



1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной

1.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

1.1.1. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Это уравнение часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.



1.1.1-1. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = Ax + B,$$

$$w(x, t) = A(x^2 + 2at) + B,$$

$$w(x, t) = A(x^3 + 6atx) + B,$$

$$w(x, t) = A(x^4 + 12atx^2 + 12a^2t^2) + B,$$

$$w(x, t) = A(x^5 + 20atx^3 + 60a^2t^2x) + B,$$

$$w(x, t) = A(x^6 + 30atx^4 + 180a^2t^2x^2 + 120a^3t^3) + B,$$

$$w(x, t) = x^{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{(2n)(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{k!} (at)^k x^{2n-2k},$$

$$w(x, t) = x^{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-2k+2)}{k!} (at)^k x^{2n-2k+1},$$

$$w(x, t) = A \exp(a\mu^2 t \pm \mu x) + B,$$

$$w(x, t) = A \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) + B,$$

$$w(x, t) = A \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) + B,$$



$$w(x, t) = A \exp(-a\mu^2 t) \cos(\mu x) + B,$$

$$w(x, t) = A \exp(-a\mu^2 t) \sin(\mu x) + B,$$

$$w(x, t) = A \exp(-\mu x) \cos(\mu x - 2a\mu^2 t) + B,$$

$$w(x, t) = A \exp(-\mu x) \sin(\mu x - 2a\mu^2 t) + B,$$

$$w(x, t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B,$$

$$w(x, t) = A \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + B,$$

$$w(x, t) = A \left[\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x}{2\sqrt{a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right] + B,$$

где n — целое положительное число, $\operatorname{erf} z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок), $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$ — дополнительный интеграл вероятностей.

Фундаментальное решение:

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

© Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).



ТАБЛИЦА 14

Преобразования вида $\xi = f(x, t)$, $w = g(\xi, t)u(\xi, t)$, допускающие решения уравнения $\partial_t w - \partial_{xx} w = 0$ с разделенными переменными для искомой функции $u(\xi, t) = \varphi(t)\psi(\xi)$.

№	Зависимость $\xi = f(x, t)$	Множитель $g = g(\xi, t)$	Функция $\varphi = \varphi(t)$, λ — любое	Уравнение для $\psi = \psi(\xi)$
1	$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$	$g = 1$	$\varphi = t^\lambda$	$\psi''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi\psi'_\xi - \lambda\psi = 0$
2	$\xi = x - \frac{1}{2}t^2$	$g = \exp(-\frac{1}{2}\xi t)$	$\varphi = \exp(-\frac{1}{12}t^3 + \lambda t)$	$\psi''_{\xi\xi} + (\frac{1}{2}\xi - \lambda)\psi = 0$
3	$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}}$	$g = \exp(-\frac{1}{4}\xi^2 t)$	$\varphi = \frac{\exp(\lambda \operatorname{arctg} t)}{(1+t^2)^{1/4}}$	$\psi''_{\xi\xi} + (\frac{1}{4}\xi^2 - \lambda)\psi = 0$



1.1.1-2. Формулы, позволяющие строить частные решения.

Пусть $w = w(x, t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x + C_1, \lambda^2 t + C_2),$$

$$w_2 = A \exp(\lambda x + a\lambda^2 t) w(x + 2a\lambda t + C_1, t + C_2),$$

$$w_3 = \frac{A}{\sqrt{|\delta + \beta t|}} \exp\left[-\frac{\beta x^2}{4a(\delta + \beta t)}\right] w\left(\pm \frac{x}{\delta + \beta t}, \frac{\gamma + \lambda t}{\delta + \beta t}\right), \quad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где $A, C_1, C_2, \beta, \delta, \lambda$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Последняя формула при $\beta = 1, \gamma = -1, \delta = \lambda = 0$ получена с помощью преобразования Аппеля.

⊙ Литература: У. Миллер (1981, стр. 133–134).

1.1.1-3. Частные решения в виде бесконечного ряда.

1°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x, t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} f_x^{(2n)}(x), \quad f_x^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} f(x),$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x, 0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом.



2°. Решения, содержащие произвольные функции времени:

$$w(x, t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n)!} x^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

$$w(x, t) = xh(t) + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n+1)!} x^{2n} h_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ и $h(t)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Суммы будут конечными, если $g(t)$ и $h(t)$ являются полиномами. Первое решение удовлетворяет граничному условию первого рода $w(0, t) = g(t)$, а второе — граничному условию второго рода $\partial_x w(0, t) = h(t)$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 59).

1.1.1-4. Преобразования, позволяющие разделить переменные.

В табл. 14 указаны преобразования, приводящие уравнение теплопроводности к уравнениям с разделяющимися переменными (тождественное преобразование с $\xi = x$, $g = 1$ опущено).

Замечание. Решение уравнения для функции ψ в первой строке табл. 14 в общем случае выражаются через вырожденные гипергеометрические функции. В частном случае $\lambda = \frac{1}{2}n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) имеются решения вида $\psi(\xi) = (i/2)^n H_n(i\xi/2)$, где $H_n(z)$ — многочлены Эрмита, $i^2 = -1$. Решение уравнения для функции ψ во второй строке табл. 14 выражается через функции Бесселя, а в третьей строке — через функции параболического цилиндра.

⊙ Литература: E. Kalnins, W. Miller (1974), У. Миллер (1981, стр. 132–146).



1.1.1-5. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right] f(\xi) d\xi.$$

Пример 1. Начальная температура в области $|x| < x_0$ постоянна и равна w_1 , а в области $|x| > x_0$ — соответственно w_2 , т. е.

$$f(x) = \begin{cases} w_1 & \text{при } |x| < x_0, \\ w_2 & \text{при } |x| > x_0. \end{cases}$$

Решение:

$$w = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right) \right] + w_2.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 61).

1.1.1-6. Область: $0 \leq x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) & \text{при} \quad t &= 0 & \text{(начальное условие),} \\ w &= g(t) & \text{при} \quad x &= 0 & \text{(граничное условие).} \end{aligned}$$



Решение:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} f(\xi) d\xi + \\ + \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Пример 2. Начальная температура линейно зависит от пространственной координаты, $f(x) = w_0 + bx$. Температура на границе равна нулю, $g(t) = 0$.

Решение:

$$w = w_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + bx.$$

Значению $b = 0$ соответствует случай одинаковой начальной температуры с $f(x) = w_0$.

Пример 3. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. Температура на границе линейно возрастает от времени, $g(t) = At$.

Решение:

$$w = At \left[\left(1 + \frac{x^2}{2at}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \frac{x}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \right].$$

☉ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 64–69), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).



1.1.1-7. Область: $0 \leq x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] \right\} f(\xi) d\xi - \\ &\quad - \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Пример 4. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. На границе в течение всего времени поддерживается постоянный тепловой поток, $g(t) = -Q$.

Решение:

$$w = 2Q \sqrt{\frac{at}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - Qx \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

● Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 79–81), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).



1.1.1-8. Область: $0 \leq x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w - kw &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - a \int_0^t g(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - 2k \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right] d\eta \right\}.$$

Несобственный интеграл можно вычислять по формуле

$$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right] d\eta = \sqrt{\pi at} \exp[ak^2 t + k(x+\xi)] \operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right).$$



Пример 5. Начальная температура одинакова, $f(x) = w_0$. Температура контактирующей среды равна нулю, $g(t) = 0$.

Решение:

$$w = w_0 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \exp(kx + ak^2t) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at} \right) \right].$$

☉ *Литература:* Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 78–79), Б. М. Будаг, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 60, 320), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

1.1.1-9. Область: $0 \leq x \leq l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) & \text{при } t = 0 & \quad (\text{начальное условие}), \\ w &= g_1(t) & \text{при } x = 0 & \quad (\text{граничное условие}), \\ w &= g_2(t) & \text{при } x = l & \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2} \right) M_n(t),$$

где

$$M_n(t) = \int_0^l f(\xi) \sin \left(\frac{n\pi \xi}{l} \right) d\xi + \frac{an\pi}{l} \int_0^t \exp \left(-\frac{an^2\pi^2 \tau}{l^2} \right) [g_1(\tau) - (-1)^n g_2(\tau)] d\tau.$$

Замечание. Используя соотношения для сумм бесконечных рядов [см. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1981, стр. 726)]:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\xi}{n} = \frac{\pi - \xi}{2} \quad (0 < \xi < 2\pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\xi}{n} = \frac{\xi}{2} \quad (-\pi < \xi < \pi),$$

можно преобразовать решение к следующему виду:

$$w(x, t) = g_1(t) + \frac{x}{l} [g_2(t) - g_1(t)] + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) \exp(-a\lambda_n^2 t) R_n(t), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l},$$

где

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \int_0^l f(\xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi - \frac{1}{\lambda_n} \exp(a\lambda_n^2 t) [g_1(t) - (-1)^n g_2(t)] + \\ &+ a\lambda_n \int_0^t \exp(a\lambda_n^2 \tau) [g_1(\tau) - (-1)^n g_2(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^l f(\xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi - \frac{1}{\lambda_n} [g_1(0) - (-1)^n g_2(0)] - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \exp(a\lambda_n^2 \tau) [g_1'(\tau) - (-1)^n g_2'(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Отметим, что в разд. 1.1.2-5 указано также другое представление решения.



Пример 6. Начальная температура одинакова, $f(x) = w_0$. На обеих границах поддерживается нулевая температура, $g_1(t) = g_2(t) = 0$.

Решение:

$$w = \frac{4w_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi x}{l} \right] \exp \left[-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{l^2} \right].$$

Пример 7. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. На границах поддерживаются постоянные температуры: $g_1(t) = w_1$, $g_2(t) = w_2$.

Решение:

$$w = w_1 + (w_2 - w_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w_2 - w_1}{n} \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{an^2 \pi^2 t}{l^2} \right).$$

© Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 98, 101, 106), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 32).



1.1.1-10. Область: $0 \leq x \leq l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - a \int_0^t g_1(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) G(x, l, t - \tau) d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 353), Б. М. Будаг, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 329), А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).



1.1.1-11. Область: $0 \leq x \leq l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0, k_2 > 0$).

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - a \int_0^t g_1(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) G(x, l, t - \tau) d\tau.$$

Здесь

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a \mu_n^2 t),$$

где

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n} \sin(\mu_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2} \frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2} \left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2} \right);$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 120), А. Г. Бутковский (1979, стр. 53).



1.1.1-12. Область: $0 \leq x \leq l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}).\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + a \int_0^t g_1(\tau) \Lambda(x, t - \tau) d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) G(x, l, t - \tau) d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l} \right] \sin \left[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l} \right] \exp \left[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l^2} \right],$$

$$\Lambda(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t) \Big|_{\xi=0}.$$



2°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}).\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - a \int_0^t g_1(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) H(x, t - \tau) d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right] \cos\left[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}\right] \exp\left[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l^2}\right],$$

$$H(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t) \Big|_{\xi=l}.$$

Отметим, что в разд. 1.1.2-8 указаны также другие формы представления решения смешанных краевых задач.



Пример 8. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. Левая граница теплоизолирована, на правой границе температура постоянна: $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = A$.

Решение:

$$w = A + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cos\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right] \exp\left[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l^2}\right].$$

● Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 330), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 106, 249).

1.1.1-13. Задачи без начальных условий.

В приложениях встречаются задачи, когда рассматриваемый процесс изучается в моменты времени достаточно удаленные от начального, при этом влияние начальных условий практически не сказывается на распределении искомой величины в момент наблюдения. В таких задачах начальное условие не формулируется, а граничные условия считаются заданными для всех моментов времени $-\infty < t$. Дополнительным требованием является ограниченность решения во всей области.



Рассмотрим в качестве примера первую краевую задачу для полупространства $0 \leq x < \infty$ с граничным условием

$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение:

$$w(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^t \frac{g(\tau)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t - \tau)}\right] d\tau.$$

Пример 9. Температура на границе является гармонической функцией времени, т. е.

$$g(t) = w_0 \cos(\omega t + \beta).$$

Решение:

$$w = w_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right) \cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x + \omega t + \beta\right).$$

© Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 203), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 243–245).



1.1.1-14. Сопряженные задачи теплопроводности.

В таких задачах рассматриваются две (или более) области V_1 и V_2 с общей границей S , заполненные разными средами. Каждая среда характеризуется своими коэффициентами теплопроводности λ_1, λ_2 и температуропроводности a_1, a_2 и описывается соответствующими (различными) уравнениями тепло- и массопереноса. Граничные условия теплового равновесия выражают равенство температур и равенство тепловых потоков на границе раздела фаз. Ниже рассмотрен типичный пример сопряженной задачи (более детальный анализ таких задач выходит за рамки данного справочника).

Рассматриваются два полуограниченных твердых тела (две полуограниченные неподвижные среды), распределения температур в которых $w_1 = w_1(x, t)$, $w_2 = w_2(x, t)$ описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} && (\text{в области } 0 \leq x < \infty), \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} && (\text{в области } -\infty < x \leq 0).\end{aligned}$$

В каждом из тел задано свое распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на общей границе $x = 0$ заданы сопряженные граничные условия:



$$\begin{aligned}w_1 &= f_1(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие),}\\w_2 &= f_2(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие),}\\w_1 &= w_2 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие),}\\\lambda_1 \partial_x w_1 &= \lambda_2 \partial_x w_2 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие).}\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}w_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a_1 t}} \int_0^\infty f_1(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1 t}\right] \right\} d\xi - \\&\quad - \sqrt{\frac{a_1}{\pi \lambda_1^2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a_1(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \\w_2(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a_2 t}} \int_0^\infty f_2(-\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2 t}\right] \right\} d\xi + \\&\quad + \sqrt{\frac{a_2}{\pi \lambda_2^2}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.\end{aligned}$$



Здесь функция $g(t)$ определяется по формуле

$$g(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\pi(\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}},$$

где

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int_0^\infty f_1(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_1 t}\right) d\xi - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^\infty f_2(-\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_2 t}\right) d\xi.$$

Пример 10. Начальные температуры тел постоянны: $f_1(x) = A$, $f_2(x) = B$.

Решение:

$$\frac{w_1(x, t) - B}{A - B} = \frac{K}{1 + K} \left[1 + \frac{1}{K} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) \right],$$
$$\frac{w_2(x, t) - B}{A - B} = \frac{K}{1 + K} \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_1 t}}\right),$$

где $K = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$ — величина, характеризующая тепловую активность первой среды по отношению ко второй.

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 91–92, 314–320), А. В. Лыков (1967, стр. 365).



1.1.2. Уравнение вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x, t)$

Уравнение этого вида описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии объемного тепловыделения, когда источниковый член зависит от пространственной координаты и времени.

1.1.2-1. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right].$$

⊙ Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 49).



1.1.2-2. Область: $0 \leq x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t g(\tau) H(x, t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x + \xi)^2}{4at}\right] \right\}, \quad H(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 65–68), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).



1.1.2-3. Область: $0 \leq x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - a \int_0^t g(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x + \xi)^2}{4at}\right] \right\}, \quad G(x, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 79–81), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).



1.1.2-4. Область: $0 \leq x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w - kw &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - a \int_0^t g(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x + \xi)^2}{4at}\right] - 2k \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x + \xi + \eta)^2}{4at} - k\eta\right] d\eta \right\}.$$

© Литература: Б. М. Будаг, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 60, 320), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).



1.1.2-5. Область: $0 \leq x \leq l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}),$$

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}),$$

$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}).$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau + \\ & + a \int_0^t g_1(\tau) H_1(x, t - \tau) d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) H_2(x, t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) = & \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) = \\ = & \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \xi + 2nl)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x + \xi + 2nl)^2}{4at}\right] \right\}. \end{aligned}$$



Первый ряд сходится быстро при больших t , а второй — при малых t . Функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам

$$H_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t) \Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t) \Big|_{\xi=l}.$$

⊙ Литература: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 268), Б. М. Будаг, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 64, 326), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

1.1.2-6. Область: $0 \leq x \leq l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие),} \\ \partial_x w &= g_1(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие),} \\ \partial_x w &= g_2(t) && \text{при } x = l && \text{(граничное условие).} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau - \\ &- a \int_0^t g_1(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) G(x, l, t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$



Две формы представления для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) &= \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \xi + 2nl)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x + \xi + 2nl)^2}{4at}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t , а второй — при малых t .

⊙ *Литература:* Б. М. Буда́к, А. А. Самарский, А. Н. Тихо́нов (1972, стр. 65, 329), А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

1.1.2-7. Область: $0 \leq x \leq l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 1.1.1-11 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

⊙ *Литература:* Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 120), А. Г. Бутковский (1979, стр. 53).



1.1.2-8. Область: $0 \leq x \leq l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}).\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}w(x, t) &= \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau + \\&+ a \int_0^t g_1(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t - \tau) \right]_{\xi=0} d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) G(x, l, t - \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$\begin{aligned}G(x, \xi, t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l} \right] \sin \left[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l} \right] \exp \left[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l^2} \right] = \\&= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{ \exp \left[-\frac{(x - \xi + 2nl)^2}{4at} \right] - \exp \left[-\frac{(x + \xi + 2nl)^2}{4at} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Первый ряд быстро сходится при больших t , а второй — при малых t .



2°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}).\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}w(x, t) &= \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau - \\ &- a \int_0^t g_1(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t - \tau) \right]_{\xi=l} d\tau.\end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$\begin{aligned}G(x, \xi, t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l} \right] \cos \left[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l} \right] \exp \left[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{ \exp \left[-\frac{(x - \xi + 2nl)^2}{4at} \right] + \exp \left[-\frac{(x + \xi + 2nl)^2}{4at} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t , а второй — при малых t .

⊙ Литература: Б. М. Будаков, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 330), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 106, 249).



THE END

**БЛАГОДАРИЮ
ЗА
ВНИМАНИЕ**

