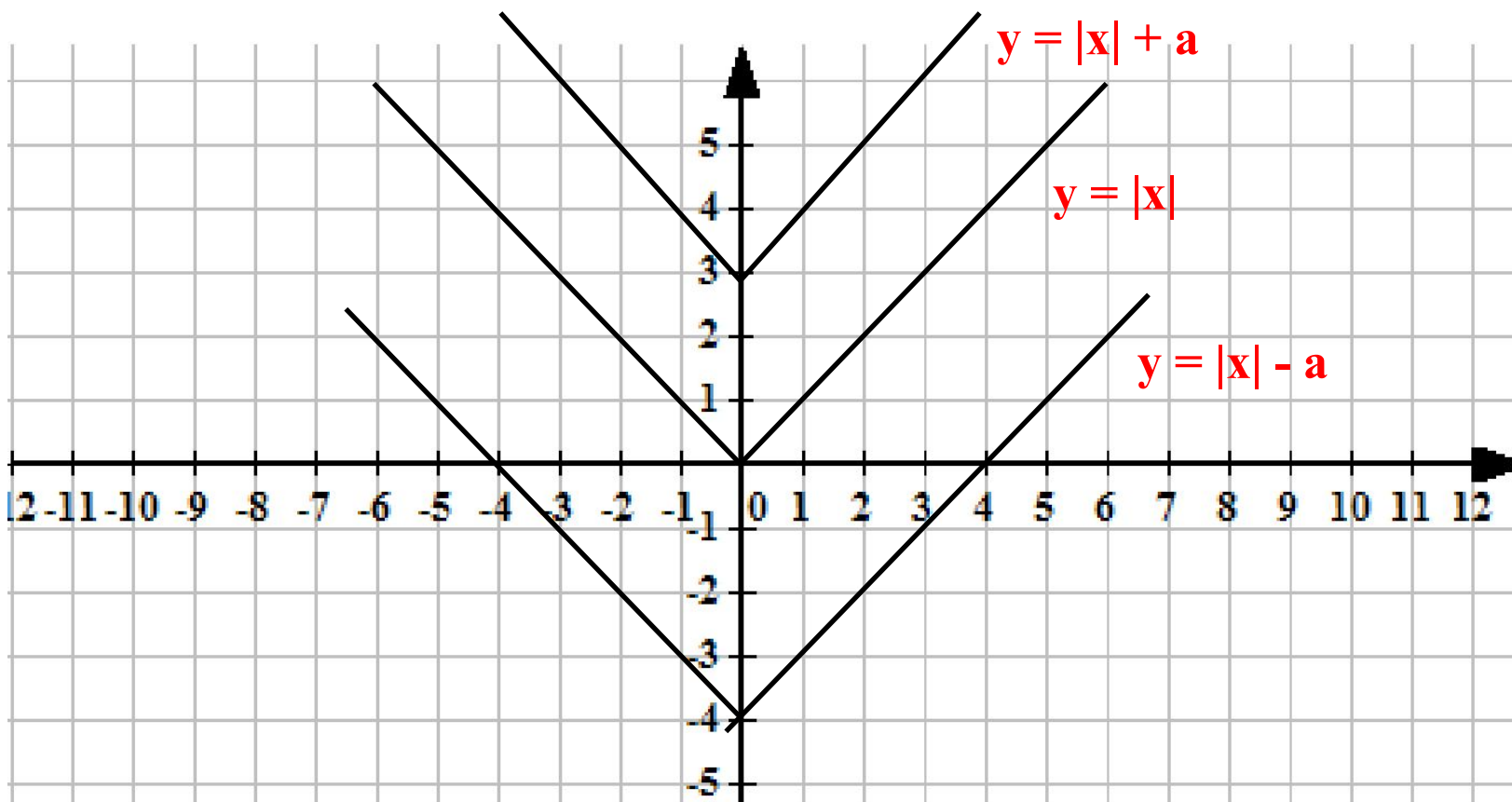


График функции $y = a|x|$

График функции $y = a|x|$ получается
растяжением графика $y = |x|$ вдоль **оси y** в **a раз** при $a > 1$ и
сжатием вдоль этой **оси** в **$1/a$ раз** при $0 < a < 1$.

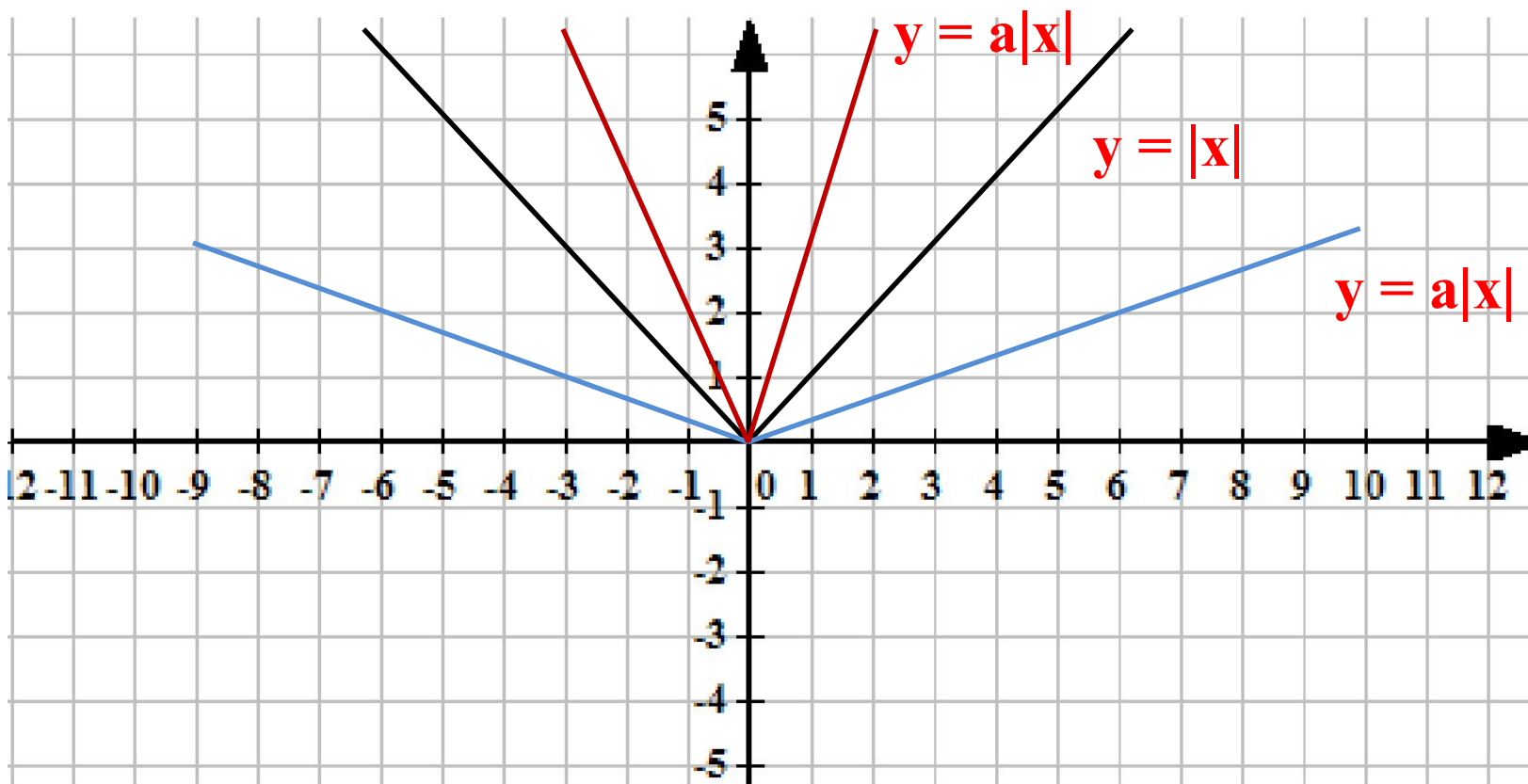
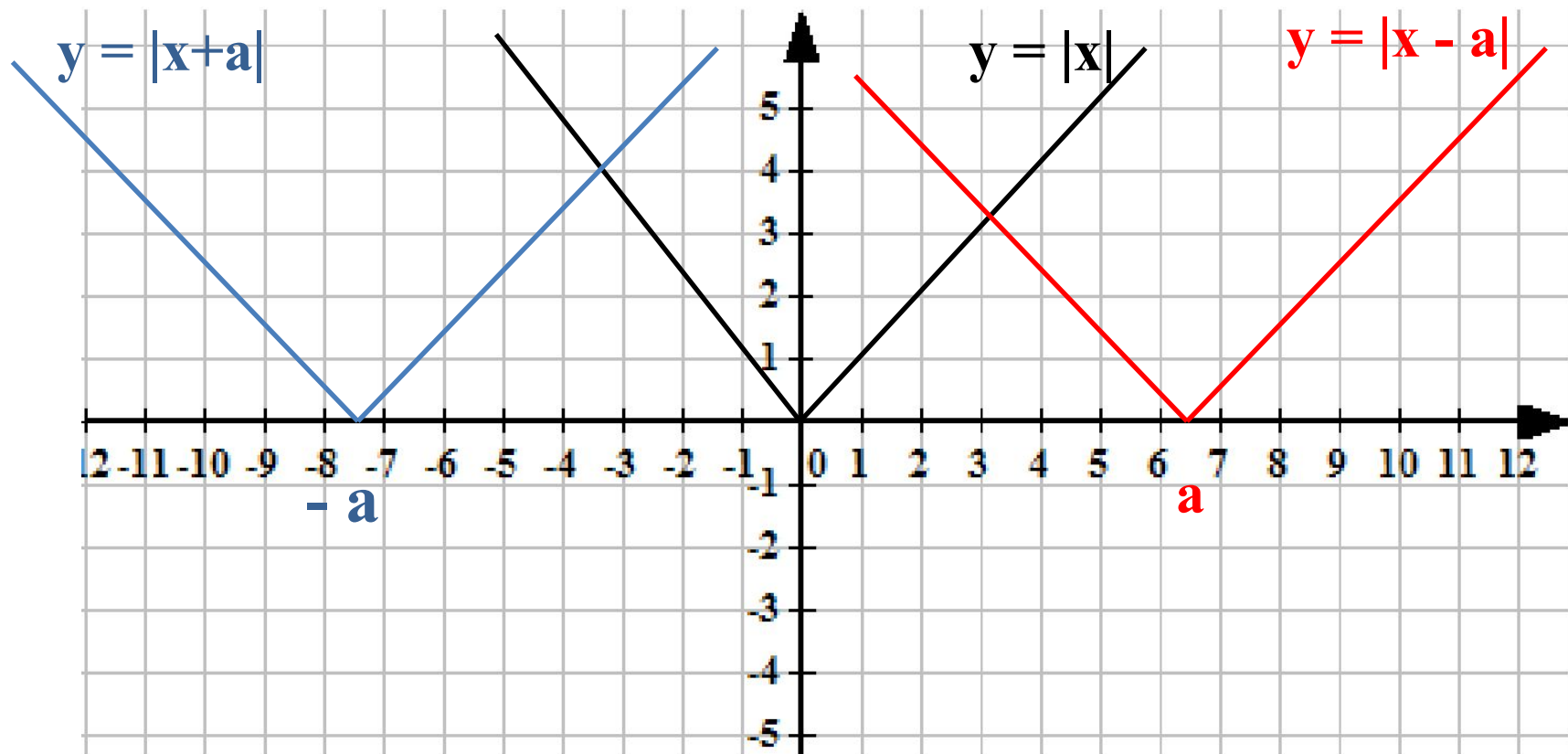


График функции $y = |x+a|$

График функции $y = |x+a|$ получается параллельным переносом графика $y=|x|$

**в отрицательном направлении от оси x на $|a|$ при $a>0$ и
в положительном направлении на $|a|$ при $a<0$.**



Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

1 способ.

Раскрываем $|x| = x$ при $x \geq 0$, получаем график $y = x^2 - 4x + 3$.

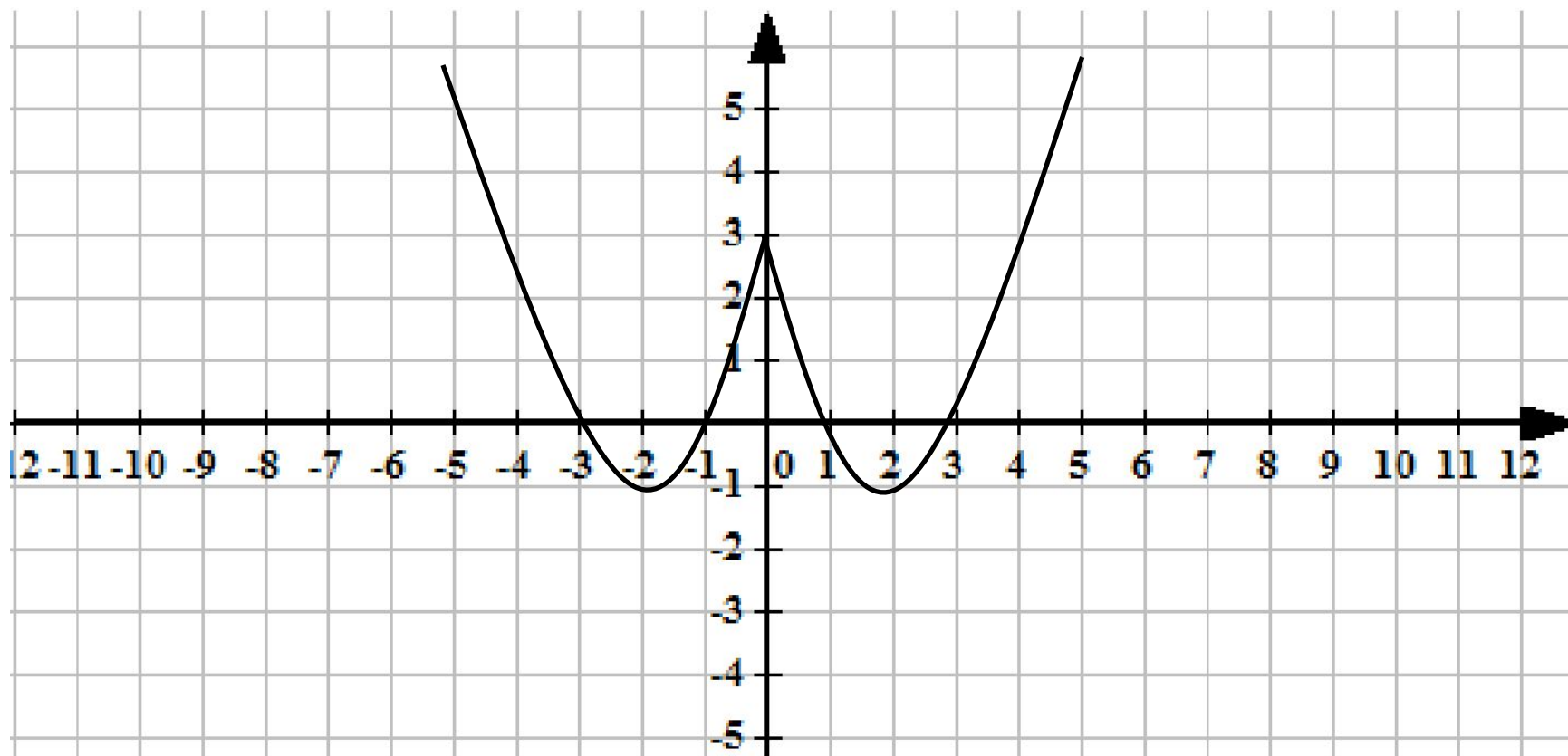
При $x < 0$, $|x| = -x$, получаем график $y = x^2 + 4x + 3$.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 3, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Строим кусочно – заданную функцию по алгоритму:

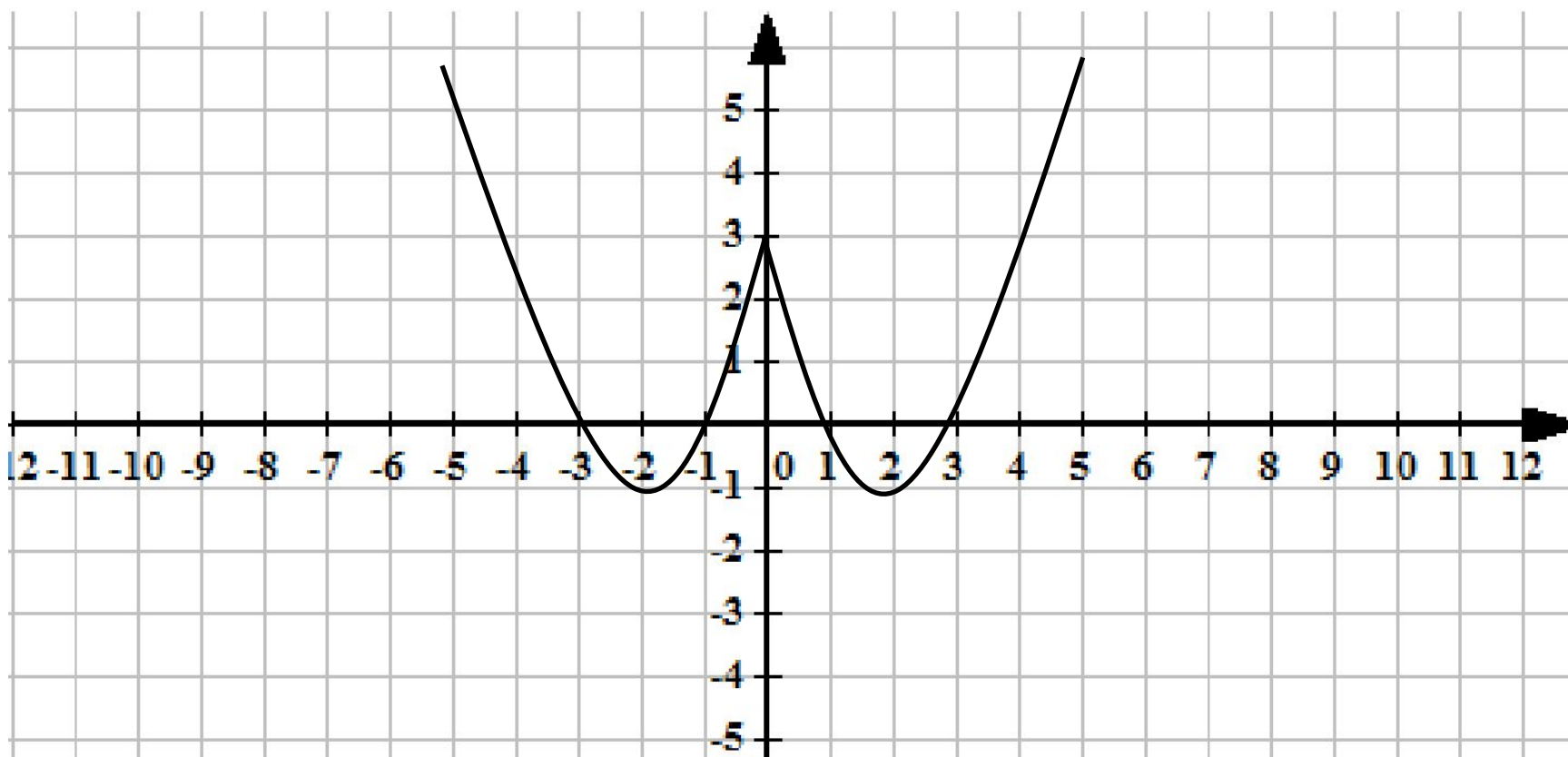
1. Находим вершину параболы для каждой функции.
2. Находим точки пересечения каждой параболы с осью x .
3. Строим параболы по заданным условиям.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 3, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



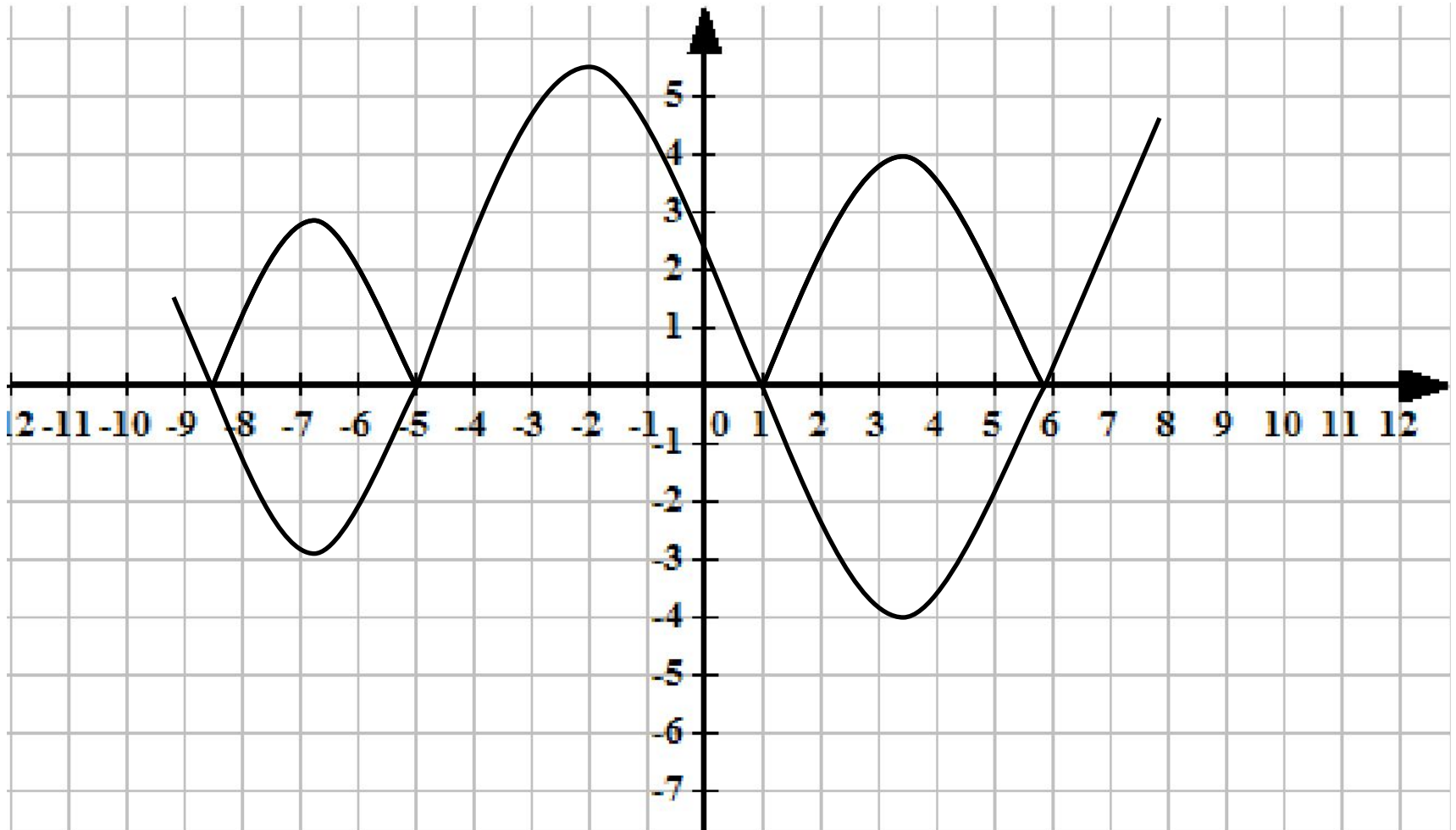
2 способ.

Если рассмотрим график $y = x^2 - 4x + 3$ при $x \geq 0$ и отобразить его относительно оси ОУ мы получим тот же самый график.



Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно:

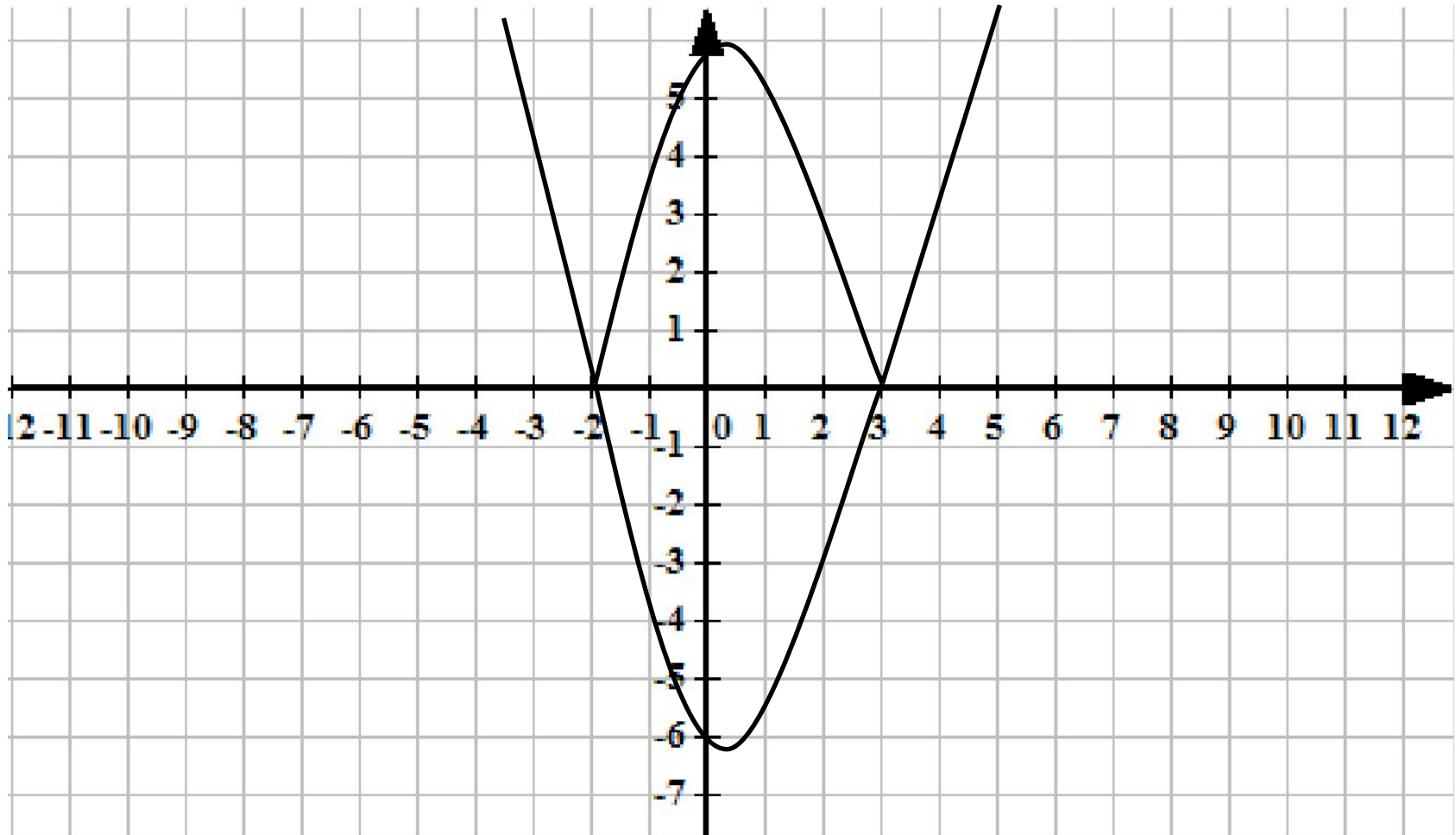
1. Построить график функции $y = f(x)$;
2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) < 0$, симметрично отражаем относительно оси абсцисс.



Построить график функции $y = |x^2 - x - 6|$

1. Построим график функции
 $y = x^2 - x - 6$

2. Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаем симметрично относительно оси OX .



Построить график функции $y = |x + 3| + |2x + 1| - x$

Строить график будем с помощью раскрытия модуля.

Алгоритм построения:

1. Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и находим точки, в которых подмодульные выражения, входящие в уравнение функции меняют знак.
2. Наносим эти точки на ось x и выделяем промежутки, в которых подмодульные выражения сохраняют знак.
3. Раскрываем модуль на каждом промежутке и получаем соответствующие уравнения функции.
4. Строим график на каждом промежутке.

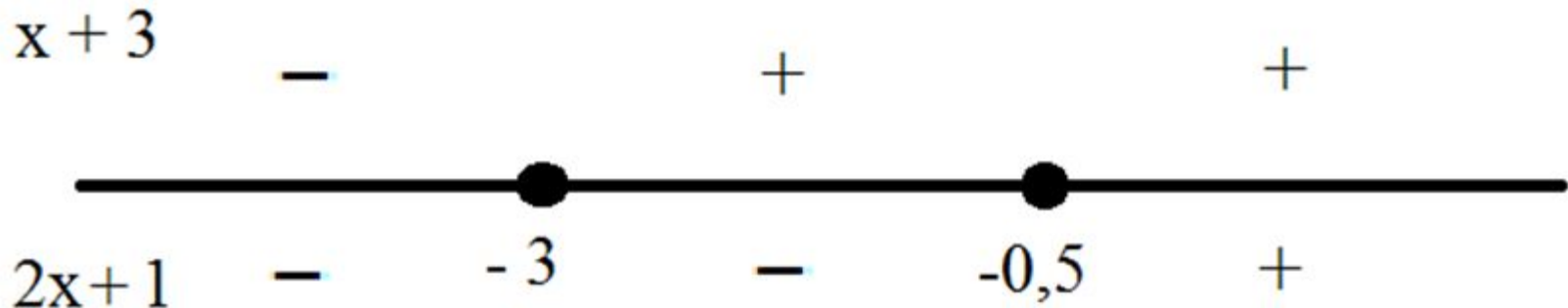
$$y = |x + 3| + |2x + 1| - x$$

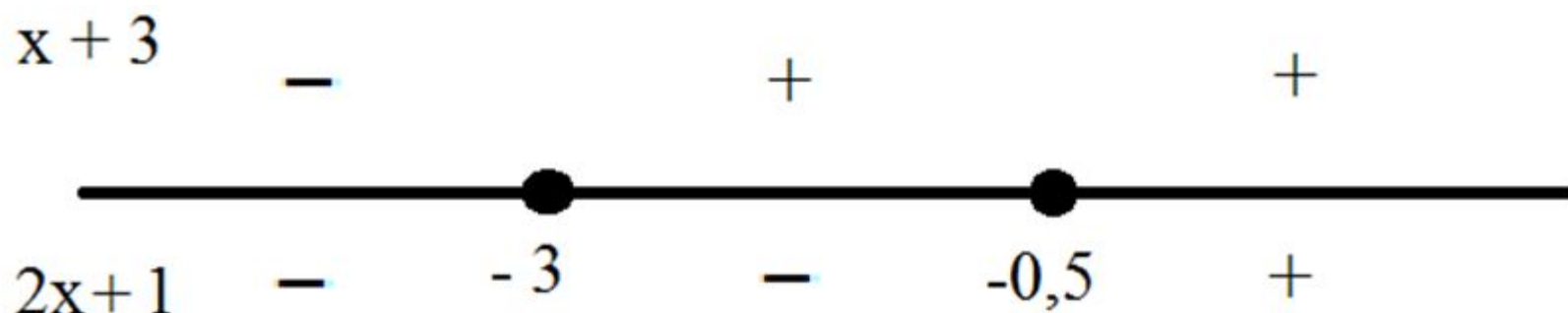
1. Приравниваем каждое подмодульное выражение к нулю и находим точки, в которых происходит смена знака:

$$x + 3 = 0; x = -3$$

$$2x + 1 = 0; x = -0,5$$

2. Наносим точки на ось x :





3. При

$$x < -3$$

$$y = -(x+3) - (2x+1) - x = -x - 3 - 2x - 1 - x = -4x - 4$$

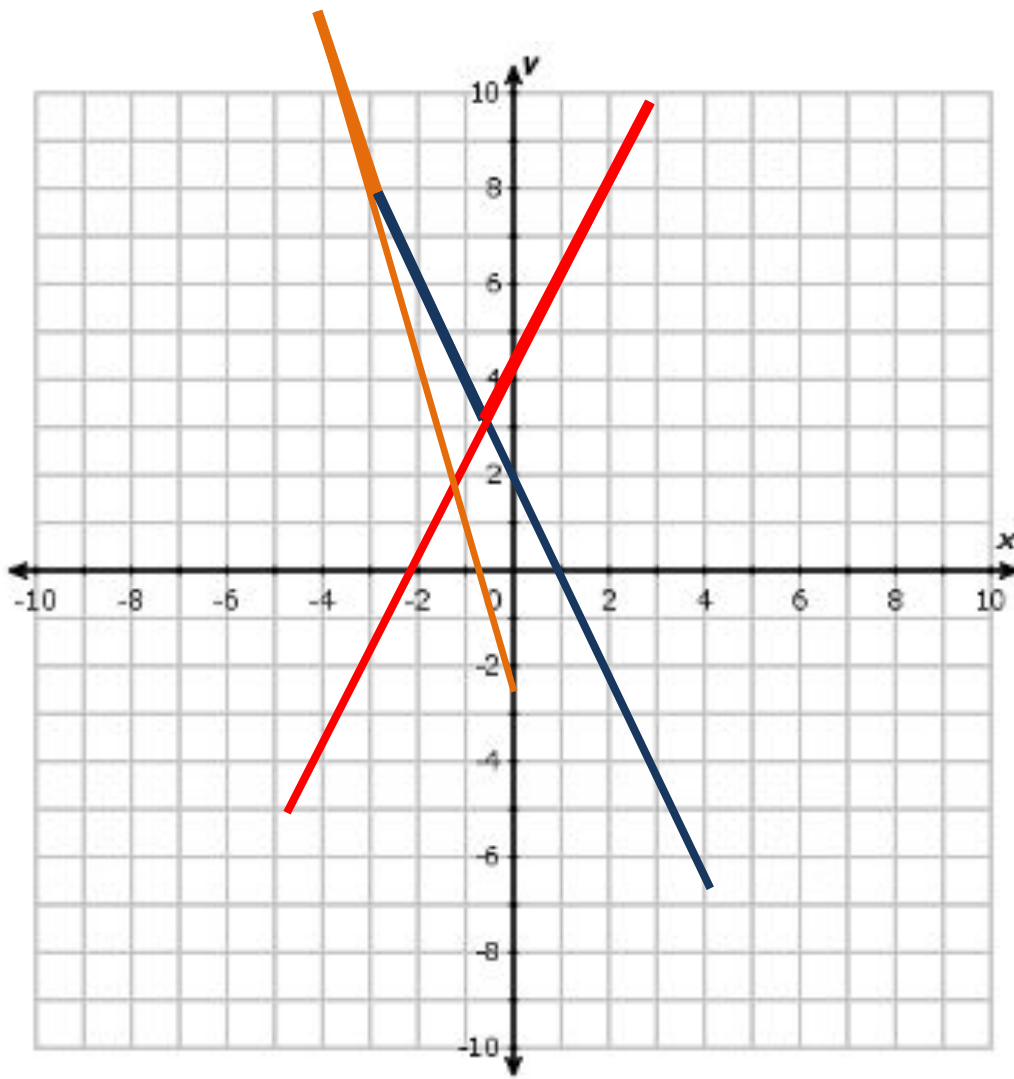
$$-3 \leq x \leq -0,5$$

$$y = (x+3) - (2x+1) - x = x + 3 - 2x - 1 - x = -2x + 2$$

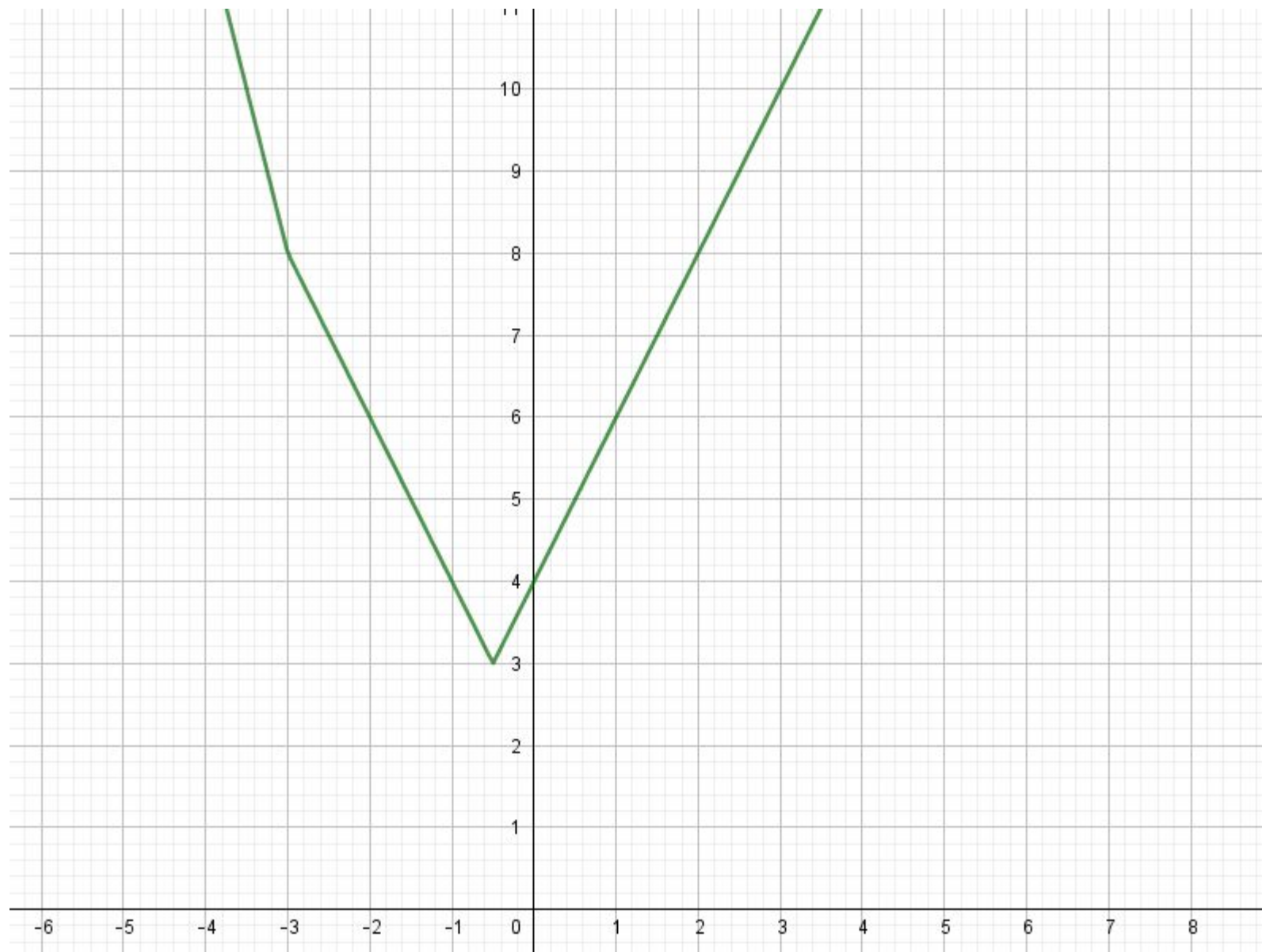
$$x \geq -0,5$$

$$y = (x+3) + (2x+1) - x = 2x + 4$$

$$y = \begin{cases} -4x - 4, & \text{если } x \leq -3 \\ -2x + 2, & \text{если } -3 \leq x \leq -0,5 \\ 2x + 4, & \text{если } x \geq -0,5 \end{cases}$$



$$y = |x + 3| + |2x + 1| - x$$



Построить график функции $y = |2|x| - 3|$

1. Построить $y = 2|x| - 3$, для $2|x| - 3 > 0$, $|x| > 1,5$ т.е. $x < -1,5$ и $x > 1,5$

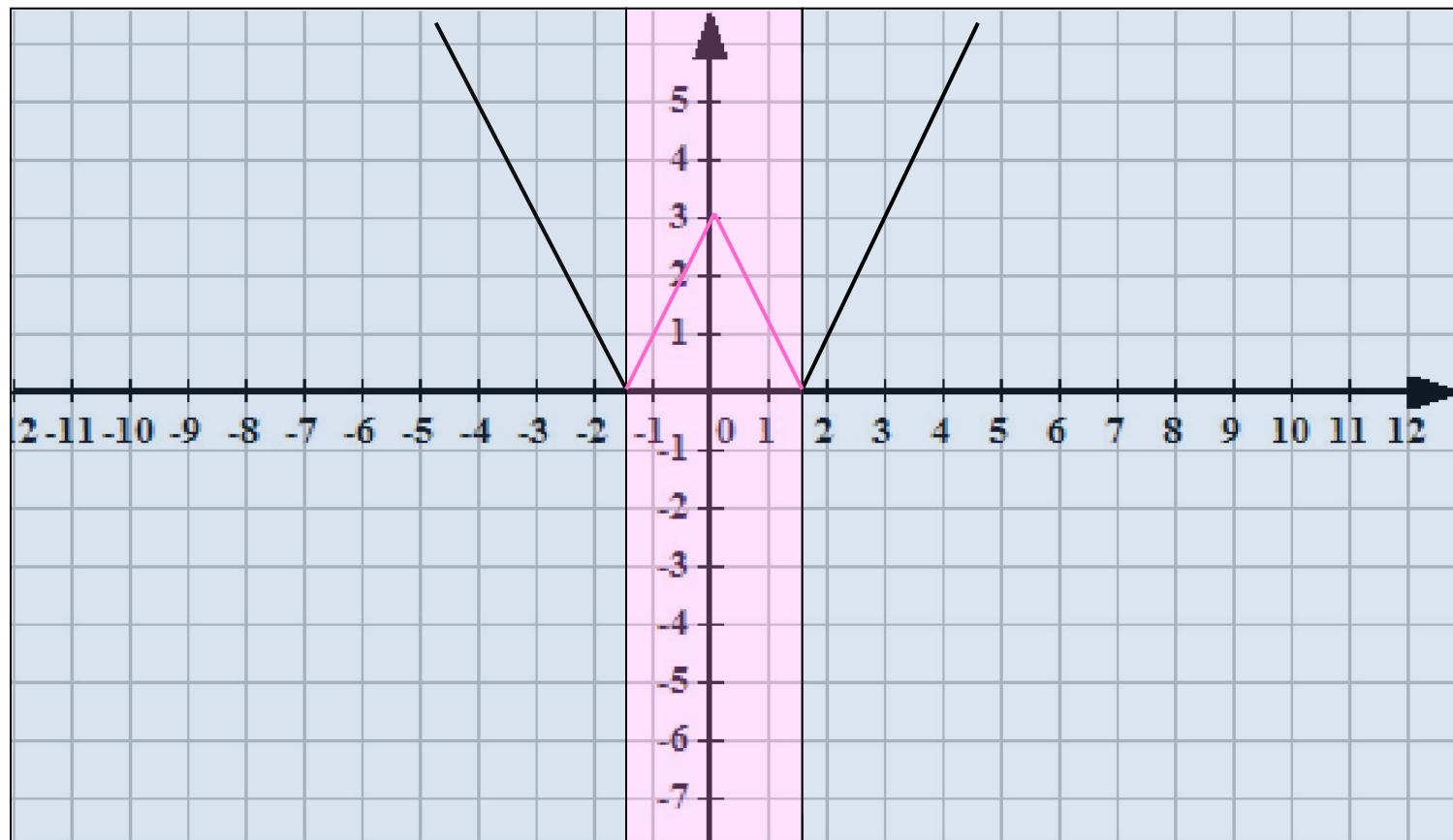
а) $y = 2x - 3$, для $x > 0$

б) для $x < 0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.

2. Построить $y = -2|x| + 3$, для $2|x| - 3 < 0$. т.е. $-1,5 < x < 1,5$

а) $y = -2x + 3$, для $x > 0$

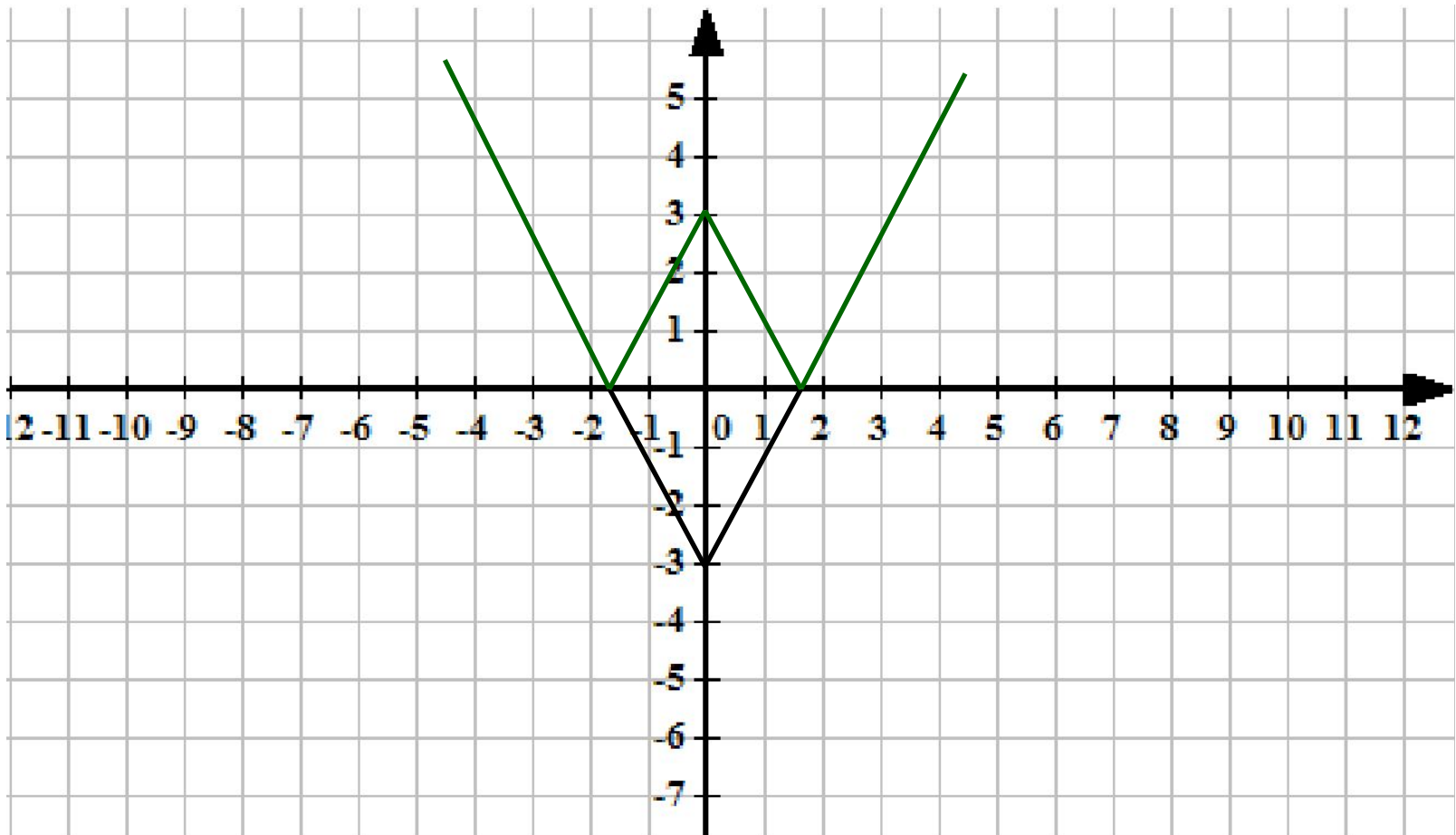
б) для $x < 0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.



$$y = |2|x| - 3|$$

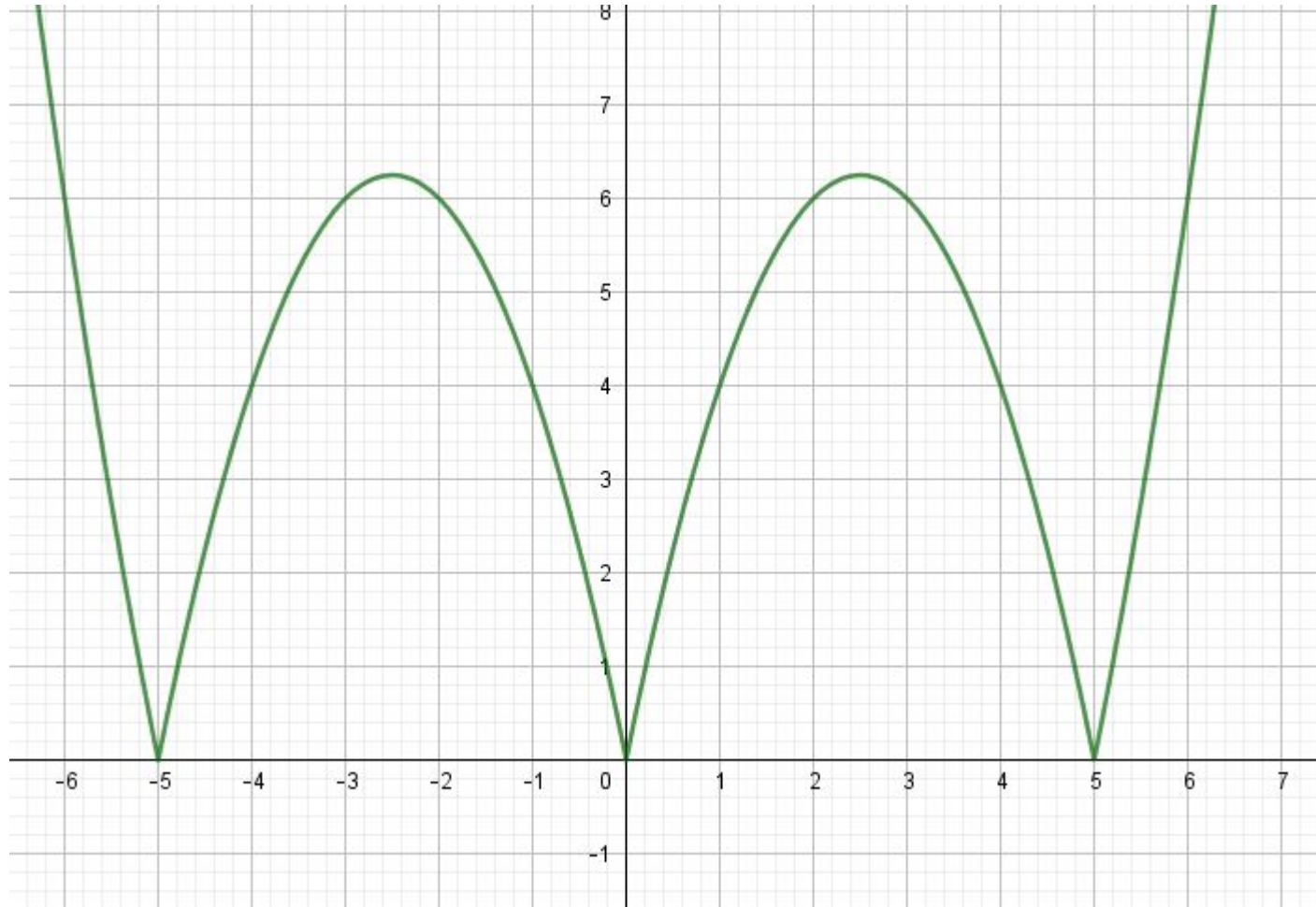
- 1) Построить $y = 2x - 3$, для $x > 0$.
- 2) Построить прямую, симметричную построенной относительно оси ОУ.
- 3) Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаем симметрично относительно оси ОХ.

Сравнивая оба графика, видим что они одинаковые.



$$y = |x^2 - 5|x||$$

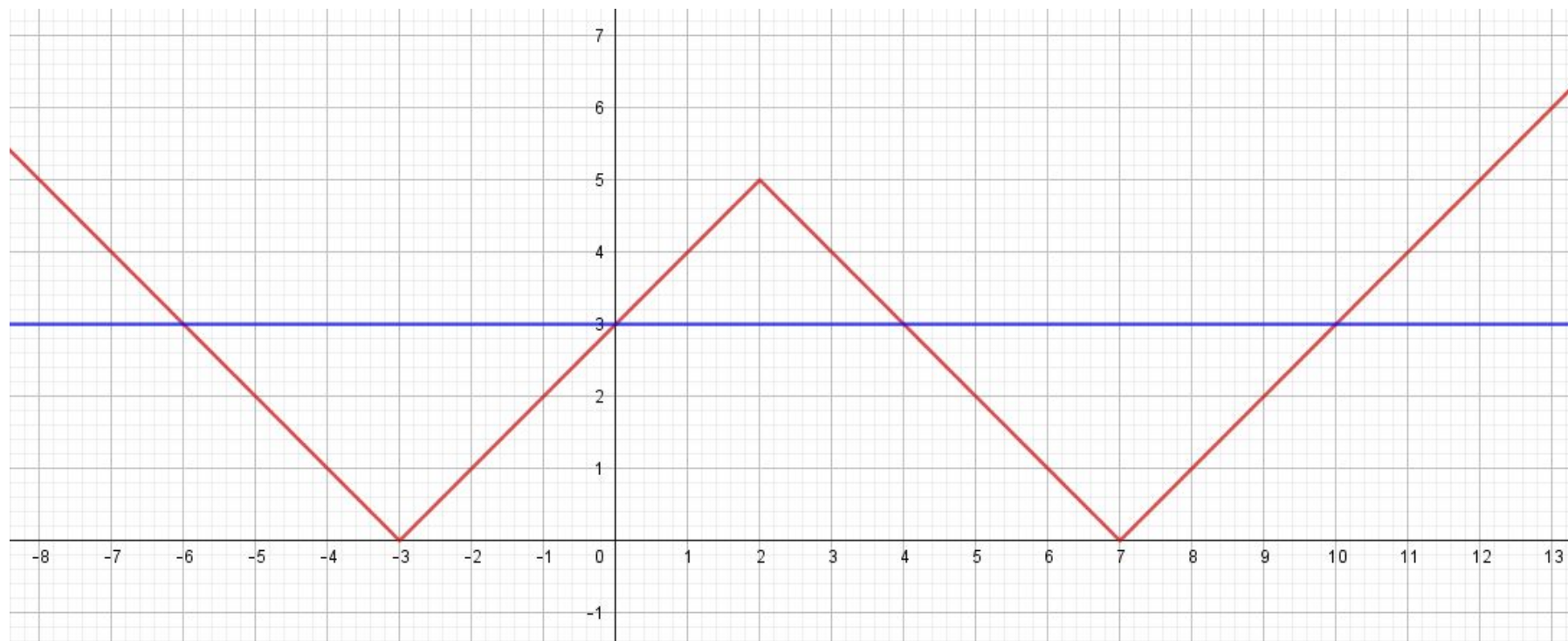
1. Построим $y = x^2 - 5x$, для $x > 0$. Вершина параболы в $(2,5; -6,25)$
2. Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаем симметрично относительно оси OX .
3. Для $x < 0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси OY .



Найти корни уравнения $||x-2|-5| = 3$.

- Выполняем построение первого (внутреннего) модуля $y = |x-2|$
- Параллельно переносим линии вниз на 5, чтобы получить график функции $y = |x-2| - 5$
- Отражаем все что находится ниже оси абсцисс. Это и будет искомая функция $y = ||x-2|-5|$. Также выполняем построение прямой $y=3$

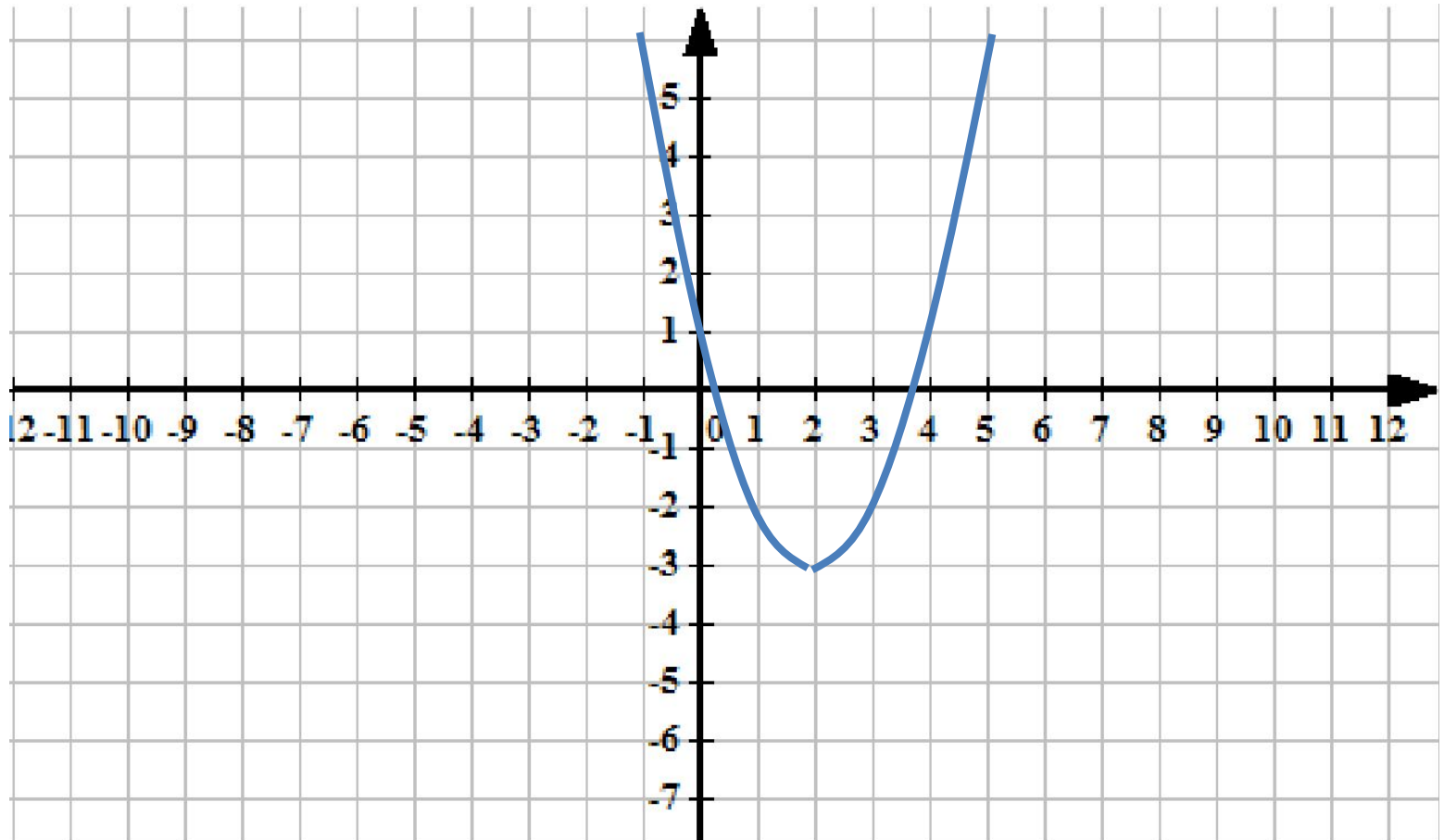
Найти корни уравнения $||x-2|-5|=3$.



Нетрудно определить по графику, что решениями уравнения с модулями будут значения $x = -6$; $x = 0$; $x = 4$; $x = 10$.

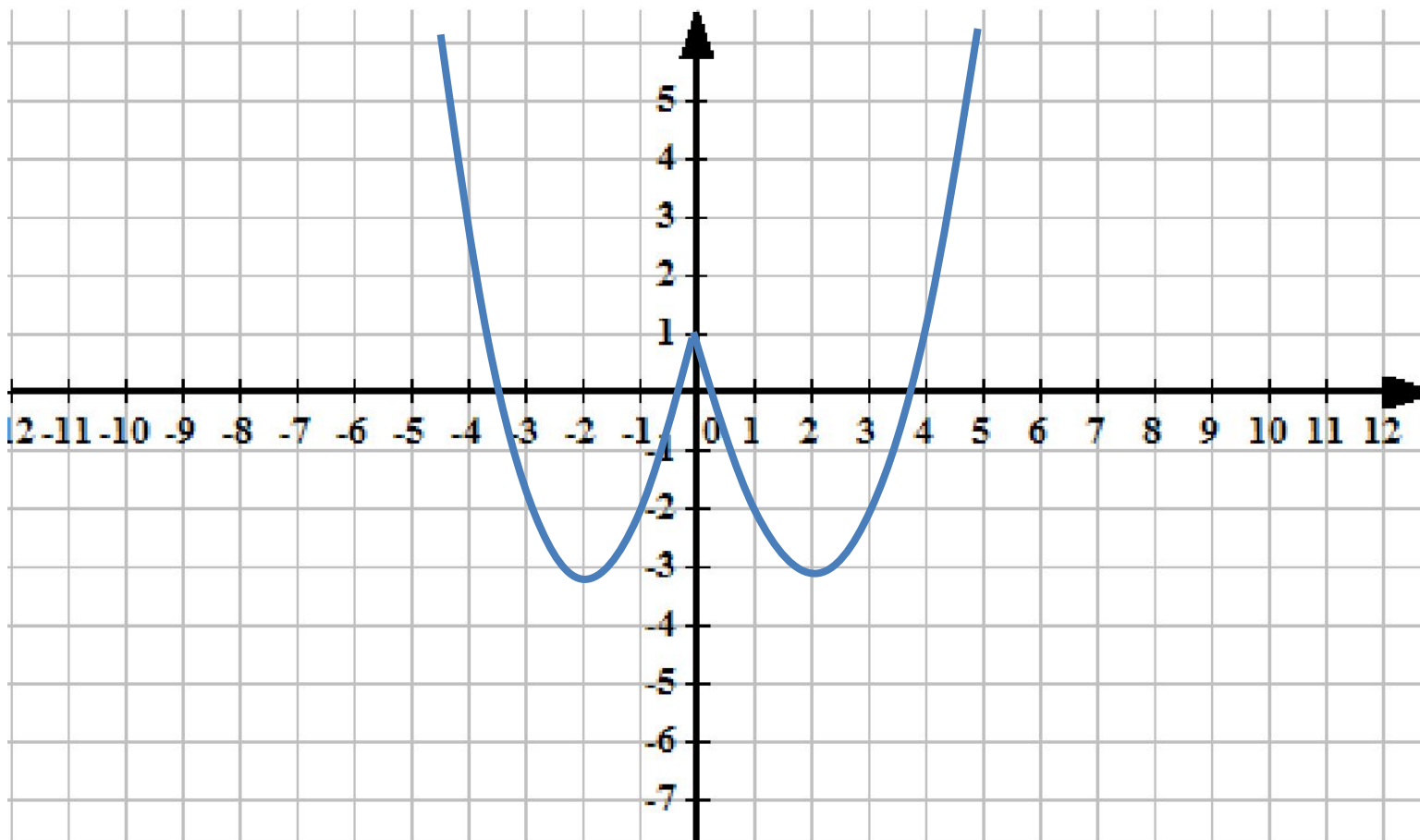
Построить график функции $y = |(|x| - 2)^2 - 3|$

- Строим график функции $y = (x - 2)^2 - 3$
- Совершаем преобразование: для этого часть графика, расположенную левее оси oy стираем.



Построить график функции $y = |(|x| - 2)^2 - 3|$

- Часть графика, расположенную правее оси oy достраиваем симметрично относительно этой оси. Получаем график функции **$y = (|x| - 2)^2 - 3$**



Построить график функции $y = |(|x| - 2)^2 - 3|$

- Часть графика, расположенную ниже оси OX отображаем симметрично относительно этой оси.

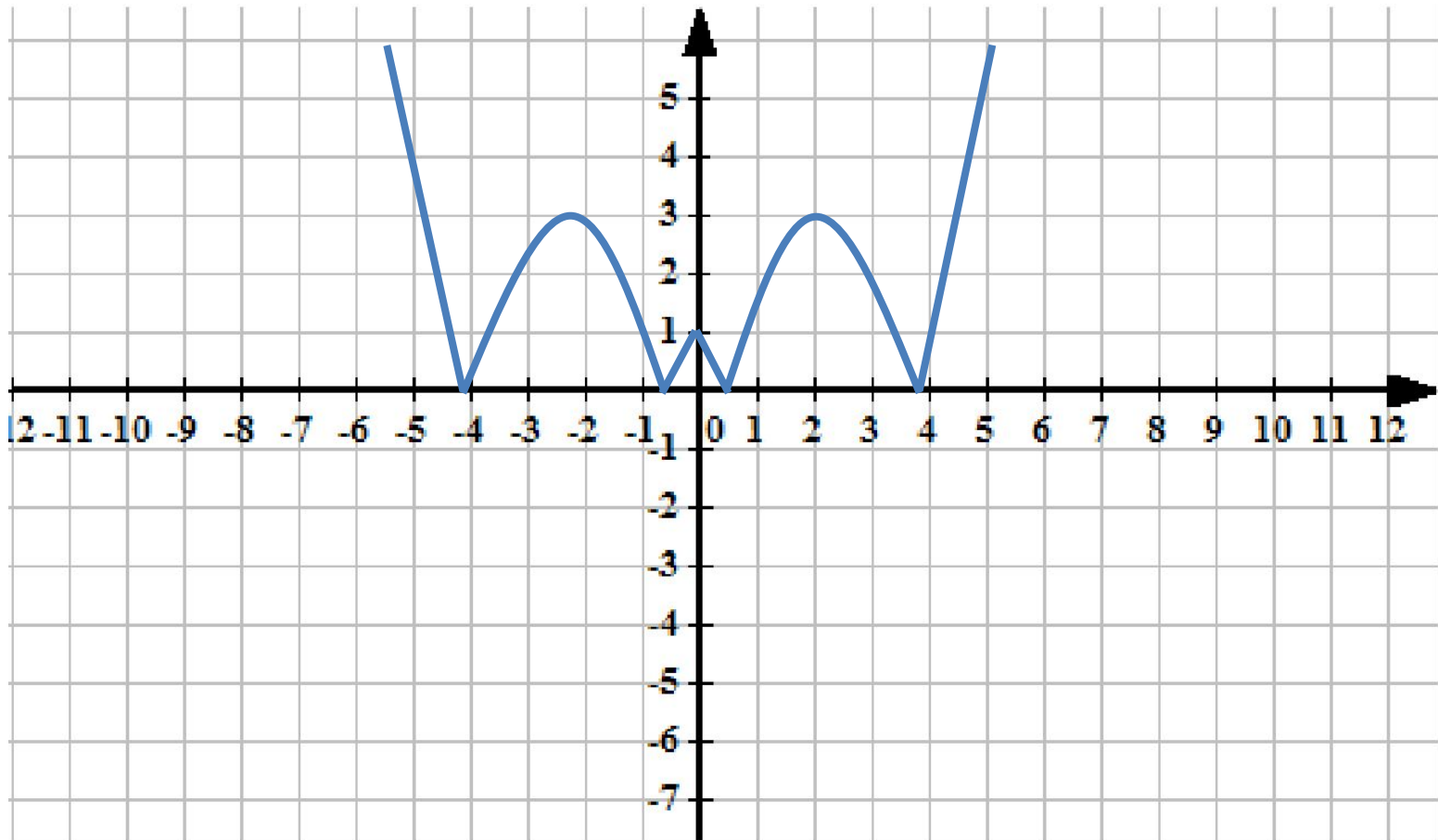


График неравенства $|y - 2x - 1| + 2|x| \leq 3$

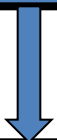
- **Задача.** Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства.
- Раскроем модули. Для этого каждое подмодульное выражение приравняем к нулю: $y - 2x - 1 = 0$; $y = 2x + 1$
 $x = 0$

Подмодульные выражения меняют знак при переходе через прямые $y = 2x + 1$ и $x = 0$.

Выводы:

- **Для построения графика функции $y = f | (x) |$:**
 1. Построить график функции $y = f(x)$ для $x > 0$;
 2. Построить для $x < 0$ часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ.
- **Для построения графика функции $y = | f(x) |$**
 1. Построить график функции $y = f(x)$;
 2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) < 0$, строить кривые, симметричные построенным графикам относительно оси абсцисс.
- **Для построения графика функции $y = | f | (x) | |$**
 1. Построить график функции $y = f(x)$ для $x > 0$.
 2. Строим вторую часть графика, т. е. построенный график симметрично отражаем относительно ОУ
 3. Участки получившегося графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовываем на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.

$$y = f(|x|)$$



$$y = f(x), x > 0$$



Построить часть для $x < 0$,
симметричную
относительно
оси ОУ

$$y = |f(x)|$$



$$y = f(x)$$



Часть графика, расположенного
в нижней полуплоскости
симметрично отобразить
относительно оси ОХ

$$y = |f(x)|$$



$$y = f(x), x > 0$$



Построить для $x < 0$ часть
графика, симметричную
построенной относительно
оси ОУ

