Функции многих переменных

Понятие n-мерного арифметического евклидова пространства

О. Множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из n действительных чисел называется *n-мерным пространством*, при этом каждая совокупность $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *точкой n-мерного пространства*, которая обозначается $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами точки M*.

О. *N-мерным евклидовым пространством* называется такое n-мерное пространство, в котором для любых двух его точек $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, $M''(x''_1, x''_2, ..., x''_n)$ введено расстояние по формуле

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + ... + (x'_n - x''_n)^2}.$$

Обозначение: R^n или E^n.

Частные случаи пространства R^n.

Если $n=1$, то R^1 – множество точек $M(x)$ – множество точек числовой прямой.

Если $n=2$, то R^2 – множество точек $M(x, y)$ – вся координатная плоскость.

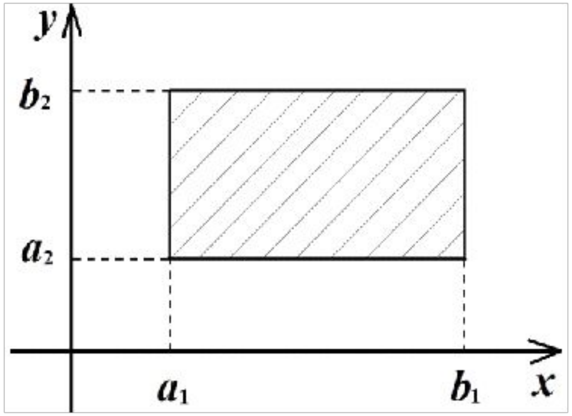
Если $n=3$, то R^3 – множество точек $M(x, y, z)$ – всё координатное пространство.

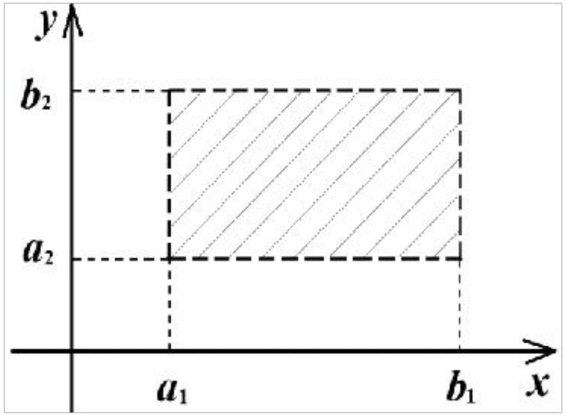
Некоторые множества в пространстве R^n

О. Множество всех точек $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, таких, что их координаты удовлетворяют неравенствам: $a_i \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1,n}$, где a_i, b_i – заданные числа, называется *n-мерным замкнутым параллелепипедом*. Обозначение: $[a_1, b_1; a_2, b_2; \ ...; a_n, b_n]$.

Если же выполняются неравенства $a_i < x_i < b_i$, $i = \overline{1,n}$, то множество всех таких точек называется *n-мерным открытым параллелепипедом*. Обозначение: $(a_1, b_1; a_2, b_2; \ ...; a_n, b_n)$.

Если $n = 2$, то в пространстве R^2 *n*-мерный параллелепипед становится *прямоугольником:* замкнутым или открытым.





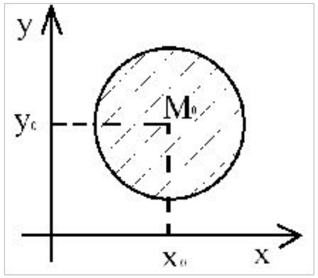
Определение. *n-мерным замкнутым шаром* с центром в точке M_0 радиуса r называется множество всех таких точек $M \in R^n$, для которых $\rho(M, M_0) \le r$.

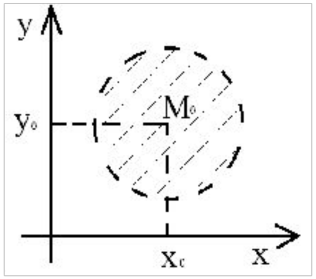
N-мерный открытый шар – это множество точек $M \in R^n$, для которых $\rho(M, M_0) < r$.

В пространстве R^2, то есть на координатной плоскости, расстояние между точками $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ определяется формулой

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Следовательно, неравенство $\rho(M, M_0) \le r$ после возведения в квадрат дает $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$. Это – *замкнутый круг* с центром в точке M_0 радиуса r. В случае, когда $\rho(M, M_0) < r$, на плоскости получаем *открытый круг*.





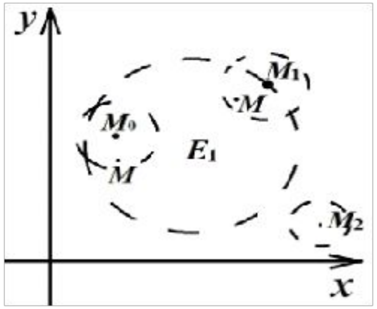
О. *Окрестностью точки* M_0 называется всякий n-мерный открытый шар с центром в точке M_0 (в пространстве R^2– открытый круг). Если радиус окрестности обозначить δ, то окрестность обозначается так: $U(M_0,\delta)$. Если из окрестности точки M_0 удалить саму точку M_0, то полученное множество называется проколотой окрестностью точки M_0: $\overset{\circ}{U}(M_0,\delta)$.

В теории ФМП наряду с круговыми окрестностями рассматривают и прямоугольные окрестности точки M_0, это открытый прямоугольник с центром в точке M_0.

Некоторые теоретико-множественные понятия

О. Точка M_0 называется *предельной точкой множества* E, если в любой окрестности этой точки существует хотя бы одна точка M из множества E, отличная от точки M_0.

Пример 1. Пусть E_1 – открытый круг



1. $M_0 \in E_1$. Точка M_0 является предельной точкой для E_1.

2. $M_1 \notin E_1$, но M_1 лежит на окружности. Тогда т. M_1 является предельной точкой для E_1.

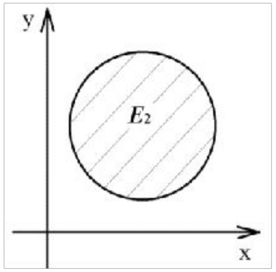
3. $M_2 \notin E_1$ и не лежит на окружности. Тогда т. M_2 не является предельной точкой для E_1, так как найдется окрестность этой точки, в которой вообще нет точек множества E_1.

Замечание. Предельная точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству.

О. *Множество Е* называется *замкнутым*, если оно содержит в себе все свои предельные точки.

В примере 1 множество E_1 не является замкнутым, так как не содержит предельные точки, лежащие на окружности.

Пример 2. Пусть E_2 – замкнутый круг.



Предельными точками для множества E_2 будут те же, что и в примере 1. При этом все предельные точки содержатся в E_2. Следовательно, E_2 – замкнутое множество.

О. Точка M_0 называется *внутренней точкой множества* E, если существует хотя бы одна окрестность точки M_0, целиком принадлежащая множеству E, то есть внутренняя точка M_0 содержится во множестве E вместе с некоторой своей окрестностью.

В примере 1 каждая точка множества E_1 является внутренней. В примере 2 точки, лежащие на окружности, не являются внутренними, т.к. нельзя указать окрестность точки, целиком принадлежащую E_2.

О. *Множество* E называется *открытым*, если любая точка этого множества является внутренней.

E_1 - открытое множество, E_2 не является открытым.

О. *Точка* M_0 называется *граничной точкой для множества* E, если в любой её окрестности содержатся как точки, принадлежащие множеству E, так и точки, множеству E не принадлежащие.

В примерах 1 и 2 любая из точек, лежащих на окружности, является граничной.

О. *Границей множества* E называется множество всех его граничных точек.

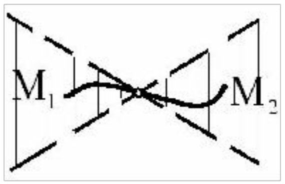
Для множеств E_1 и E_2 границей служит окружность. **Но** граница множеству E_1 не принадлежит, а множеству E_2 принадлежит.

Определение кривой по Жордану. *Кривой Жордана в пространстве* R^n называется множество всех таких точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, координаты которых определяются параметрическими уравнениями $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases}$ где $\varphi_1(t)$, …, $\varphi_n(t)$ – непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$, причём различным значениям t из отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки M. Если при этом значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$ соответствует одна и та же точка M, то кривая называется *замкнутой*.

О. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

О. *Областью* называется всякое <u>открытое</u> множество, любые две точки которого можно соединить кривой, целиком принадлежащей этому множеству (т.е. область – это открытое связное множество).

Пусть E_3 – множество, состоящее из точек двух вертикальных углов, исключая прямые, образующие эти углы



Очевидно, что любая точка этого множества является внутренней, так как входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью, поэтому E_3 – открытое множество. Но не любую пару точек можно соединить кривой, целиком принадлежащей этому множеству. Следовательно, множество E_3 не является областью.

О.Замкнутой *областью* называется множество, полученное путём объединения области с её границей.

Понятие функции многих переменных

Пусть D – некоторое подмножество n-мерного евклидова пространства R^n.

О. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие единственное действительное число u, то такое соответствие называется *функцией n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а само множество D называется *областью определения функции*. Обозначение функции: [illegible], [illegible], [illegible], [illegible]. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *независимые переменные* или *аргументы функции*. Принято писать $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $u = f(M)$, при этом символ $f(M)$ называется *значением функции* f *в точке* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

О. Если каждой паре значений переменных x и y соответствует по некоторому закону определенное единственное значение переменной z, то переменная z называется *функцией двух независимых переменных* x и y.

О. Множество всех тех и только тех пар действительных чисел (x, y), для которых в области действительных чисел определено соответствующее значение функции z, называется *областью существования функции* $z = f(x, y)$.

Областью существования функции двух переменных может быть вся плоскость или часть плоскости.

Замечание 1. Множество точек плоскости, заданное неравенством

1) $y > f(x)$, лежит выше кривой $y = f(x)$ (рис 1);

2) $y < f(x)$, лежит ниже кривой $y = f(x)$ (рис. 1);

3) $x > \varphi(y)$, лежит правее кривой $x = \varphi(y)$ (рис. 2);

4) $x < \varphi(y)$, лежит левее кривой $x = \varphi(y)$ (рис. 2).

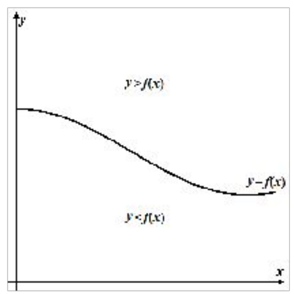


Рисунок 1

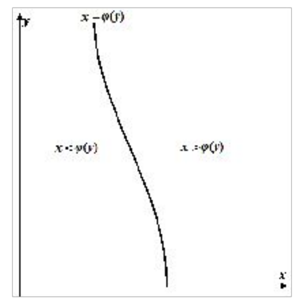


Рисунок 2

Замечание 2. Область существования функции не всегда является областью в смысле определения.

Понятие предела функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

О. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек (x, y) таких, что $\begin{cases} |x - x_0| < \delta, \\ |y - y_0| < \delta \end{cases}$ и $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} C = C$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left(x^n y^m\right) = x_0^{\,n} y_0^{\,m}$, $n, m \in N$.

3. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} P(x, y) = P(x_0, y_0)$, где $P(x, y)$ – целая рациональная функция двух переменных.

4. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \dfrac{P(x_0, y_0)}{Q(x_0, y_0)}$, при условии, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} Q(x, y) \neq 0$.

О. Функция $f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0,y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

О. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0, y_0), если бесконечно малым приращениям аргументов Δx, Δy в точке (x_0, y_0) соответствует бесконечно малое приращение функции Δz.

О. Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

О. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой разрыва функции* $f(x, y)$, если в этой точке функция не является непрерывной. Функция двух переменных может иметь *линию разрыва*.

Свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве и в области

Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или $u = f(M)$

Теорема **1.** Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве E, то она ограничена на этом множестве.

***Теорема* 2 *(теорема Вейерштрасса)*.** Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она имеет на этом множестве наибольшее и наименьшее значения.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется *равномерно непрерывной на множестве E*, если для любого положительного числа ε существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек M_1 и M_2 из множества E, таких что $\rho(M_1, M_2) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$

***Теорема* 3.** Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она равномерно непрерывна на этом множестве.

Следующие теоремы формулируются не для замкнутых множеств, а для области.

***Теорема* 4 *(об обращении в нуль)*.** Если функция $u = f(M)$ непрерывна в области D, причем в двух точках этой области принимает значения разных знаков, то в области D существует хотя бы одна точка M_0, в которой $f(M_0) = 0$.

***Теорема* 5 *(о промежуточном значении)*.** Если функция $u = f(M)$ непрерывна в области D и в двух точках M_1 и M_2 этой области принимает значения $f(M_1) = A$, $f(M_2) = B$, где $A \neq B$, то каково бы ни было число C, такое, что $A < C < B$, найдётся в области D точка M_0, такая, что $f(M_0) = C$.

Частные производные функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Если зафиксировать переменную y: $y = y_0$, то получим функцию $z = f(x, y_0)$ – функцию одной переменной x. Δx – приращение точки x_0 такое, что точка $(x_0 + \Delta x, y_0)$ не выходит за пределы окрестности точки M_0. $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ - *частное приращение функции $f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.*

Аналогично, фиксируя первую переменную x_0 и придавая точке y_0 приращение Δy, получаем *частное приращение функции $f(x, y)$ по переменной y в точке* $M_0(x_0, y_0)$: $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

О. *Частной производной по переменной x для функции $z = f(x, y)$ в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения функции по переменной *x* в точке $M_0(x_0, y_0)$ к приращению соответствующего аргумента в точке $M_0(x_0, y_0)$ при $\Delta x \to 0$, при условии, что этот предел существует и конечен.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

О. *Частной производной по переменной y для функции $z = f(x, y)$ в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения функции по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$ к приращению соответствующего аргумента в точке $M_0(x_0, y_0)$ при $\Delta y \to 0$, при условии, что этот предел существует и конечен.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $f'_y(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, $f'_y(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Правило нахождения частной производной

1. Чтобы найти *частную производную по x функции* $z = f(x, y)$, надо считать y постоянной и применять формулы и правила нахождения производной от функции одной переменной x.

2. Чтобы найти *частную производную по* y *функции* $z = f(x, y)$, надо считать x постоянной и применять формулы и правила нахождения производной от функции одной переменной y.

Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Теорема Римана. Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные смешанные частные производные 2-го порядка в области D, то они равны между собой: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференцируемость функции

О. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется приращение функции, отвечающее произвольным приращениям обеих переменных: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, при этом Δx и Δy не должны одновременно обращаться в ноль.

О. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, где $A, B = \mathrm{const}$, α, β зависят от Δx и Δy, причем α, β являются бесконечно малыми функциями при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Теорема (о связи дифференцируемости с непрерывностью). Если функция дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в этой точке.

Необходимое условие дифференцируемости функции. Если функция дифференцируема в точке M_0, то она имеет в этой точке частные производные.

Достаточное условие дифференцируемости. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в окрестности точки M_0 частные производные, непрерывные в этой точке, то функция дифференцируема в точке M_0.

Сложная функция двух переменных

Пусть функция [illegible] = [illegible] определена в области [illegible], при этом [illegible] и [illegible] являются функциями одной переменной [illegible] [illegible] = [illegible]([illegible]), [illegible] = [illegible]([illegible]), определёнными на отрезке [[illegible], [illegible]]. Тогда функция [illegible] = [illegible]([illegible]), [illegible]([illegible])[illegible] называется *сложной функцией двух промежуточных переменных* [illegible], [illegible] *и одной независимой переменной* [illegible]

Пусть для функции [illegible] = [illegible] [illegible] = [illegible]([illegible], [illegible]), [illegible] = [illegible]([illegible], [illegible]). Тогда функция [illegible] = [illegible]([illegible], [illegible]), [illegible]([illegible], [illegible])[illegible] называется *сложной функцией двух промежуточных переменных* [illegible], [illegible] *и двух независимых переменных* [illegible], [illegible].

Производная сложной функции

***Теорема* 1**. Если функция [illegible] = [illegible] имеет непрерывные частные производные в области [illegible], функции [illegible] = [illegible]([illegible]), [illegible] = [illegible]([illegible]) дифференцируемы в интервале ([illegible], [illegible]) и отображают интервал ([illegible], [illegible]) в область [illegible], то сложная функция [illegible] = [illegible] имеет в интервале ([illegible], [illegible]) производную по переменной [illegible] и она имеет вид:

[illegible]

***Теорема* 2**. Если функция [illegible] = [illegible] имеет непрерывные частные производные в области [illegible], функции [illegible] = [illegible]([illegible], [illegible]), [illegible] = [illegible]([illegible], [illegible]) дифференцируемы в области [illegible] и отображают область [illegible] в область [illegible], то сложная функция [illegible] = [illegible]([illegible], [illegible]), [illegible]([illegible], [illegible]) имеет в области [illegible] частные производные по [illegible] и по [illegible], которые вычисляются по формулам:

[illegible], [illegible].

Дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Значит, ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где α, β – бесконечно малые функции при Δx, $\Delta y \to 0$.

О. *Полным дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется линейная часть полного приращения и обозначается

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

О. *Дифференциалами независимых переменных* называются приращения этих переменных, то есть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в любой точке $M(x, y)$ области D, то: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

Применение дифференциала к приближённым вычислениям

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

О. *Дифференциалом второго порядка* называется дифференциал от дифференциала, то есть $d^2 z = d(dz)$

Дифференциал n-го порядка: $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Теорема (об инвариантности формы дифференциала). Если $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – дифференцируемые функции, то дифференциал сложной функции имеет вид: $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$, то есть *сохраняет свою форму*.

Дифференциал второго порядка сложной функции не обладает свойством инвариантности.

Неявная функция одной переменной

О. Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ (1) определяет y как неявную функцию от x на множестве X, если существует функция $y = f(x)$, определённая на этом множестве и обращающая уравнение (1) в тождество на множестве X, то есть $F(x, f(x)) \equiv 0$ для любого $x \in X$.

Теорема существования неявной функции одной переменной. Если левая часть уравнения (1) обладает свойствами:

1) $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ непрерывны в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$,

2) $F(x_0, y_0) = 0$,

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

то уравнение (1) определяет неявную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0, обладающую свойствами:

1) функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0,

2) $y_0 = f(x_0)$,

3) функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную в окрестности точки x_0, которая имеет вид: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$.

Неявная функция двух переменных

О. Говорят, что *уравнение* $F(x,\ y,\ z) = 0$ (1) *определяет z как неявную функцию двух переменных x, y на множестве D*, $D \subset R^2$, если существует функция $z = f(x,\ y)$ с областью определения *D*, обращающая уравнение (1) в тождество на этом множестве, то есть $F(x,\ y,\ f(x,\ y)) \equiv 0$ для любой точки $(x,\ y) \in D$.

Теорема существования неявной функции двух переменных.

Если левая часть уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(x,\ y,\ z)$, $F'_x(x,\ y,\ z)$, $F'_y(x,\ y,\ z)$, $F'_z(x,\ y,\ z)$ непрерывны в окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$,

2) $F(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0$,

3) $F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0) \neq 0$,

то уравнение (1) определяет неявную функцию $z = f(x,y)$ в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, причём эта функция обладает свойствами:

1) функция $z = f(x,\ y)$ непрерывна в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$,

2) $z_0 = f(x_0,\ y_0)$,

3) функция имеет непрерывные частные производные, которые имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,\ y,\ z)}{F'_z(x,\ y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,\ y,\ z)}{F'_z(x,\ y,z)}$$

Экстремумы функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в области D и точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка этой области.

О. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума функции* $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, такая, что для любой точки $M(x, y)$ из этой окрестности, причём $M \neq M_0$, выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$.

О. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой минимума функции* $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, такая, что для любой точки $M(x, y)$ из этой окрестности, причём $M \neq M_0$, выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$.

О. Точка M_0 называется *критической точкой*, если в этой точке частные производные либо равны нулю, либо не существуют.

Теорема (необходимое условие существования экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то они равны нулю.

***Замечание* 1**. Если в некоторой точке частные производные первого порядка одновременно равны нулю, то это не значит, что в данной точке есть экстремум.

***Замечание* 2**. Может оказаться, что частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в некоторой точке не существуют, и в этой точке есть экстремум.

Обобщённая формулировка необходимого условия существования экстремума. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то в этой точке частные производные по всем переменным либо обращаются в ноль, либо не существуют.

Достаточное условие существования экстремума. Если в окрестности точки M_0 для функции $z = f(x, y)$ существуют непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядка, при этом в точке M_0 частные производные функции $z = f(x, y)$ по всем переменным обращаются в ноль, то если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$, то в точке M_0 есть экстремум, причём максимум, если $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} < 0$, минимум, если $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} > 0$. Если $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D. Тогда по теореме Вейерштрасса эта функция имеет в области D наибольшее и наименьшее значения. Отсюда следует, что точка M_0, в которой функция достигает наибольшего значения, может лежать и внутри области, и на её границе. Если точка M_0 окажется внутренней точкой области D, то в точке M_0 частные производные либо равны нулю, либо не существуют вовсе, то есть точка M_0 будет критической точкой. Аналогично обстоит дело с наименьшим значением, которое достигается либо внутри области D, либо на её границе.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в непрерывной замкнутой области D

1. Убедиться, что D – замкнутая ограниченная область, а функция $z = f(x, y)$ непрерывна области D.

2. Найти критические точки, лежащие <u>внутри</u> области D. Для этого найти частные производные и найти точки, в которых они либо одновременно равны нулю, либо одновременно не существуют.

3. Найти значение функции $z = f(x, y)$ в этих критических точках.

4. Найти значения функции $z = f(x, y)$ на границе области. На границе области функция двух переменных превращается в функцию одного переменного. Найти для этой функции одного переменного наибольшее и наименьшее значения. Множеством, на котором ищется наибольшее и наименьшее значения, будет отрезок.

5. Из всех значений, найденных в пунктах 3 и 4, выбрать наибольшее и наименьшее значения.