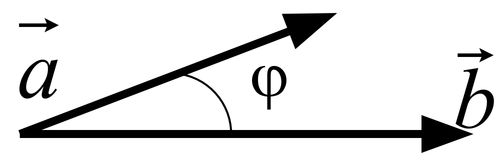
Векторная алгебра

Часть 2

Скалярное произведение

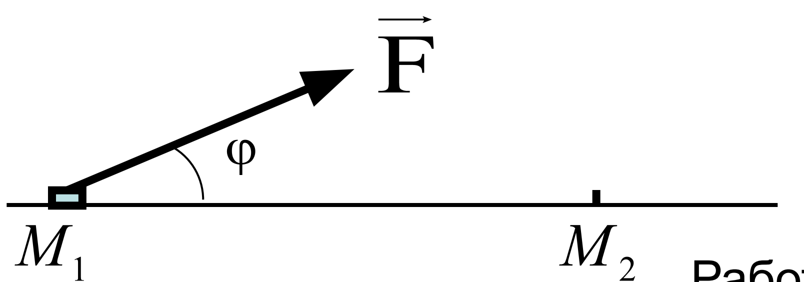
- **Определение.**
- **Скалярным произведением двух векторов**
- называется число, равное произведению модулей векторов
- на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi}$$



Обозначения : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})$

- **Физический смысл.**



Пусть материальная точка под действием силы $\vec{F}$ перемещается из положения M_1 в положение M_2

$$\boxed{A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}}$$

Работа силы по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

- **Свойства скалярного произведения.**
- **1.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - переместительный закон
- **2.** $(\overrightarrow{\lambda a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ - сочетательный закон
- **3.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot Пр_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot Пр_{\vec{b}} \vec{a}$

Доказательство свойства № 3.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|\,Пр_{\vec{a}}\vec{b},$$

так как по третьему свойству проекций $Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi.$

Аналогично можно записать $\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}\vec{a}.$

Следствие

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \qquad Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

4. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ - распределительный закон

- Доказательство свойства № 4.

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\text{Пр.}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,(\text{Пр.}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{Пр.}_{\vec{c}}\vec{b})=$$

$$=|\vec{c}|\,\text{Пр.}_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\,\text{Пр.}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Свойства скалярного произведения (продолжение)

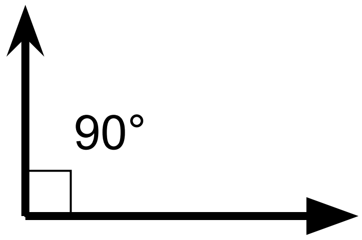
- **5.** $$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$
- **6.** $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, так как $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$. $\left(|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}\right)$.
- Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.
- **7. Условие перпендикулярности векторов.**
- Для того, чтобы два ненулевых вектора были
- перпендикулярны необходимо и достаточно,
- чтобы скалярное произведение этих векторов
- равнялось нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

?

Определение

перпендикулярных векторов:



Доказательство.

Необходимость: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$, т.к. $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, то $\cos\varphi = 0$, $\varphi =$, значит $\varphi = 90^{\circ}$.

Достаточность: если $\varphi = 90^{\circ}$, то $\cos\varphi = 0$, и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример.

Найти модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\varphi = 60^o$.

Решение.

Находим скалярный квадрат вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c}^{\,2} = (2\vec{a} + 3\vec{b})^2 = 4\vec{a}^{\,2} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^{\,2} =$$

$$= 4|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^o + 9|\vec{b}|^2 =$$

$$= 4 \cdot 16 + 12 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 25 = 409,$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{409}.$$

Скалярное произведение ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Так как орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j} = 0}$$

аналогично,

$$\boxed{\vec{i} \cdot \vec{k} = 0}$$

$$\boxed{\vec{j} \cdot \vec{k} = 0}$$

Скалярные квадраты ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\boxed{\vec{i}^{\,2} = 1, \quad \vec{j}^{\,2} = 1, \quad \vec{k}^{\,2} = 1}$$

Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме.

- Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ u $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
- Тогда $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$

?

- Скалярное произведение векторов равно
- сумме произведений соответствующих координат.

Доказательство.

Дано: $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ или $\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$.

Вычислим их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Воспользуемся распределительным и сочетательным свойствами скалярного произведения (свойством 4 и свойством 2) и получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1X_2\vec{i} \cdot \vec{i} + \cancel{Y_1X_2\vec{j} \cdot \vec{i}} + \cancel{Z_1X_2\vec{k} \cdot \vec{i}} +$$

$$+ \cancel{X_1Y_2\vec{i} \cdot \vec{j}} + Y_1Y_2\vec{j} \cdot \vec{j} + \cancel{Z_1Y_2\vec{k} \cdot \vec{j}} +$$

$$+ \cancel{X_1Z_2\vec{i} \cdot \vec{k}} + \cancel{Y_1Z_2\vec{j} \cdot \vec{k}} + Z_1Z_2\vec{k} \cdot \vec{k}.$$

Встречающиеся здесь скалярные квадраты базисных векторов равны единице, т.к. $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1,\ \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1,\ \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1.$

Все остальные скалярные произведения базисных векторов равны нулю, т.к. являются скалярными произведениями перпендикулярных векторов (свойство 7).

Окончательно получается

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

Можно формулировать следующее правило.

Если векторы заданы своими прямоугольными координатами, то скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}$$

В частности, $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$, а т.к. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$

Правило вычисления длины вектора.

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов координат этого вектора:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}$$

Условие перпендикулярности векторов в координатной форме :

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0}$$

Пример.

$$\vec{a} = \{-1;2;5\},\ \vec{b} = \{2;3;4\}.\ \text{Тогда}\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5\cdot 4 = 24.$$

Задачи

818. При каком значении α векторы $\bar{a}(\alpha;\ -3;2)$ и $\bar{b}(1;\ 2;\ -\alpha)$ перпендикулярны?

Решение.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \alpha - 6 - 2\alpha = -6 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -6$$

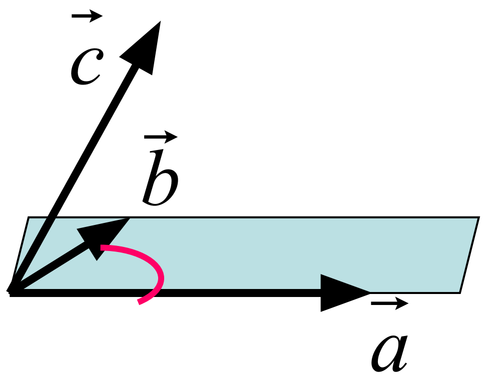
818. При каком значении α векторы $\bar{a}(\alpha;\ -3;2)$ и $\bar{b}(1;\ 2;\ -\alpha)$ перпендикулярны?

Решение.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \alpha - 6 - 2\alpha = -6 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -6$$

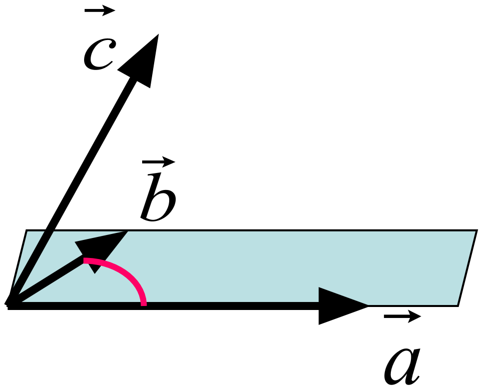
Правые и левые тройки векторов.

Упорядоченной тройкой векторов называются три вектора, одновременно с заданием которых указано, какой из них является первым, какой вторым и какой третьим.



Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **правой**, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден совершающимся **против** часовой стрелки.

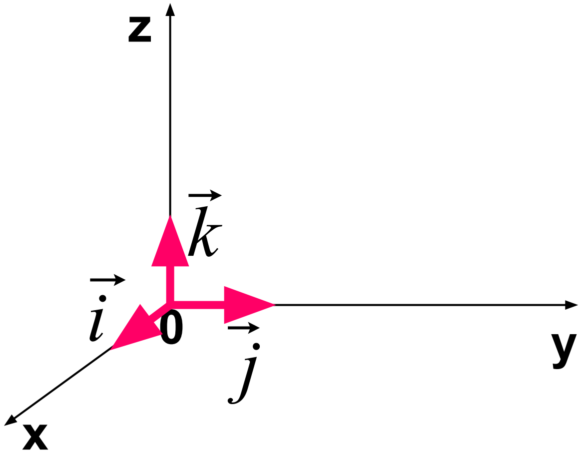
Поменяем порядок векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$



Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется **левой,** если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден совершающим **по часовой стрелке.**

Пример.
Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - правая.

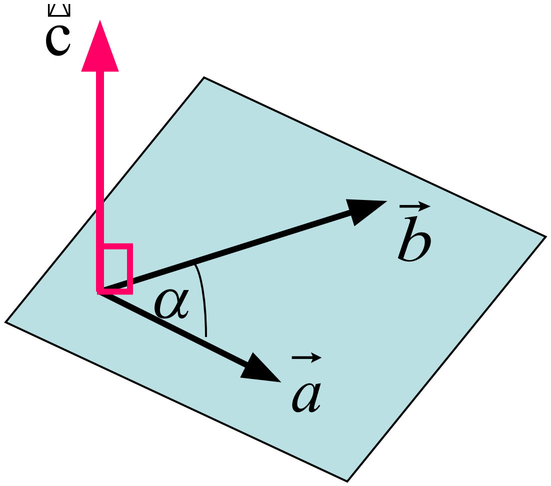
Система координат **x, y, z** имеет правую ориентацию.



Векторное произведение

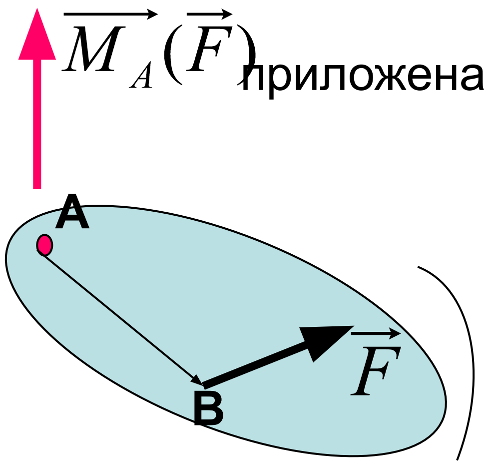
- **Векторным произведением двух векторов** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$
- называется третий вектор $\vec{c}$,
- удовлетворяющий трем условиям :
- 1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$
- **2.** $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
- **3.** Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -

  правая.



- Обозначения : $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Физический смысл векторного произведения



Пусть к твердому телу, закрепленному в точке А, приложена в точке В сила $\vec{F}$

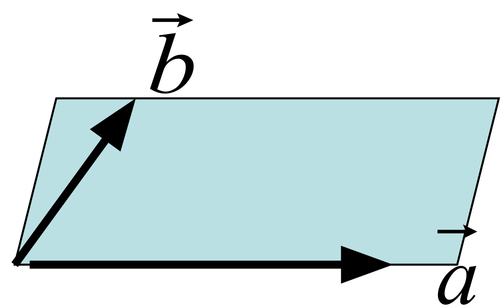
Момент силы $\vec{F}$, приложенной в точке **В,** относительно точки **А** равен **векторному произведению** вектора $\overrightarrow{AB}$ и силы $\vec{F}$:

$$\boxed{\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}}$$

Векторное произведение

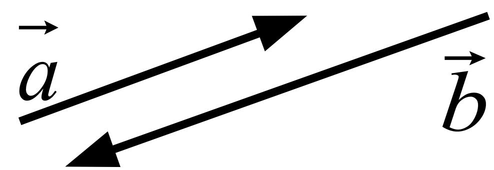
- **Свойства векторного произведения.**
- **1.** $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
- **2.** $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$
- **3.** $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
- **4. Геометрический смысл .**
- Модуль векторного произведения двух векторов
- численно равен площади параллелограмма,
- построенного на этих векторах:

$$\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S_{\square}}$$



- **5. Необходимое и достаточное условие**
- **коллинеарности двух векторов.**
- Два ненулевых вектора коллинеарны
- тогда и только тогда, когда их векторное
- произведение равно нулевому вектору:

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$$



- **6.** $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

§ 9. Векторное произведение векторов.

Пример 2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{2a}+\bar{b}$ **и** $\bar{b}$, **если известно, что** $|\bar{a}|=1,\ |\bar{b}|=2,\ \left(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

Решение

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}\right|,$$

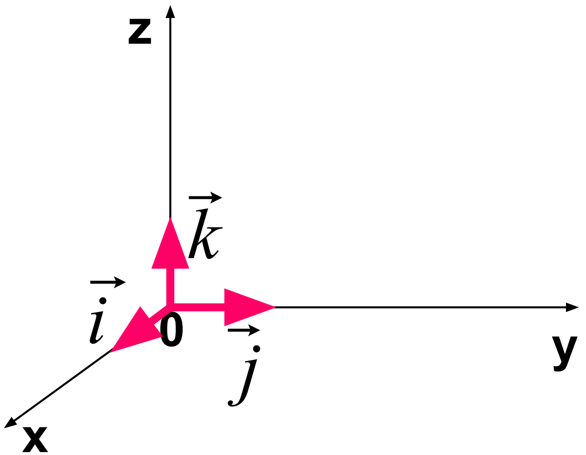
$$\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}=2\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{b}=2\bar{a}\times\bar{b},$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|2\bar{a}\times\bar{b}\right|=\ |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

Векторное произведение ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Найдем векторное произведение ортов координатных осей. Докажем, что

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$



а) $\vec{i} \perp \vec{k}, \ \vec{j} \perp \vec{k}$

б) векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют правую тройку, значит $\vec{i} \times \vec{j} \parallel \vec{k}$,

в) $|\vec{i} \times \vec{j}| = 1$, значит $\boxed{\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.}$

Аналогично доказывается, что $\boxed{\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},}$ и $\boxed{\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.}$

Векторное произведение

- **Векторное произведение векторов,**
- **заданных в координатной форме.**
- Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
- Тогда

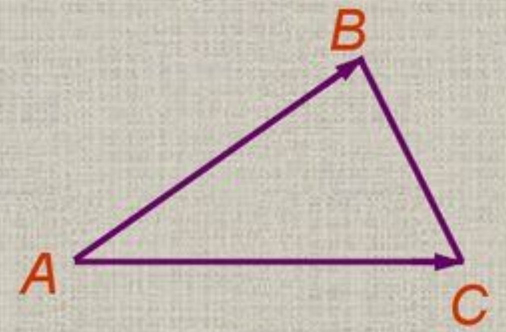
$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\left(\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)}$$

Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$A(2;3;1) \quad B(5;6;3) \quad C(7;1;10)$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{5-2; 6-3; 3-1\} = \{3; 3; 2\}$$

$$\overline{AC} = \{7-2; 1-3; 10-1\} = \{5; -2; 9\}$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\bar{i} - 17\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{1691} \approx 20.6}$$

Смешанное произведение

- **Определение.**
- **Смешанным произведением трех векторов**
- называется векторное произведение первых двух
- векторов, умноженное скалярно на третий вектор:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

- Обозначения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
- **Замечание.**
- Результат смешанного произведения трех векторов
- является скалярной величиной.

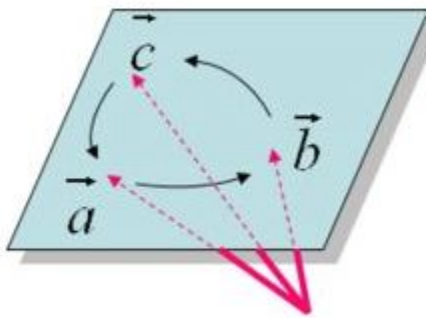
Смешанное произведение

- **Свойства смешанного произведения векторов.**
- 1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
- **2.** Если поменять местами два соседних сомножителя,
- то изменится только знак произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$

- **3.** Циклическая перестановка сомножителей
- не меняет значение смешанного произведения:

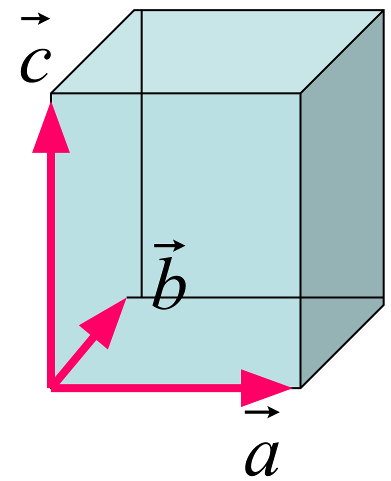
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$$



Смешанное произведение

- **4. Геометрический смысл.**
- Модуль смешанного произведения трех векторов
- равен объему параллелепипеда, построенного
- на этих векторах :

$$\boxed{\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = V_{параллелепипеда}}$$



- Знак смешанного произведения определяет
- ориентацию тройки векторов :
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет правую ориентацию;
- если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет левую ориентацию.

Смешанное произведение

- **5. Необходимое и достаточное условие**
- **компланарности трех векторов.**
- Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

Д.з. Доказать самостоятельно, используя геометрический смысл

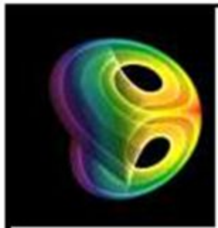
Смешанное произведение векторов, заданных в координатной форме.

Пусть

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$$
$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$$
$$\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

Тогда

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$



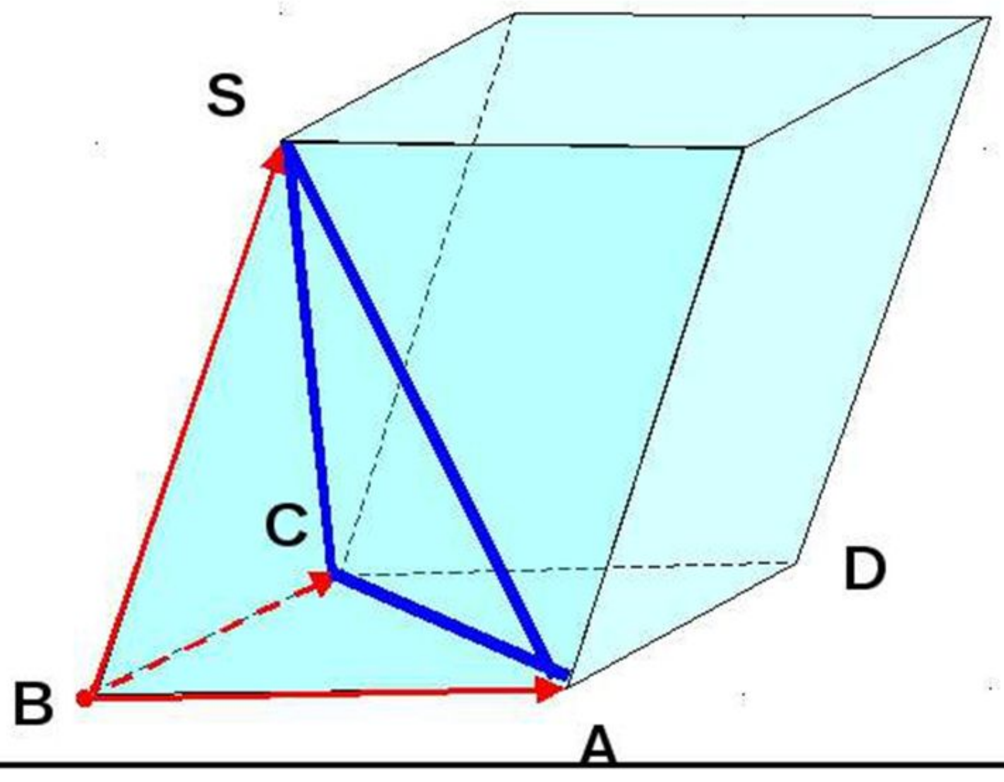
§ 10. Смешанное произведение векторов.

2) Нахождение объема параллелепипеда и тетраэдра

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{ABCD} \cdot h$,

а объем пирамиды – $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h$. Так как $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то

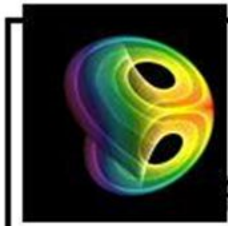
$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V$.



Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле:

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a}\vec{b}\vec{c} \right|.$$



§ 10. Смешанное произведение векторов.

Пример 3. В пирамиде *ABCD* найти высоту, опущенную из ршины *A*, если в прямоугольной декартовой системе координат $A(2,1,0), B(2,-1,2), \ C(0,1,3), D(-1,1,0).$

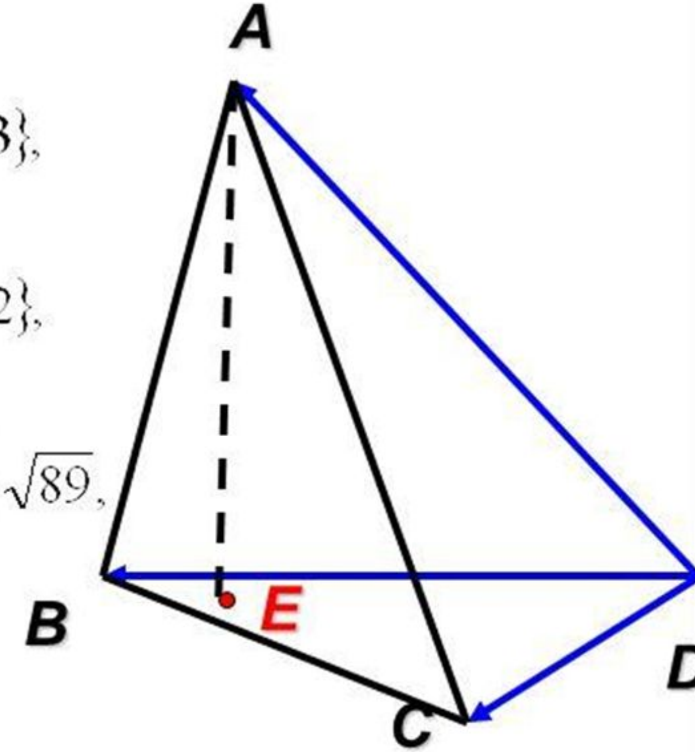
Решение

$$\overline{DA}\{3,0,0\},\quad \overline{DB}\{3,-2,2\}\quad \overline{DC}\{1,0,3\},$$

$$\overline{DB}\times\overline{DC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=\{-6,-7,2\},$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{DB}\times\overline{DC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-7)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{89},$$

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-18\right|=\left|-3\right|.$$



Знак «–» показывает, что тройка векторов левая.

$$H=\frac{3\cdot V}{S}=\frac{3\cdot 3}{\sqrt{89}/2}\approx 1{,}91.$$