

Основные понятия алгебры логики

Логика

Логика — наука о законах и формах мышления. **«Логика»** происходит от древнегреческого *logos* и означает «слово, мысль, понятие, рассуждение, закон».

Алгеброй логики называется математический аппарат, который позволяет выполнять действия над *высказываниями*.

Высказывание — это некоторое повествовательное предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно.

«Истина» и **«ложь»** - это логические константы.

Примеры высказываний

«Апельсин синего цвета» (ложь)

« $5 \times 5 = 25$ » (истина)

« $\text{H} + \text{O} = \text{H}_2\text{O}$ » (ложь)

Примеры невысказываний

«Программное обеспечение компьютера
— это комплекс используемых в
компьютере программ»

« $5x^2 + 12 = 204$ »

«Она красива»

«Существуют внеземные цивилизации»

«На улице идет дождь»

Какие из предложений являются высказываниями?

Число 6 – четное.

Да

Посмотрите на доску.

Нет

Все роботы являются машинами.

Да

У каждой лошади есть хвост.

Да

Внимание!

Нет

$x > 0$.

Нет

Некоторые люди являются художниками.

Да

Память компьютера – совокупность устройств для хранения информации.

Нет

Наполеон был французским императором.

Да

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц



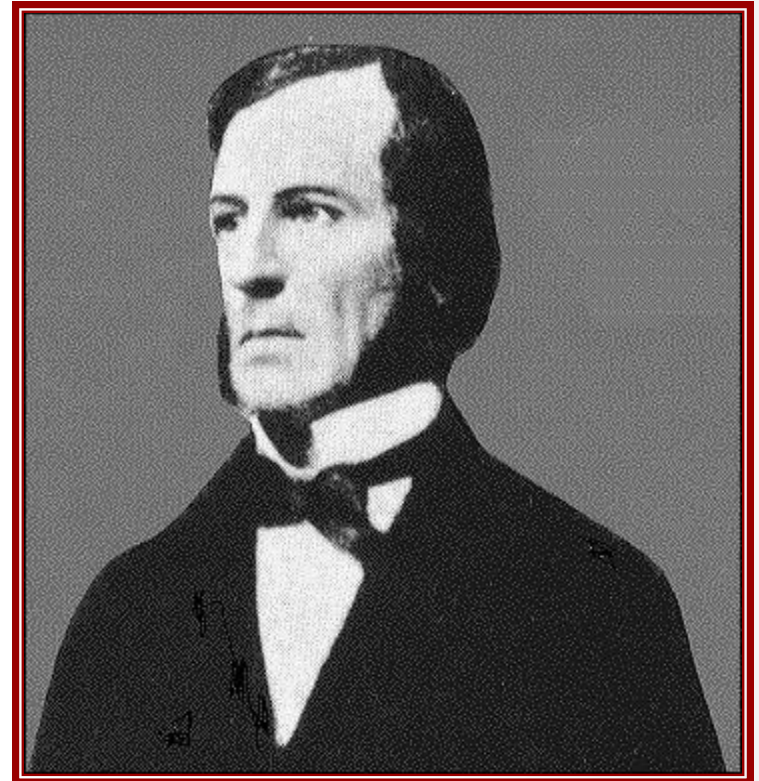
Первым (в 1666 году)
попытался отношения
между высказываниями
определить в виде
математических
отношений.

1646 – 1716

Джордж Буль

В 1847 году английский математик Джордж Буль подхватил идею Лейбница о создании логического универсального языка, подчиняющегося строгим математическим законам.

Буль изобрел своеобразную алгебру – систему обозначений и правил, применимую к всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Его именем она теперь и называется: алгебра Буля или булева алгебра.



1815 – 1864

Булева алгебра

В булевой алгебре высказывания принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, X, Y.

Действия, которые производятся над высказываниями записываются в виде *логических выражений*.

Высказывание (логическое выражение) может принимать только одно из двух значений — **ИСТИНА** (1) или **ЛОЖЬ** (0).

Определить истинность высказываний

Все ребята умеют плавать.	0
Киев – столица Украины.	1
Кошки любят рыбу.	1
Невозможно создать вечный двигатель.	1
$2 + 5 = 10$.	0
Человек все может.	1
$\text{H} + \text{H} + \text{O} = \text{H}_2\text{O}$.	1
Каждый человек – художник.	0
Тигр – хищное животное.	1

Логические операции

Логические выражения

Логические выражения могут быть простыми и сложными.

Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логической операции. В простом логическом выражении может быть только два результата – либо «истина», либо «ложь».

Сложное логическое выражение содержит высказывания, объединенные логическими операциями.

НЕ – Логическое отрицание

(инверсия)

Результатом операции НЕ будет «ложь», если исходное выражение истинно и «истина», если исходное выражение ложно.

Для операции отрицания приняты следующие обозначения:

$\text{НЕ } A, \neg A, \overline{A}, \text{not } A.$

Таблица со всеми возможными значениями исходных выражений и соответствующими им результатами операции получила название *таблица истинности*.

A	\bar{A}
0	1
1	0

ИЛИ – Логическое сложение

(дизъюнкция, объединение)

Применяемые обозначения: А или В, $A \vee B$, $A + B$, A or B.

Результатом операции ИЛИ является выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда истинно будет хотя бы одно из исходных выражений или оба выражения.

Таблица истинности логического сложения

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Составить из логических выражений ДИЗЪЮНКЦИЮ.

1. Марина старше Светы. Оля старше Светы.
2. В кабинете есть учебники. В кабинете есть справочники.
3. Часть туристов любит чай. Остальные туристы любят молоко.
4. Синий кубик меньше красного. Синий кубик меньше зеленого.

И – Логическое умножение

(конъюнкция)

Применяемые обозначения:

А и В, $A \wedge B$, $A \cdot B$, $A \& B$, A and B.

Результатом операции И является выражение, которое будет истинным, если истинны оба высказывания.

Таблица истинности логического умножения

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Составить из логических выражений КОНЪЮНКЦИЮ.

1. Одна половина группы изучает английский язык. Вторая половина группы изучает немецкий язык.
2. Суффикс есть часть слова. Суффикс стоит после корня.
3. Две прямые на плоскости параллельны. Они не пересекаются.
4. Петя поедет в деревню. Петя пойдет на рыбалку.

Пусть $A = \text{«Эта звездная ночь»}$ а

$B = \text{«Эта ночь холодная»}$.

Выразите следующие формулы на
обычном языке:

1. $A \text{ И } B$;
2. $A \text{ И НЕ } B$;
3. $\text{НЕ } A \text{ И НЕ } B$;
4. $\text{НЕ } A \text{ ИЛИ } B$;
5. $A \text{ ИЛИ НЕ } B$;
6. $\text{НЕ } A \text{ ИЛИ НЕ } B$;

Составьте и запишите истинные сложные высказывания с использованием логических операций.

1. Неверно, что $y > 5$ и $z < 0$.
2. Любое из чисел X, Y, Z отрицательно.
3. Все числа X, Y, Z равны 12.
4. Неверно, что все числа X, Y, Z положительны.

Построение логических схем

Актуальность

Над возможностью применения логики в технике ученые и инженеры задумывались уже давно.

Компьютер работает на электричестве, то есть любая информация представлена в компьютере в виде электрических импульсов.

С точки зрения логики электрический ток либо течет, либо не течет; электрический импульс есть или его нет; электрическое напряжение есть или его нет.

Логический элемент (вентиль) -

это электронное устройство, реализующее одну из логических функций.

Обычно у вентилей бывает от двух до восьми входов и один или два выхода.

Логическая схема -

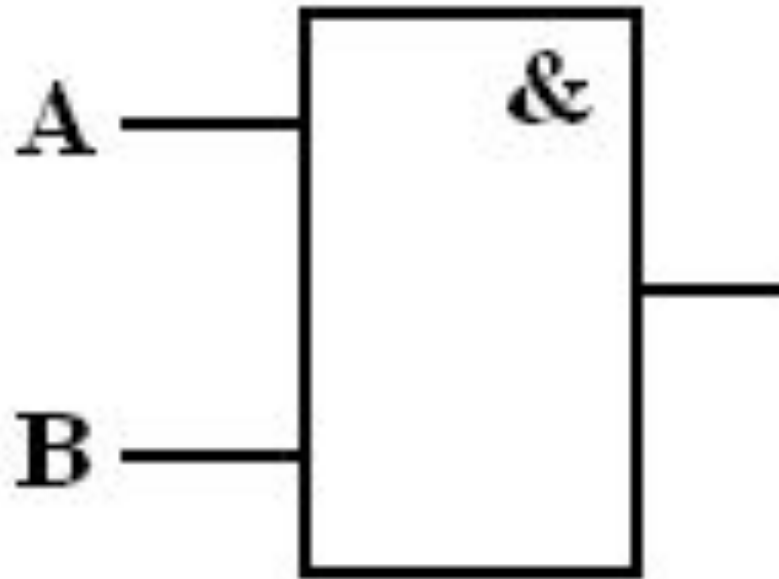
это электронное устройство, которое реализует любую логическую функцию, описывающую работу устройств компьютера.

Правила построения логических схем:

- 1) Определить число логических переменных.
- 2) Определить количество базовых логических операций и их порядок.
- 3) Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
- 4) Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

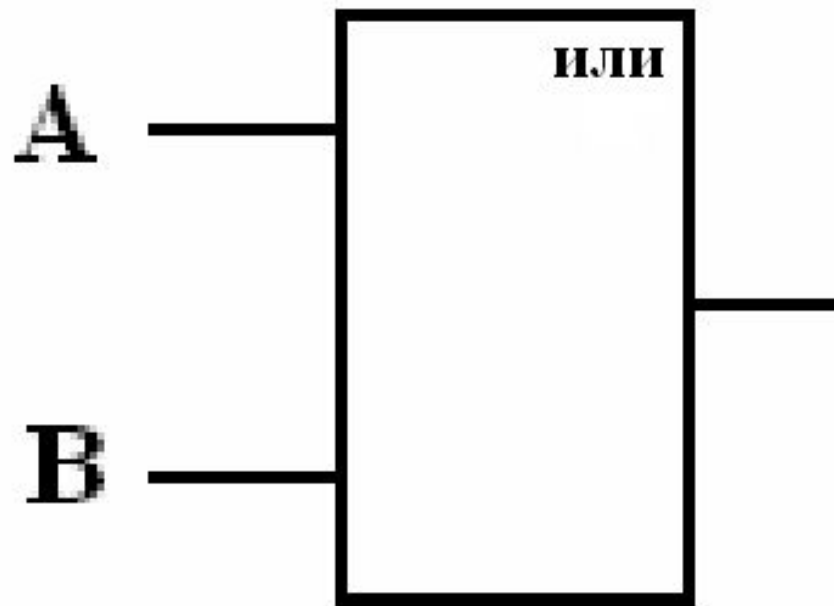
Логический элемент И

(конъюнктор):



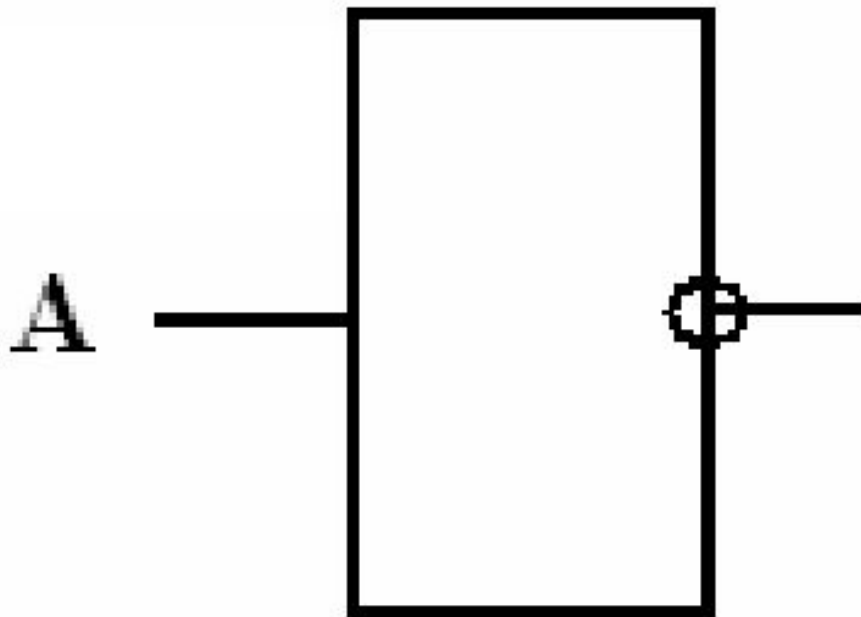
Логический элемент ИЛИ

(дизъюнктор):



Логический элемент НЕ

(инвертор):



Физически каждый логический элемент представляет собой электронную схему, в которой на вход подаются некоторые сигналы, кодирующие 0 либо 1, а с выхода снимается также сигнал, соответствующий 0 или 1 в зависимости от типа логического элемента.

Обработка любой информации на компьютере сводится к выполнению процессором различных арифметических и логических операций.

Для этого в состав процессора входит так называемое арифметико-логическое устройство.

Оно состоит из ряда устройств, построенных на рассмотренных выше логических элементах.

Важнейшими из таких устройств являются регистры и сумматоры.

Регистр представляет собой электронный узел, предназначенный для хранения многоразрядного двоичного числового кода.

Упрощенно можно представить регистр как совокупность ячеек, в каждой из которых может быть записано одно из двух значений: 0 или 1, то есть один разряд двоичного числа.

Такая ячейка, называемая **триггером**, представляет собой некоторую логическую схему, составленную из рассмотренных выше логических элементов.

Под воздействием сигналов, поступающих на вход триггера, он переходит в одно из двух возможных устойчивых состояний, при которых на выходе будет выдаваться сигнал, кодирующий значение 0 или 1.

Для хранения в регистре одного байта информации необходимо 8 триггеров.

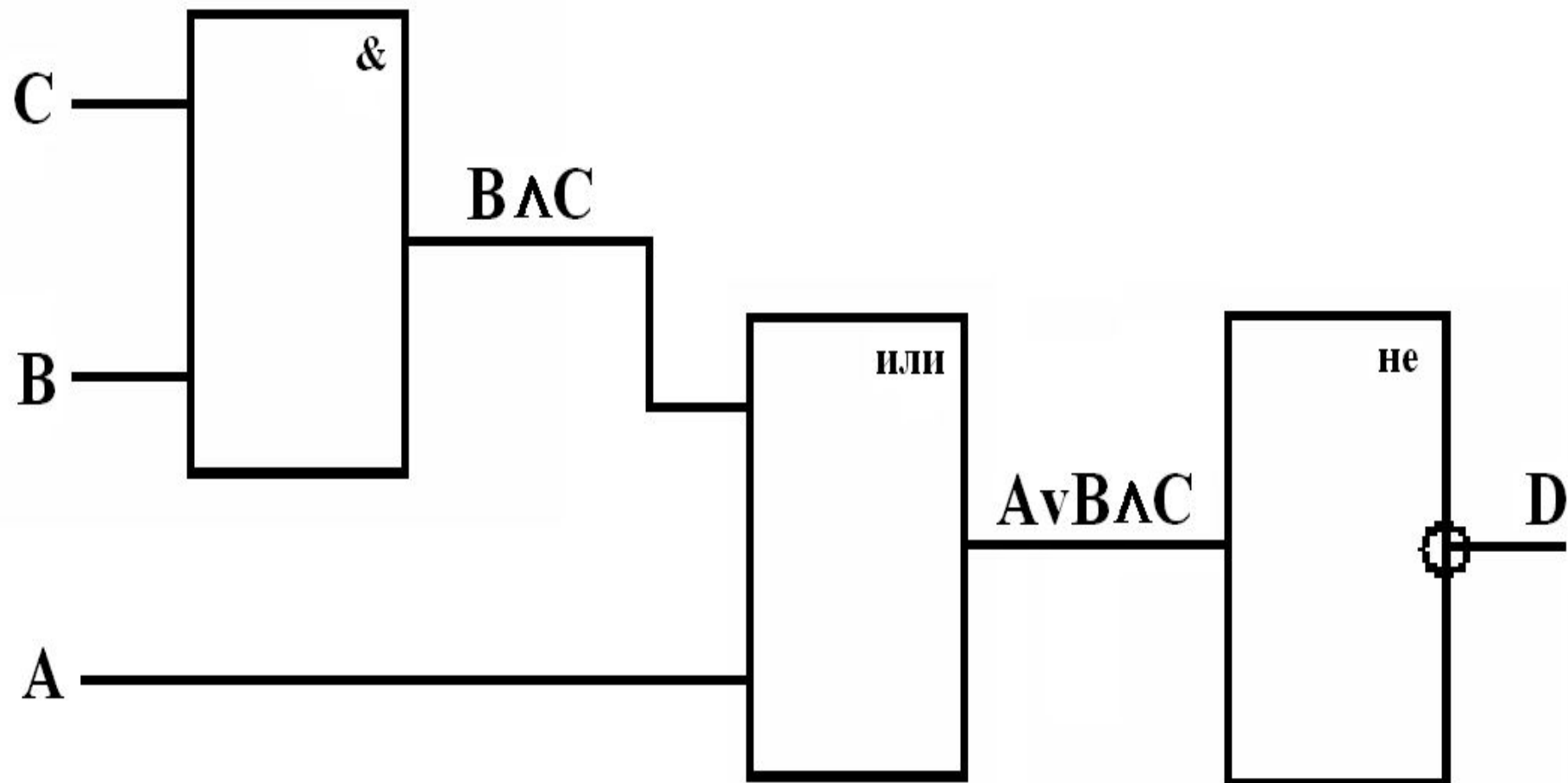
Сумматор — это электронная схема,
предназначенная для выполнения операции
суммирования двоичных числовых кодов.

Построим логическую схему для
логического выражения:

$$D = \overline{A \vee B \wedge C}$$

Для этого нам потребуется 3
логических элемента:

1. Логический элемент И
2. Логический элемент ИЛИ
3. Логический элемент НЕ



Задание №1

Построить логическую схему для логического выражения

$$E = \overline{A \vee B \wedge C \wedge D}$$

и выяснить, при каких входных сигналах на выходе схемы не будет напряжения?

Задание №2

Построить логическую схему для логического выражения:

$$E = \overline{A} \vee B \wedge \overline{C} \vee \overline{D}$$